پدیدآیی آمار ریاضی

جرزی نیمن
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

جرزی نیمن، از تبار لهستانی، در ۱۶ آوریل سال ۱۸۹۴ در بِنْدِری روسیه به دنیا آمد. در سال ۱۹۱۶ به دریافت درجهٔ نامزدی در ریاضیات در دانشگاه خارکوف نایل آمد و از ۱۹۱۷ تا ۱۹۲۷ مدرس مؤسسه تکنولوژی در خارکوف روسیه بود. از ۱۹۲۱ تا ۱۹۲۳ وی آماردانی در مؤسسهٔ تحقیقات کشاورزی بیدگوژ لهستان بود. پس از اخذ درجهٔ دکترا در ریاضیات از دانشگاه ورشو، به مدرسی این* دانشگاه از ۱۹۲۳ تا ۱۹۳۴ اشتغال داشت. وی همچنین سرپرست آزمایشگاه زیست‌سنجی مؤسسه نِکی بود. در ۱۹۲۶ـ۱۹۲۷ وی بورسیهٔ راکفلر در لندن و پاریس بود. از ۱۹۳۴ تا ۱۹۳۸ در یونیورسیتی کالج لندن، ابتدا به عنوان مدرس و سپس به عنوان دانشیار در آمار به کار پرداخت. از سال ۱۹۳۸ تا حالا وی استاد و مدیر آزمایشگاه آمار دانشگاه کالیفرنیا در برکلی بوده است.

آثار فاضلانهٔ نیمن در زمینه‌های زیر است: نظریهٔ مجموعه‌ها، احتمال، آمار، اخترشناسی، زیست‌شناسی، اصلاح جو، و فلسفه علوم. او پنج دکترای افتخاری از دانشگاههای شیکاگو؛ کالیفرنیا، برکلی؛ دانشگاه استکهلم، سوئد؛ دانشگاه ورشو، لهستان؛ و مؤسسهٔ آماری هند دریافت کرده است. وی عضو افتخاری (و برنده مدال) انجمن آمار سلطنتی (لندن) و انجمن ریاضی لندن است. او عضو اتحادیه اخترشناسی بین‌المللی و رئیس افتخاری مؤسسه آمار بین‌المللی است. وی عضو فرهنگستان ملی علوم ایالات متحده، و عضو بیگانهٔ فرهنگستانهای علوم سوئد و لهستان است. وی ویراستار و ویراستار مشترک گزارشهای سمپوزیوم برکلی دربارهٔ آمار ریاضی و احتمال است که در سالهای ۱۹۴۵، ۱۹۴۶، ۱۹۵۰، ۱۹۵۵، ۱۹۶۰، ۱۹۶۵ و ۱۹۷۰ـ۱۹۷۱ برگزار شده‌اند. او مجلّد کیرنیکی فرهنگستان ملی علوم ایالات متحده را در سال ۱۹۷۴ ویرایش کرده است. در سال ۱۹۶۸ موفق به کسب نشان ملی علوم ایالات متحده شده است.

زمینهٔ عام

مسائل علمی در حکم خاستگاههای نظامهای ریاضی‌نو

قاعده‌ای کلی است که نظامهای ریاضی نو، ریشه در مسائل علمی، یعنی در تلاشهای انسان برای درک ساز و کارهای جهان دارند. ریشه‌های علم حساب نهایتاً در آگاهی نیاکان دور ما در تمایز بین «کم» و «زیاد» نهفته است. هندسه از مفاهیم «نزدیک» و «دور» و، در مرحله‌ای پیشرفته‌تر، از میل به اندازه‌گیری مساحتهای زمینها سرچشمه گرفته است. حساب دیفرانسیل از مفاهیم تجربی سرعت و شتاب نشأت یافته است. این مثالها، متضمن رابطه‌ای مستقیم بین نظامهای ریاضی و مطالعات تجربی‌اند. برخی نظامهای ریاضی دیگر، مانند نظریهٔ مجموعه‌ها، نیز با علوم مرتبط‌اند ولی این ارتباط، غیرمستقیم است. ریشه‌های آنها درگیرهای منطقی است که در نظامهای پیشتر کشف شد و خود این نظامها بودند که ارتباط نزدیکی با دنیای تجربی داشتند. یک نظام ریاضی پس از پرداختن به دسته‌ای از پدیده‌های طبیعی در شروع، معمولاً از «حوزهٔ مادری» خود که همانا علم باشد دور می‌شود و زندگی خویش را به عنوان نظریه‌ای مجرد آغاز می‌کند و تنها به ندرت «بازخورانیها»ی اتفاقی پیش می‌آید. بنابراین، هندسهٔ جدید چندان کاری به اندازه‌گیری مساحتهای مزارع ندارد و این موضوع، حوزه‌ای منفک به نام مساحی است. به عنوان شاهد مثالی برای بازخورانی هندسه نوین در علوم، می‌توان از هندسه‌های نااقلیدسی نام برد که در آغاز به عنوان ساختارهای منطقی پرزرق و برق انگاشته می‌شدند امّا حالا بسیاری از اخترشناسان آنها را به عنوان نمایندهٔ حقیقی مشخصه‌های فضایی می‌دانند که در آن زندگی می‌کنیم.

ریشه‌های نظریه احتمال و آمار ریاضی نیز تجربی‌اند. اینک هر دوی آنها به مرحله بلوغ رسیده‌اند و زندگانیهای مربوط به خود را دارند. امّا به دلیل شرایطی که ذیلاً برخواهیم شمرد، ما شاهد رشته‌ای به ظاهر بی‌پایان از بازخورانیها در علوم تجربی، و در همان حال، رشته انگیزه‌هایی به همان درازا از علوم تجربی در نظریه‌های ریاضی احتمال و آمار هستیم. همچنین، نظامهای ریاضی دیگر ابزارهای تحلیلی نوینی برای احتمال و آمار تدارک می‌بینند.

به طوری که بیان شد، تمامی فرآیند بسیار هماهنگ به نظر می‌آید. امّا به محض اینکه به جای نظامهای گوناگون، توجه خود را به کاروزان برمی‌گردانیم این هماهنگی ناپدید می‌شود. جریان مسائل نو، ایده‌های نو، و فنهای نو، پیران را که دوست دارند در برجهای عاج خود در آرامش فرو بروند غرق در اندیشه می‌کند. امّا «جوانترهای» پرجنب و جوش که از لحاظ ریاضی مجهزترند، آنها را از آرامش باز می‌دارند. به صورتی اجتناب‌ناپذیر، جدال «پدران و پسران» ادامه می‌یابد و اغلب سبب رنجش می‌شود. این مطلب با نقل قول زیر از ویلیام فلّر (۱)، دانشمند برجسته‌ای که اخیراً به درود حیات گفته، روشن می‌شود:

> ادعا شده است که نظریهٔ احتمال نوین مجردتر و عامتر از آن است که مفید فایده‌ای باشد. ... می‌توان با اشاره به کاربردهای جدید نامنتظری که بر روی نظریّهٔ مجرد فرایندهای تصادفی برگشوده شده است در مقام پاسخ به این مباحثه برآمد یا می‌توان بینشهای جدیدی را ذکر کرد که به کمک نظریهٔ نوسانهای نوین تدارک دیده می‌شود و دیگر بار شهود را گمراه می‌کند. ... امّا بحث بیهوده است، محکوم کردن بسیار آسان است. همین دیروز بود که چیزهای عملی امروز به عنوان غیرعملی بی‌بها جلوه داده می‌شدند، و نظریه‌هایی که فردا عملی خواهند شد، همواره از سوی مردان امروز، انگ بازیهای بی‌ارزش را خواهند خورد.

زمینه‌های تجربی نظریهٔ احتمال

دو دسته از پدیده‌ها لازمهٔ به وجود آمدن نظریه‌هایی ریاضی‌اند که می‌شود آنها را نظریه‌های احتمال نامید. یکی از این دو دسته پدیده‌ها، دستهٔ ظاهراً پایدار فرلوانیهای نسبی‌اند که به اصطلاح نظریهٔ «فراوانی‌گرا» را پدید آورد. دستهٔ دیگر، دسته پدیده‌های روانی مرتبط با احساسهای اطمینان و عدم اطمینان است. نظریهٔ احتمال وابسته به آن، «ذهنی» نامیده می‌شود. این مقاله تنها به نظریهٔ فراوانی‌گرا می‌پردازد.

اندیشهٔ اساسی نظریهٔ احتمال فراوانی‌گرا، ساز و کار شانسی است. ساز و کاری را سازوکار شانسی می‌نامیم هرگاه (۱) نتیجهٔ، کارکرد آن یکی از چندین برآمد A، B، ...، C باشد و پیش‌بینی اینکه در لحظه‌ای مفروض کدام ظاهر می‌شود، غیرعملی به نظر می‌رسد، و (۲) وقتی فراوانیهای این برآمدها در کارکردهای تکراری متعدد سازوکار، قابل پیش‌بینی به نظر آید. پرتاب سکه، ریختن تاس، و استخراج گویهایی از کیسه، مثالهای بدوی سازوکار شانسی‌اند. ریشهٔ تفکر سازوکار شانسی را به زحمت می‌توان دنبال کرد. امّا بسیار محتمل است که افتخار ابداع آن به اولین شیادی است که تاس را دستکاری کرده است. این امر می‌بایست در عهد باستان رخ داده باشد. شنیده‌ام که در دهلیزهای مقبره‌های برخی پادشاهان مصری، چندین مجموعه تاس به دست آمده است که بعضیها بی‌غل و غش‌اند، امّا برخی از آنها دستکاری شده‌اند. شیاد مورد بحث، پیش از دستکاری تاس، می‌بایستی از این پدیدهٔ پراهمیت آگاهی یافته باشد که فراوانی دراز مدت پرتاب «تک» با تاسی مانند D_1 لزوماً برابر باآوردن خال متناظر با تاسی دیگر مانند D_2 نیست. پس در اینجا فراوانیهای اینکه تاس به یکی از شش صورت ممکن بنشیند جزو خاصیتهای قابل اندازه‌گیری تاس، قابل قیاس با حجم و وزن آن، به نظر آمد. با ملاحظهٔ این نکته، می‌بایست امکان ساختن تاسی با فراوانیهای کم و بیش از پیش تعیین شده‌ای برای آمدن این یا آن وجه به ذهن شیاد خطور کرده باشد.

همهٔ این مطالب، به آگاهی از پدیدهٔ تجربی سازوکار شانسی اشاره دارد.

منشأ نظریه احتمال فراوانی‌گرا به این پرسش باز می‌گردد که آیا می‌توان فراوانی درازمدت پیشامدی مانند E را از روی فراوانیهای معلوم پیشامدهایی وابسته مانند A، B، C ... حساب کرد؟ با میزانی اجتناب‌ناپذیر از ساده‌گرایی، می‌توان گفت که نظریهٔ احتمال در سال ۱۷۱۳ با انتشار کتاب فن حدس زدن یاکوب برنولی پا به منصهٔ ظهور گذاشت.

با این زمینهٔ تجربی، می‌توان نظریهٔ احتمال فراوانی‌گرا را به مناسبترین وجه حساب فراوانیها یا چیزی نظیر آن نامید. روی آوردن به احتمال محتملاً از پیوند شهودی بین فراوانی و «محتمل» ناشی شده است.

کوششهای فراوانی برای تبیین بنیادهای یک نظریهٔ احتمال مجرد و ریاضی ناب به عنوان مدل ذهنی قلمرو تجربی فراوانیهای نسبی به عمل آمد. موفقترین اثر در این راستا از آن کولموگورف (۳) است. عنوان این اثر بنیادهای حساب احتمالات است که در سال ۱۹۳۳ به وسیلهٔ یولیوس اشپرینگر در برلین منتشر شد. این اثر صرفاً ریاضی است. امّا مؤلف خاطرنشان می‌کند که رابطهٔ آن با دنیای تجربی، فراوانی‌گراست، همان دیدگاهی که در عصر حاضر ریشارد فون‌میزس از آن طرفداری کرده است. پرسش بنیادی این است: «با چه فراوانی؟»

موضوعهای تحقیق «فردگرایانه» و «جمع گرایانه» در علوم

وقتی نیوتن، و بعداً، لاپلاس در مکانیک سماوی کار می‌کردند، مطالعات آنها «فردگرایانه» بود. مسألهٔ نوعی، عبارت از محاسبهٔ مدار سیاره‌ای مفروض، مثلاً، مریخ، تحت جاذبهٔ نیوتنی از سوی خورشید بود. در بسیاری از مطالعات از این نوع، لاپلاس دریافت که صفحات مداری همهٔ سیاره‌های مورد مطالعه، بسیار به هم نزدیک بودند. خواننده توجه خواهد کرد که گفتهٔ اخیر از لحاظ کیفی با نتایج متعددی که مربوط به هر سیارهٔ خاص، مثلاً مریخ، است، تفاوت دارد. عبارت صفحه‌های مداری همه سیاره‌ها به هم نزدیک‌اند به هیچ یک از سیاره‌ها به صورت منفرد قابل اطلاق نیست بلکه به رستهٔ همهٔ اجسام سماوی که برچسب «سیاره» دارند، اطلاق می‌شود. پس در اینجا با موضوع مطالعهٔ جدیدی روبه‌رو هستیم: رسته‌ای از اشیاء که همه در تعریف معینی صدق می‌کنند، امّا مشخصه‌های فردی آنها با هم تفاوت دارد. چنین موضوع مطالعه‌ای، «جمع‌گرایانه» نام دارد.

زمانی‌که درپایان سدهٔ هجدهم، لاپلاس (۵) پرسید که آیا ستارگان دنباله‌دار، نظیر سیارگان، اعضای منظومهٔ شمسی‌اند، این پرسش نیز جمع‌گرایانه بود. در آن زمان، رصدهایی از چندین ستارهٔ دنباله‌دار در دسترس و برای محاسبهٔ مدارهای آنها کافی بودند و لاپلاس متوجه شد که صفحه‌های این مدارها برخلاف صفحه‌های سیاره‌ها که به هم نزدیک بودند، چندان به هم نزدیک نیستند. همین وضعیت بود که این سؤال جمع گرایانهٔ دیگر را برای لاپلاس پیش آورد که آیا رستهٔ اشیایی که ستارگان دنباله‌دار نامیده می‌شوند از رستهٔ دیگری به نام سیارگان متفاوت است؟

موضوعهای مطالعهٔ در پژوهشهای علمی نوین، عمدتاً جمع گرایانه‌اند. مثلاً، در نجوم این سؤال مطرح است که آیا کهکشانهای بیضوی (رسته‌ای ازکهکشانها) حجیمتر ازکهکشانهای مارپیچی (رستهٔ دیگری ازکهکشانها) هستند. در پزشکی، پرسشهای مهمّی دربارهٔ اختلافهای درونی بیمارانی که مجموعهٔ نشانه‌های بیماری خاص قابل مشاهده‌ای از خود بروز می‌دهند (یعنی، رسته‌ای خاص از بیماران) موجود است. در مهندسی حمل و نقل، یکی از پرسشهای مهّم این است که آیا ترافیک اتومبیلها در یک بزرگراه دو خطه (رسته‌ای از ترافیک) متضمن تصادفهایی بیشتر از ترافیک در بزرگراههای سه‌خطه است، و سؤالهایی از این قبیل.

در قالب اصطلاحات جدید، رسته‌ای از اشیاء، که موضوع مطالعه‌ای جمع گرایانه است، «جامعه» نامیده می‌شود. بنابراین، ما علی‌الرّسم از «جامعه‌ها»ی مردم که در تعریفهای معینی صدق می‌کنند، از جامعه‌های کهکشانهای بیضوی و مارپیچی، از جامعه‌های مولکولهای گاز در ظرفی و امثال آنها سخن به میان می‌آوریم. در اینجا توجه به ارتباط با نظریه احتمال حائز اهمیت است. این ارتباط از طریق سؤال همه جا حیّ و حاضر «با چه فراوانی» برقرار است که در همهٔ مطالعات جمع گرایانه پیش می‌آید. ظّن لاپلاس که ستارگان دنباله‌دار اعضای قاعده بردار منظومهٔ شمسی نیستند، بر پایهٔ توزیع فراوانی زاویه‌های صفحه‌های مداری آنها با دایرةالبروج بود. سؤال مربوط به جرمهای کهکشانهای بیضوی و مارپیچی در حقیقت سؤالی دربارهٔ توزیع فراوانی جرم در دو جامعه است. سؤال پزشکی مورد اشاره در بالا، سؤالی دربارهٔ میزان پیوند بین نشانه‌های بیرونی بیماری و اختلافهای جسمی بیماران است، مثلاً، بیمارانی که این نشانه‌های خاص را دارند با چه فراوانی به بیماری سرطان مبتلا هستند؟*

آمار ریاضی در حکم نظامی ریاضی که برای مطالعهٔ جمع گرایانه طبیعت پدید آمده است

گرچه مطالعات جمع گرایانه تک به تک از عصر لاپلاس و پس از آن مطرح می‌شدند، چندین دهه طول کشید تا پژوهشگران این آگاهی را به دست آورند که این نوع مطالعات نمایندهٔ رسته‌ای جدیدند و نیز اینکه این رستهٔ جدید مسائل علمی خود را به چندین رستهٔ جزء بخش می‌کند که هر یک به نظام ریاضی نویی نیازمند است. تمامی نظامهای ریاضی که برای برآوردن این نیازها به وجود آمدند، چیزی است که ما آن را آمار ریاضی (یا گاهی «ریاضیات آماری») می‌نامیم.

آمار توصیفی

از لحاظ منطقی، اولین نظام جزء آمار ریاضی (که امّا از لحاظ تاریخی اولین

*) به جا بودن این سؤال نباید با به جا بودن سؤال زیر مشتبه شود: با چه فراوانی قربانیان سرطان اهل دودند؟

نیست) چیزی است که امروزه آن را «آمار توصیفی» می‌نامیم. اصطلاح قطعی نخستین برای توصیف آن در سدهٔ نوزدهم به توسط فخنه (۵) وضع شد. این اصطلاح Kollektivmasslehre است. این اصطلاح کمی طولانی امّا بسیار رسا به مقصود است. اگر موضوع مطالعهٔ ما جامعه‌ای از افراد باشد که هر یک با صفتی مانند X که از فردی به فرد دیگر در تغییر است مشخص شوند آنگاه این مطالعه مستلزم نظامی ریاضی است که مخصوصاً برای توصیف آنچه امروزه توزیع X در جامعه می‌نامیم، ساخته و پرداخته شده است. به طوری که معروف همگان است، تشخیص نیاز به وجود ابزارهایی برای توصیف توزیعهای تجربی، به تولید چندین دستگاه از خمهای فراوانی و رویه‌های فراوانی نظری منجر شد، دستگاههایی که به برنز، به گرام، به شارلیه، و به موفقترین همهٔ آنها کارل پیرسن (ن. ک. به مرجع ۷) نسبت داده می‌شود. تعمیمهای بعدی نتیجهٔ کار رومانوفسکی و مؤلفان بسیار دیگری است.

مسألهٔ نیکویی برازش

یکی از نظامهای جزء آمار ریاضی که بی‌درنگ حاصل می‌شود، همانا نیکویی برازش است. این موضوع با این حقیقت در ارتباط است که علی‌رغم اینکه علاقهٔ اصلی مبحثی در جامعه‌ای از اشیاء، مثلاً، کهکشانهای بیضوی، متمرکز است، این جامعه به مطالعه‌ای جامع تن در نمی‌دهد. به جای تمامی جامعهٔ موردنظر، مجبوریم به نمونه‌ای که از آن استخراج می‌شود، بسازیم. با مفروض بودن تابعی مانند $f(x)$، که فرض می‌شود نمایندهٔ توزیع جامعهٔ متغیر X است، این سؤال مطرح می‌شود که آیا انحرافهای از f را که در نمونه یافت می‌شود، می‌توان به تغییرات نمونه‌گیری نسبت داد. نخستین روش آشنای پرداختن به این مسأله، همان آزمون χ^2، را می‌توان به کارل پیرسن نسبت داد. این مطلب در سال ۱۹۰۰ به چاپ رسید (۸). چند دههٔ بعد چندین روش بدیل پیشنهاد شد که مشهورترین آنها، روشهای مربوط به هرالت کرامر در سوئد (۹)، ریشارد فون میزس در آلمان (۱۰)، و ا.ن. کولموگوروف (۱۱) و ن.و. اسمیرنوف در روسیه (۱۲) است: تلاشی کاملاً بین‌المللی!

مسألهٔ نیکویی برازش با مسائل آماری دیگری پیوند می‌خورد که این مسائل همان مسائل برآورد کردن و آزمون کردن فرضهای آماری است که قریباً به بحث آنها خواهیم پرداخت (۱۳).

مدلسازی: مسألهٔ سازوکار شانسی که قادر به تولید توزیعی مفروض‌اند.

بسته به علاقه غالب پژوهشگر، مباحثی که در زیر فهرست شده‌اند به دو رستهٔ مجزا تعلق دارند: (الف) واقعی، (ب) نظری.

۱. مباحث رستهٔ واقعی به پرسشهایی از نوع زیر می‌پردازد: محتملاً چه چیزی در جامعه‌ای خاص (مثلاً کهکشانها، یا یاخته‌هایی که بدن انسان را تشکیل می‌دهند، یا رانندگان اتوبوسها در خیابانهای لندن) اتفاق می‌افتد که نتیجهٔ آن ممکن است توزیعی خاص برای X قابل مشاهده باشد؟

اغلب، این پرسش علمی با این پرسش سودمندی گرایانه تلفیق می‌شود: آیا می‌توان کاری کرد که فرایندهای موجود در جامعه چنان اصلاح شوند که جنبهٔ نامطبوع خاصی از توزیع X زدوده شود؟

مباحثی از این نوع واقعی را می‌توان به کمک کارهای اودنی یول که با همکاری گرین وود و نیوبولد در سال ۱۹۲۰ انجام شد، تشریح کرد. کار آنها به تصادفهایی که برای رانندگان اتوبوس در لندن روی داده مربوط می‌شود (۱۴). مفهوم اصلی مدل آنها، این است که تعداد تصادفهایی که در واحد زمان برای راننده‌ای خاص روی می‌دهد، متغیری پواسون با امید ریاضی λ است «مستعد تصادف بودن» این راننده نامیده می‌شود. مقدار λ از راننده‌ای به رانندهٔ دیگر تغییر می‌کند و از یک توزیع گاما تبعیت می‌کند. بنابراین، طبق این مدل، توزیع مشاهده شدهٔ تعداد تصادفها برحسب هر راننده، گاما ترکیبی از توزیعهای پواسون است که دو جمله‌ای منفی از کاردر می‌آید.

پرسش «سودمندی گرایانه» این بود که آیا می‌توان جامعهٔ رانندگان را (با گزینش مناسب) به گونه‌ای اصلاح کرد که تعداد تصادفها کاهش یابد؟ پرسش علمی زمینه‌ای این بود که آیا λی فرضی هر راننده به طرزی محسوس با گذشت زمان تغییر می‌کند یا خیر.

در دوره‌های اخیر، تعداد بسیار زیادی از مسائل مدلسازی مشابه مطرح و مطالعه شده‌اند. در اینجا چند مثال عرضه می‌شوند که از روی عمد نامتجانس انتخاب شده‌اند:

(الف) آیا سازوکار به وجود آمدن سرطان سازوکاری یک مرحله‌ای است یا چند مرحله‌ای؟

(ب) آیا سازوکار در پس پیوندهای نزدیک مشاهده شدهٔ کهکشانها، موجب «گیراندازی» کهکشانهای «سرگردان» می‌شود یا موجب انفجارهای بسیار بزرگ در هستهٔ کهکشانهای بسیار بزرگ (۱۶)؟

(ج) آیا تغییرات چشمگیر در مقدار بارش باران در مکانی خاص (گفتهٔ «هفت سال فراوانی و هفت سال قحطی در پی آن» را از تورات به یاد آورید!) به تغییرات مربوط به مقدار ذرات هسته‌ای شدهٔ یخی در ابرها بستگی دارد؟ [اگر چنین است آیا می‌توان با بارورکردن ابرها از شدت خشکسالی کاست؟ (۱۷).]

۲. رهیافتی دیگر غیر از مدلسازی، مشخصهٔ دانشمندانی با علاقه‌ها و تواناییهای عمدتاً ریاضی است که البته این توانایی را دارند که در پرسشهای واقعی این یا آن قبیل علاقه‌مند شوند.

خط سیر فکری تقریباً به شرح زیر است: پدیده‌ای داریم که برخی «مردم واقع‌گرا» را به خود مشغول می‌دارد؛ فرضاً پدیدهٔ سرایت را در نظر گیرید. همچنین، سازوکار آشنای M را داریم که برای برخی امکانات تغییر و تبدیل مساعد است. سؤال این است که آیا تغییر و تبدیلی از M می‌تواند یا نمی‌تواند توزیعی از X مشاهده‌پذیر را به وجود آورد که با آنچه پدیدهٔ واقعی را مشخصه‌سازی می‌کند قابل مقایسه باشد؟ این پدیدهٔ واقعی فرضاً می‌تواند تعداد تصادفها در بین رانندگان اتوبوس، یا موارد آنفلونزا و امثالهم باشد. به طور کلی آیا تغییر و تبدیلهای M می‌توانند توزیعهایی را به وجود آورند که به وسیلهٔ کلیهٔ خمهای پیرسنی مشخصه‌سازی می‌شوند، خمهایی که ظاهراً به انواع حیرت‌آوری از پدیده‌های تجربی برازش می‌کنند؟ این مطلب، دقیقاً موضوع مطالعهٔ زیرکانهٔ (۱۹۳۰) اساساً احتمالاتی جورج پولیا (۱۸) بود که در آن هنگام در زوریخ اقامت داشت و اینک در دانشگاه استانفورد است.*

یکی از نتایج جالب پولیا این بود که یکی از مدلهای «سرایت» وی، با فرض اینکه تصادفهای رخ داده در گذشته، احتمالهای تصادفهای بیشتر در آینده را افزایش می‌دهند، برای تعداد تصادفهای هر راننده در هر واحد زمان، توزیع دو جمله‌ای منفی را به وجود آورد که با مدل یول ـ گرین‌وود ـ نیوبولد یکسان است. به طوری که در بالا توصیف شد، می‌توان مدل اخیر را «سازوکار آمیختهٔ بدون سرایت» نامگذاری کرد. این اکتشاف ویژه از سوی پولیا، دلالت بر پدیده‌ای داشت که غیرقابل پیش‌بینی بود، یعنی اینکه دو سازوکار تصادفی بسیار متفاوت، می‌توانند توزیعهایی کاملاً یکسان برای متغیر X به‌وجود آورند! بنابراین مطالعهٔ این توزیع نمی‌تواند به این سؤال پاسخگو باشد که کدام‌یک از سازوکارهای شانسی عملاً در حال عمل است. در مواردی، به ویژه در اقتصادسنجی و روانشناختی و دیگر تحلیلهای عاملی، پدیدهٔ غیرقابل تشخیص بودن ناراحت‌کننده‌تر از همه بود و موجب پژوهشهای ریاضی فراوانی شد. خوشبختانه معلوم شد که خانواده‌ای از سازوکارهای شانسی که برحسب توزیع یک متغیر تصادفی X غیرقابل تشخیص‌اند، می‌توانند به کمک توزیع توأم همین X و برخی متغیرهای دیگر مانند Y، ...، Z قابل تشخیص شوند. نتایج بسیار جالبی در موضوع قابل تشخیص بودن در اقتصاد سنجی موجودند که نتیجهٔ کار رایرسول از اهالی اسلوست (۱۹):

پس از جنگ دوّم جهانی، مطالعهٔ مدلهای تصادفی پدیده‌های طبیعی به طور قابل ملاحظه‌ای هم از (۱) دیدگاه واقعگرا و هم از (۲) دیدگاه ریاضی پیشرفت فراوان کرد. این امر با توجه به اصطلاحات رایج در آثار ریاضی که آشکارا از زیست‌شناسی یا از فیزیک استقراض شده‌اند، به خوبی آشکار است؛ اصطلاحاتی از قبیل «فرایندهای زاد و مرگ»، «فرایندهای شاخه‌ای»، «فرایندهای تجدید» و غیره. منبع اطلاعاتی بسیار خوبی برای این موضوعات کتاب ویلیام فلر (۱) است. کتاب بسیار خوب دیگری، از تئودورهاریس (۲۰) گنجینه‌ای از اطلاعات هم دربارهٔ منابع واقعی مفاهیم ریاضی گوناگون و هم دربارهٔ نتایجی ریاضی که به توسط کهکشانی جهان گستر از مؤلفان برجسته اندوخته شده، فراهم آورده است.

نظریه‌های برآورد و آزمون فرضهای آماری

وقتی که مدل تصادفی پدیده‌ای طبیعی ساخته می‌شود، بی‌درنگ دو مسأله متمایز مطرح می‌شود که هر دو با این پرسش که آیا مدل واقع‌گرایانه است یا خیر، ارتباط دارند.

یک مسأله این است که چگونه مدل را به بهترین وجه به مشاهدات موجود برازانیم. معمولاً یک مدل تنها خانواده‌ای از توزیعها را در اختیار می‌گذارد که X مشاهده‌پذیر باید از آنها تبعیت کند امّا مقادیر پارامترها («پارامترهای مزاحم») را که اعضای این خانواده را مشخص می‌سازند به ما تسلیم نمی‌کند. مثلاً گرچه هم مدل یول و همکاران و هم مدل پولیا برای مستعد تصادف بودن به این نتیجه می‌انجامد که تعداد X تصادفها باید از توزیع دوجمله‌ای منفی پیروی کند، دو پارامتر این توزیع، مثلاً α و β، در هیچ یک از دو مدل مشخص نمی‌شود. بنابراین مسألهٔ برآورد کردن این پارامترها از روی داده‌های موجود مطرح می‌شود: با مفروض بودن مشاهده‌های X_1، X_2، ...، X_n، چه تابعهایی، فرضاً $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ و $\hat{\beta} = \hat{\beta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ را باید به کار بریم تا برآوردهایی برای α و β به‌دست آوریم که به معنایی «بهترین» باشند؟

مسألهٔ دیگر، یعنی آزمون کردن فرضهای آماری، بی‌درنگ حاصل می‌شود. حتی اگر مدل فرضی با آنچه در پس پدیدهٔ مورد مطالعه در حال عمل است، یکی باشد، و حتی اگر برآوردهای همهٔ «پارامترهای مزاحم» بری از خطا باشند (که انتظار بیهوده‌ای است)، تغییرات شانسی که در جمع‌آوری داده‌ها دخیل است، اختلافهایی بین توزیعهای تجربی و نظری به وجود خواهد آورد. در مقابل، ساختن مدل ممکن است خطاآمیز باشد و کشف این موضوع، جنبهٔ اساسی دارد.

پس در اینجا دو مسألهٔ نظریهٔ ریاضی آمار را داریم: مسأله «برآورد نقطه‌ای» و مسألهٔ آزمون کردن یک فرض «آماری» (یعنی فرضی دربارهٔ توزیع مشاهده‌پذیر X).

اولین فرمولبندی واقعی مسألهٔ برآورد نقطه‌ای به لاپلاس مربوط می‌شود. بعداً فرمولبندی نسبتاً رضایتبخشتری به وسیله گاوس ارائه شد (۲۱). در هر دو مورد مقدار ثابت نامعلومی، فرضاً θ، از یک پارامتر و تعداد معینی مانند n از اندازه‌گیریهای X_i از آن را که همهٔ این اندازه‌گیریها در معرض خطایی تصادفی‌اند، مد نظر داشتند. همچنین، هر دو مورد متضمن فرمولبندی چیزی است که امروزه آن را «تابع زیان» $L(\hat{\theta}, \theta)$ می‌نامیم که فرض می‌شود

*) هنگام چاپ مقالهٔ اصلی، جورج پولیا، ریاضیدان نامی، در قید حیات بود، امّا چند سال قبل درگذشته است. م ـ.

نمایندهٔ تاوانی است که باید آماردان در صورت اتخاذ $\hat{\theta}$ به عنوان برآورد پارامتر مجهول θ، وقتی مقدار واقعی آن θ است، متحمل شود. به اختصار و به بیانی نادقیق، مسأله عبارت از تعیین $\hat{\theta}$ به صورت تابعی از مشاهده‌پذیرهای X است که امید ریاضی $L(\hat{\theta},\theta)$ را مینیمم می‌کند. لاپلاس مقدار مطلق تفاضل $L_L(\hat{\theta},\theta) = |\hat{\theta} - \theta|$ را به کار برد در حالی که گاوس مربع آن $L_G(\hat{\theta},\theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ را ترجیح می‌داد. نتیجهٔ این کار، نظریهٔ آشنای کمترین مربعات بود. به دلیل سادگی و جذابیت شهودی آن، روش کمترین مربعات به وسیلهٔ «مشتریان» این نظریه پذیرفته شد و هنوز هم به طرزی گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. امّا زمینهٔ نظری که به تابع زیان L می‌پرداخت برای حدود یک قرن به دست فراموشی سپرده شد و در اوایل قرن بیستم به وسیلهٔ مارکوف در روسیه (۲۲) و با آشکاری کمتری، به توسط اجوورث در انگلیس مجدداً احیا شد. در حال حاضر، برخی کتابهای درسی در آمار، قضیه‌ای را شامل می‌شوند که قضیهٔ گاوس ـ مارکوف دربارهٔ کمترین مربعات نامیده می‌شود.

نظریهٔ آزمون فرضهای آماری با سرعتی کمتر در حال پیدایش بود. تا آنجا که می‌دانم، اولین تلاش برای آزمون یک فرض آماری به لاپلاس نسبت داده می‌شود (۵). به طوری که در بالا ذکر شد، لاپلاس به تأمل در این امکان پرداخت که ستارگان دنباله‌دار اعضای عادی منظومه شمسی نیستند و بلکه «مهمانانی ناخوانده» از فضای خارج‌اند. وی دلیل آورد که، اگر چنین باشد، آنگاه زاویه‌های بین صفحه‌های مداری ستارگان دنباله‌دار و دایرةالبروج به طور یکنواخت دربارهٔ ۰ و $\pi/2$ توزیع خواهد شد. این فرضی بود که لاپلاس در نظر داشت آزمون کند. برای انجام این کار، وی میانگین حسابی، فرضاً $\bar{\phi}$، زاویه‌های مشاهده شده را به عنوان محکی پذیرفت. (کلمه «پذیرفت» از آن رو با حروف ایرانیک نوشته شده‌اند که بر این حقیقت تأکید شود که برخلاف مسأله برآورد نقطه‌ای، استنتاجی درکار نیست که این محک خاصیت بهینگی معینی دارد.) لاپلاس سپس توزیع میانگین $\bar{\phi}$ را به صورتی که فرض مورد آزمون ایجاب می‌کند، استنتاج کرد، و مقدارهای واقعی محاسبه شده برای چندین ستارهٔ دنبالهٔ داری را که تا آن زمان مورد تحقیق قرار گرفته بود، برای آن به کار برد. در نتیجهٔ این مقایسه، لاپلاس مصمم شد تا با این فرض عمل کند که ستارگان دنباله‌دار برخلاف سیارات، اعضای عادی منظومهٔ شمسی نیستند.

خواننده توجه خواهد کرد که لاپلاس برای ساختن آزمونی برای فرض خود، می‌بایست مسأله‌ای خاص، یعنی مسأله توزیع محک خود $\bar{\phi}$، را حل کند. مسأله‌های توزیع به صورتی تغییرناپذیر هم با مسأله برآورد کردن و هم با مسألهٔ آزمون کردن فرض مرتبط‌اند. محک χ^2 پیرسن برای نیکویی برازش نیز حل یک مسألهٔ توزیع را الزام‌آور می‌کرد. این مسأله به توسط کارل پیرسن برای حالتی که در آن توزیعی که فرض می‌شود به داده‌ها می‌برازد کاملاً معلوم است و متضمن هیچ پارامتر وفق دادنی نیست، حل شد. در آغاز، خود پیرسن و پیروان متعدد او فکر می‌کردند که حضور پارامترهای وفق دادنی که باید برآورد شوند، اثری بر توزیع χ^2 ندارند. اودنی یول، با استفاده از شبیه‌سازی نمونه‌گیری، به خلاف این موضوع اعتقاد پیدا کرد (۲۳). در نتیجه، در رشته پژوهشهایی که اولین آنها را فیشر آغاز کرد (۲۴)، ثابت شد که ظن یول موجه بوده است: معلوم شد که توزیع χ^2 به به‌اصطلاحِ مقدار درجه‌های آزادی و به روشی که برای برآورد پارامترهای وفق یافتنی به کار می‌رود، بستگی دارد.

روشی برای برآورد کردن که توسط کارل پیرسن معرفی شد، و به صورتی منظم به ویژه در رابطه با خمهای فراوانی او به دست وی بسط یافت، روش گشتاورها بود (۷). روش دیگری که فیشر طرفدار آن بود، روش درستنمایی ماکسیمم (۲۵) بود که جداول جالب توجهی بر سر آن به وجود آمد. هر دو روش بر زمینه‌های شهودی و تا حدی جزم اندیشانه استوار بودند. ایدهٔ فیشر بر آنچه وی آن را اندازه‌ای جدید برای «اطمینان یا عدم اطمینان»، یعنی تابع درستنمایی نامید، مبتنی بود. با این حال، خود استدلالها جزم اندیشانه نبودند و بلکه بر دقت برآورد مبتنی بودند.

مسألهٔ برآورد به صورتی گسترده از سوی فیشر مورد مطالعه قرار گرفت. وی برخی مفاهیم پرثمر مانند «سازگاری» برآوردکننده و «کارآیی» آن را معرفی کرد. مفاهیم مهم دیگری که فیشر آنها را معرفی کرد عبارت‌اند از مفهوم «بسندگی» و مفهوم «میزان اطلاع». این مفاهیم، توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرد. اولین آمریکائیانی که در این امر سهم داشتند، هارولد هتلینگ (۲۶) و دوب (۲۷) بودند. همین مفاهیم هنوز هم از دیدگاههای بسیاری در صورتی تا حدی تغییر یافته مورد تحقیق قرار دارد.

نظریهٔ آزمون کردن فرضهای آماری در اوایل دههٔ ۱۹۳۰ به وسیلهٔ اگون پیرسن و نگارندهٔ این مقاله آغاز شد. در قالب اصطلاحات جدید، مسأله مورد مطالعه یک مسأله دو تصمیمی است. با مفروض بودن فرضی مانند H دربارهٔ توزیع مشاهده‌پذیری مانند X، و با مفروض بودن فرض دیگری مانند $\bar{H}$، دو تصمیم ممکن را درباره H در نظر گرفتیم: عمل بر این تصمیم که فرض نادرست است (و، بنابراین $\bar{H}$ درست است)، یا خودداری از چنان عملی. هر یک از این دو تصمیم ممکن است نادرست باشند و پیامد دو نوع خطا ممکن است متفاوت باشد. خطایی که آماردان کارورزی احتراز از آن را مهّم می‌داند (و این یک قضاوت ذهنی است) خطای نوع اول نامیده می‌شود. اولین خواسته نظریه‌ای ریاضی آن است که چنان محکی برای آزمون به دست آورد که تضمین نماید احتمال ارتکاب خطای نوع اوّل برابر (یا تقریباً برابر، یا نابیشتر از) عدد از پیش تعیین شده‌ای مانند α، نظیر $\alpha = 0{,}05$ یا $\alpha = 0{,}01$ یا نظایر آنها باشد. این عدد سطح معنی‌دار بودن نامیده می‌شود.

وقتی دسته‌ای، مثلا $K(\alpha)$ از محکهای آزمون معین شده باشند که همه فراوانی کم و یکسان α را برای خطاهای نوع اول تضمین می‌کنند، لازم است که امکان ارتکاب خطایی از نوع دوم را هم در نظرگیریم. به اختصار و به بیانی نادقیق، مسألهٔ ریاضی مرکب از این است که در بین دستهٔ $K(\alpha)$، محکی را تعیین کنیم که احتمال خطای نوع دوم را مینیمم می‌کند. مفاهیمی که در این نظریه مطرح‌اند شامل «تابع توان» آزمون، «ناحیه‌های مشابه»، «تواناترین آزمونها»، «آزمونهای به طور یکنواخت تواناترین» و امثال آنها هستند.

برای تعدادی از حالتها، که امروزه اغلب «کتابی» تلقی می‌شوند و چندان محتمل نیست که با آنها در مسائل آماری «زنده» که در مباحث نوین علمی پیش می‌آیند روبه‌رو شویم، نظریهٔ اولیه، آزمونهای به طور یکنواخت تواناترین را ایجاد کرد. در حالتهای دیگر، معلوم شد که چنان آزمونهایی موجود نیستند که این امر راه را برای تعریفهای «مصالحه جویانه» متعددی برای بهینگی باز کرد؛ تعریفهایی که آغاز آنها آزمونهای «ناااریب» بود. مسأله کلی هنوز اغلب «در کتابها» ست.

شکل جدیدی از مسألهٔ برآورد مورد توجه نویسندهٔ این مقاله قرار گرفت که همانا برآورد کردن «به وسیلهٔ بازه‌ها» یا، کلیتر، «به وسیلهٔ یک مجموعه» بود. فرض کنید که توزیع مشاهده‌پذیری مانند X (معمولاً یک بردار) به مقدار پارامتری مانند θ بستگی دارد که نامعلوم است بجز اینکه باید در داخل بازه‌ای مشخص، شاید از ۰ تا ۱ و مانند آن، واقع باشد. مسأله عبارت از وابسته کردن بازه‌ای مانند $S(x|\gamma)$ از مقادیر ممکن θ به‌ازای هر مقدار x از X است که در این شرط صدق کند که احتمال آنکه $S(X|\gamma)$ مقدار واقعی θ را بپوشاند، «بزرگ» و برابر (یا تقریباً برابر، یا دست کم برابر) عددی از پیش تعیین شده مانند γ باشد که تا سرحد مطلوب به یک نزدیک است، فرضاً $\gamma = ۰٫۹۵$ یا $\gamma = ۰٫۹۹$ یا مقادیر نظیر آنها. مقدار γیی که به این ترتیب انتخاب می‌شود ضریب اطمینان نام دارد.

وقتی رسته‌ای از چنان بازه‌هایی («فاصله‌های اطمینان») تعیین می‌شود، همچنین لازم است در بین آنها بازه‌ای را تعیین کنیم که در شرط بهینگی قابل درکی صدق کند. بسته به شرایط مسأله، فاصلهٔ اطمینان «بهینه» ممکن است «کوتاهترین» فاصله (به معنایی معین) باشد. با این حال، این قاعده عمومیت ندارد. مثلاً در تعدادی از مسائل علوم و فنون، مهم است «اطمینان» حاصل کنیم که مقدار θ از عددی مانند $\bar{\theta}(x)$ که از روی مشاهدات روی X محاسبه شده است، تجاوز نکند. موردی خاص از این نوع مسائل، حالتی است که در آن θ مقدار متوسط باکتریهای مضر در هر واحد حجم آب مشروب را نشان می‌دهد. پس در اینجا، فاصلهٔ اطمینان بهینه برای θ از صفر تا $\bar{\theta}(x|\gamma)$ امتداد می‌یابد. کاربرد متداول $\bar{\theta}(x|\gamma = ۰٫۹۹)$ تضمین می‌کند که این حکم که چگالی باکتری از $\bar{\theta}(x|\gamma = ۰٫۹۹)$ بیشتر نیست در حدود ۹۹٪ موارد درست است.

با آنکه اولین آثار منتشر شده دربارهٔ فاصله‌های اطمینان به سال ۱۹۳۰ بازمی‌گردد (۳۰)، نظریهٔ قطعی در دو مقاله در سال ۱۹۳۸ و سال ۱۹۳۸ پدیدار شد (۳۱،۳۰). در این اواخر، هر دو نظریهٔ آزمون کردن فرضها و برآوردکردن به وسیلهٔ مجموعه‌ها، به حالتهایی خاص از نظریهٔ کلیتر تابعهای تصمیم آماری که به وسیلهٔ ابراهام والد (۳۲) پایه‌ریزی شد، بدل شدند.

مسألهٔ طرح آزمایشی

شاید بزرگترین دستاورد فیشر، ابداع و بسط نظریه انجام آزمایش با مواد متغیر باشد. گرچه یک روز کامل در این سمپوزیوم* به این موضوع اختصاص داده شده است، این دستاورد فیشر در ایجاد بخشی از آمار ریاضی به قدری اهمیت دارد که حداقل اشارهٔ کوتاهی به آن در مقالهٔ حاضر به عمل آید.

به نظر من، اساسیترین ایده در بین ایده‌های متعدد فیشر آن است که برای قابل اعتماد بودن آزمایشی که با مواد متغیر انجام می‌شود، این آزمایش باید «تصادفی ساخته» شود. معنی این اصطلاح چنین است. فرض کنید که آزمایشی برای آزمون مؤثر بودن چندین تیمار $T_1, T_2, \ldots, T_s$ طرح می‌شود. تیمارها باید بر روی تعدادی «واحدهای آزمایشی» مقایسه شوند. در یک امتحان کشاورزی، این واحدها ممکن است کرتهایی از یک مزرعهٔ آزمایشی باشند. در پزشکی، واحدهای آزمایشی ممکن است بیمارانی باشند که تشخیص پزشکی یکسانی دربارهٔ آنها حاصل شده است. در هواشناسی، واحدهای آزمایش ممکن است روزهایی با شرایط جوّی ویژه باشد و نظایر آنها.

اصل تصادفی سازی فیشر مستلزم آن است که تیمارهای مورد مطالعه، نه با انتخاب آزمایشگر، بلکه از طریق استفاده از یک سازوکار شانسی خوب طراحی شده، به واحدهای آزمایشی تخصیص داده شود. این بدان دلیل است که، بدون تصادفی‌سازی، ممکن است تفاوت ظاهری بین تیمارها که در آزمایش پدیدار می‌شود در واقع معلول خاصیتهای ذاتی تیمارها نبوده بلکه معلول علتهای خارجی معینی باشد. با نگاه به گذشته، یکی از علتهای رایج اریبی از این نوع، آن است که آزمایشگران به یکی از تیمارهای خاص مورد مطالعه دلبستگیهای عاطفی دارند و شاید ناخودآگاهانه میل دارند که تیمارهای برتر را به آن واحدهای آزمایشی تخصیص دهند که، به معنایی، «بهتر» به نظر می‌رسند. نتایج غالب چنین رویه‌هایی در وهلهٔ اول تا حدی خود فریبی و سپس فریب دادن دیگران است.

تصادفی سازی یک آزمایش ممکن است «نامقید» یا محدود به برخی قیود باشد. فیشر، همراه با فرانک ییتس، ابزارهایی برای نیل به تصادفی‌سازی مؤثری به وجود آوردند. در اینجا سه کتاب در خور ذکرند: روشهای آماری برای پژوهشگران (۳۳)، و طرح آزمایشها (۳۴) (چاپهای متعدد). هر دو نوشتهٔ فیشر؛ کتاب سوّم، به وسیله فیشر و ییتس، جدولهای آماری برای پژوهش زیست‌شناسی، کشاورزی و پزشکی (۳۵) به وسیلهٔ هفنر منتشر شد، و باز هم چاپهای متعددی از آن بیرون آمد.

هر سه کتاب تأثیر فوق‌العاده‌ای بر انجام آزمایشها در همهٔ زمینه‌ها گذاشتند. با این حال، چنانچه مرسوم است، این تأثیر بی‌درنگ صورت عملی نگرفت. می‌توان واکنشهای اولیهٔ پژوهشگران را با اظهار نظرهایی از نوع زیر توصیف کرد: «اوه، به فیشر بگویید دست از سر من بردارد ـ من خودم دربارهٔ آزمایشگری و مطالب خودم هر چیز را که باید بدانم می‌دانم!» این اعتراضها به خصوص علیه تصادفی سازی بود. به مرور زمان، نظرها عوض می‌شوند.

*) مقالهٔ حاضر متن کامل سخنرانی جرزی نیمن در سمپوزیومی دربارهٔ تاریخ احتمال و آمار است.

ازدیاد مباحث جمع‌گرایانه در علوم و فنون، منبع الهامی برای بسط نظریه‌های ریاضی احتمال و آمار

در شروع این مقاله، متذکر شدیم که، گرچه در زمان حاضر نظریه‌های احتمال و آمار به عنوان نظامهای ریاضی به مرحلهٔ بلوغ رسیده‌اند و زیستن «زندگانی خود» را آغاز کرده‌اند، به رشد و تنوع گرایی در جهات نوین متعددی ادامه می‌دهند. دلیل این کار، تعداد روزافزون مسائل جمع‌گرایانه در درون گوناگونیِ حیرت‌آوری از حوزه‌های واقعی است که تقریباً به طرزی تغییرناپذیر مسائل ریاضی نوینی را در خود دارند. در صفحات پیشین، ۱۰ مثال زیر به اختصار ذکر شدند:

- مستعد تصادف بودن رانندگان اتوبوس
- نجوم: مسائل گوناگون (۳۶)
- تلاشهای مربوط به بارانزایی
- آلودگی به باکتری آب مشروب
- اقتصاد سنجی
- آزمایشگری با مواد متغیر در همهٔ حوزه‌ها
- تحلیل عاملی در روانشناسی
- سازوکار سرطانزایی
- تشخیص پزشکی
- مهندسی ترافیک

مناسبت دارد که به این فهرست، فهرست دیگری از حوزهٔ فعالیتهای نظری و واقعی جدید افزوده شود. چند مورد زیر برای توضیح مقصود، کافی به نظر می‌رسند.

۱) ژنتیک جمعیتی، از هاردی (یک «ریاضیدان نابگرا») ازکمبریج که در ۱۹۰۸ نامه‌ای عبرت‌آموز به مجلهٔ ساینس نوشت)، تا فیشر، تا سوال رایت، تا مباحث «نودارووینی» تکامل (۳۷).

۲) تکنولوژی، از واتر شیوهارت و «کنترل کیفیت» تا نمونه‌گیری برای پذیرش (۳۸)، تا تحقیق در عملیات، تا نظریهٔ قابلیت اعتماد.

۳) آلودگی محیط زیست و مباحث بهداشت عامه (۳۹).

۴) مردم شناسی، ازکار «واقعی» آلفرد لوتکا در ایالات متحده (۴۰) وکار بسیار «ریاضی» ویتو ولترا در ایتالیا (۴۱)، هر دو در سالهای ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰، تا نگرانی بین‌المللی جدید مربوط به افزایش جمعیت.

پس اینها را می‌توان دلایل تحقیق و آموزش همه جا گستردهٔ جاری در دو زمینهٔ به هم پیوستهٔ احتمال و آمار برشمرد.

مراجع

[1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Wiley, New York, (lst ed., 1950; 3rd ed., 1967.)

[2] J. Bernoulli, *Ars conjectandi* (1713: reprinted in *Wahrscheinlich keitsrechnung*), Engelmann, Leipzig, 1899.

[3] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin, 1933.

[4] R. von Mises, *Probability, Statistics and Truth* [2nd rev. English ed., H. Geiringer (Transl. Ed.)], Allen and Unwin, London, 1957.

[5] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilitiés*, Académie Française, Paris, 1812 (English version: Dover Publications, New York, 1951).

[6] G. T. Fechner, Kollektivmasslehre, G. R. Lipps (Ed.), Engelmann, Leipzig, 1897.

[7] M. G. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics* (3rd ed.), Vols. 1 and 2, Griffin, London, 1947.

[8] K. Pearson, On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Phil. Mag.* Ser. V 50, 157-175 (1900).

[9] H. Cramér, On the composition of elementary errors. First paper: Mathematical deductions. *Skand. Aktuarietidskr.* **11**, 13-74 (1928).

[10] R. von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Deuticke, Leipzig, 1931.

[11] A. N. Kolmogorov, Sulla determinazione empirica de una leggi di distribuzione. *Giorn. Ist. Ital. Attuari 4,* 83-91 (1939).

[12] N. V. Smirnov, On deviations of the empirical distribution functions, (Russian). *Mathematiches Sbornik 6,* 3-26 (1939).

[13] J. Neyman, "Smooth"test for good of fit. *Skandinavisk Akuraietidskr.* **20**, 149-199 (1937). See also: *A Selection of Early Statistical Papers of J. Neyman,* University of California Press, Berkeley, 291-319, 1967.

[14] G. U. Yule an M. Greenwood, An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple attack of disease or of repeated accidents. *J. Roy. Statist. Soc.* **83**, 255-279 (1920).

[15] J. Neyman and E. L. Scott, Statistical aspects of the problem of carcinogenesis. *Proc 5th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.* **4**, 745-776 (1967).

[16] W. Zonn, Explosive events in the universe. In *The Copernican Heritage: Theories "Pleasing to the Mind,"* J. Neyman (Ed.), MIT Press, Cambridge, Mass., 1974.

[17] J. Neyman, Experimentation with weather control. *J. Roy. Statist. Soc.* A 130, 285-326 (1967).

[18] G. Pólya, Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Ann. Inst. Henri Poincaré 1,* 117-161 (1930).

[19] O. Reiersϕl, Identifiability of a linear relation between variables which are subject to error. *Econometrica 18*, 375-389 (1950).

[20] T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes,* Springer-Verlag Berlin, 1963.

[21] C. F. Gauss, *Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate,* stankiewicz, Berlin, 1887.

[22] A. A. Markov, *Wahrscheinlichkeitsrechnug* (German transl.), Teubner, Leipzing, 1912.

[23] G. U. Yule, An application of the χ^2 method to association and contingency tables, with experimental illustrations. *J. Roy. Statist. Soc. 85*, 95-104 (1922).

[24] R. A. Fisher, The conditions under which χ^2 measures the discrepancy between observation and hypothesis. *J. Roy. Statist. Soc. 87,* 442-450 (1924).

[25] R. A. Fisher, On mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London) Ser.* A 222, 309-368 (1921).

[26] H. Hotelling, The consistancy and ultimate distribution of optimum statistics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **32,** 847-859 (1930).

[27] J. L. Doob, Probability and Statistics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36**, 759-775 (1934).

[28] J. Neyman and E. S. Pearson, On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Phil. Trans.Roy. Soc. (London) Ser.* A 231, 289-337 (1933).

[29] W. Pytkowski, The dependence of the income in small farms upon their area, the outlay and the capital invested in cows, (Polish, English summaries), Monograph no. 31 of series *Biblioteka Pulawska*, publ. Agri. Res. Inst. Pulawy, Poland,

1932.

[30] J. Neyman, Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London) Ser. A 236*, 333-380 (1937).

[31] J. Neyman, L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité. *Actual. Scient. Indust. 739,* 25-57 (1938). [Russian transl.: *Usp. Matemat. Nauk 10,* 207-229 (1949)].

[32] A. Wald, *Statistical Decision Functions,* Wiley, New York, 1950.

[33] R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers,* Oliver & Boyd, London. (lst ed., 1925; 12th ed., 1954.)

[34] R. A. Fisher, *The Design of Experiments, Hafner,* New York. (lst ed., 1935; 8th ed., 1966.)

[35] R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research,* Hafner, New York. (lst ed., 1838; 6th ed. 1963).

[36] J. Neyman and E. L. Scott, Field galaxies and cluster galaxies: abundances of morphological types and corresponding luminosity functions. In *Confrontation of Cosmological Theories with Observation,* M. S. Longait (Ed.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 119-130 (1974).

[37] *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statis. Prob., 5: Darwinian, Neo-Darwinian and Non-Darwinian Evolution.* University of California Press, Berkeley, 1972.

[38] A. Bowker, *Sampling Inspection by Variables,* McGraw-Hill, New York, 1952.

[39] Proc. *Sixth Berkeley symp. Math. Statist. Prob., 6: Effects of Pollution on Health.* University of California Press, Berkeley, 1972.

[40] A. J. Lotká, Elements of Physical Biology, Williams & Wilkins, Baltimore, 1925. (Republished, Dover, New York, 1956.)

[41] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la vie.* Gauthier-Villars, Paris, 1931.

آمار و احتمال

در یک کلام

کای‌لای چانگ اظهارنظر زیر را دربارهٔ احتمال و آمار از قول امیل آرتین ریاضیدان نقل می‌کند:

«هر کسی می‌داند که احتمال و آمار هم دو یک چیزند و آمار هم چیزی جز همبستگی نیست. همبستگی نیز خود کسینوس زاویه‌ای است. بنابراین آمار و احتمال کلاً از بدیهیات‌اند!»

نقل از کتاب نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی تألیف کای‌لای چانگ.