

## جیمز استرلینگ و فرمول تقریبی او برای $n!$

جواد بهبودیان \*

اینک به اثبات احتمالی زیر، که در [۱] و [۳] آمده است و بهترین روش برای به خاطر سپردن فرمول بالاست، توجه کنید.

فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda = 1$  باشد. نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  را از  $X$  در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که  $Y = X_1 + \dots + X_n$  دارای توزیع پواسن با میانگین  $\mu = n$  و واریانس  $\sigma^2 = n$  است. برای  $n$ های بزرگ، بنابر قضیه حد مرکزی،  $Y$  تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu = n$  و واریانس  $\sigma^2 = n$  است. از این رو می‌توان نشان داد که برای  $n$ های بزرگ تابع چگالی توزیع  $P(n)$  (پواسن با پارامتر  $n$ ) و تابع چگالی توزیع  $N(n, n)$  (نرمال با میانگین  $n$  و واریانس  $n$ ) در نقطه  $n$  تقریباً برابرند.

به سخنی دیگر

$$\frac{e^{-n}n^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2n}(n-n)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

از این تساوی تقریبی می‌توان  $n!$  را به صورت فرمول استرلینگ به دست آورد.

ممکن است با جیمز استرلینگ (۱۶۹۲-۱۷۷۰) چندان آشنا نباشید. او یک ریاضیدان انگلیسی بود که در دانشگاه اکسفورد تحصیل می‌کرد ولی به خاطر عقاید سیاسی از آنجا اخراج و روانه نیز شد. سپس تحصیلات و تدریس خود را در ایتالیا دنبال کرد و پس از ده سال از ترس اینکه ترور شود به لندن بازگشت و به ونیزی شهرت یافت.

حساب تفاضل‌های محدود، بسط مک لورن، اعداد استرلینگ و چند توزیع گسسته را به او نسبت می‌دهند. شما او را تنها از راه فرمول تقریبی زیر، که به گفته‌ای کار دموآور (۱۶۷۷-۱۷۵۴) ریاضیدان فرانسوی - انگلیسی بوده است، می‌شناسید.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$

این فرمول که در محاسبات تقریبی کاربرد فراوان دارد، در اغلب کتابهای حسابان، آمار و احتمال دیده می‌شود. ولی دانشجویان اغلب آن را فراموش می‌کنند و به ندرت اثبات آن را می‌بینند.

### مراجع

- [1] Dennis P. Walsh (1995), "Equating Poisson and Normal Probability Functions to Derive Stirling's Formula", American Statistician, 49, 270-271.
- [2] National Council of Teachers of Mathematics (1969), "Historical Topics for the Mathematics Classroom", NCTM, 828.
- [3] Tein-Chung Hu (1988) "A Statistical Method of Approach of Stirling's Formula", American Statistician, 42, 204-205.

(\*) بخش آمار دانشگاه شیراز