

## نقش هندسه در استقلال دو به دو و استقلال تام

نيل شورتن و تری کیسر  
ترجمه علی اکبر محسنی پور\*

### چکیده

$$p_1 : x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$p_2 : x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$

$$p_3 : x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$$

$$p_4 : x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$$

هر سه چگالی حاشیه‌ای به صورت زیراند

$$g_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x_i = 0, 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

و چگالی توانم هر دو متغیر به صورت زیر است:

$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x_j = 0, 1, x_i = 0, 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که،  $(0, 0, 0)g_1(0)g_2(0) = 0 \neq f(0, 0, 0)$  و بنابراین  $X_1, X_2$  دارای استقلال تمام نیستند. اما چون برای هر  $x_i$  و  $x_j$ ،  $h(x_i, x_j) = g_i(x_i)g_j(x_j)$ ، پس متغیرها دو به دو مستقل‌اند. تفاوت این دو نوع استقلال، که در حالت متغیرهای تصادفی گسترش، به سادگی شرح داده شد، برای متغیرهای پیوسته به این بدیهی نیست. ما مثالهایی هندسی را مطرح می‌کنیم که می‌توانند در تسهیل یادگیری مؤثر بوده و بینش جدیدی در مورد این تفاوت فراهم آوردد.

در حالی که مفاهیم استقلال دو به دو و تام، نقش بنیادی در نظریه احتمال دارند، گاهی تفاوت بین آنها برای دانشجویان مشکل است. برای استقلال دو به دو متغیرهای تصادفی می‌که به صورت یکنواخت روی ناحیه تکیه گاهشان توزیع شده‌اند، داشتن «تکیه‌گاه مستطیلی»، یعنی حاصلضرب دکارتی بازه‌ها برای چگالی توانم آنها، شرط لازم و کافی برای استقلال تام است. استفاده از تصاویر هندسی به دانشجویان در درک این نتایج کمک کرده، بینش جدیدی درباره تفاوت این دو مفهوم فراهم می‌آورد.

### ۱ مقدمه

مفاهیم استقلال و احتمال حاشیه‌ای در فهم نظریه احتمال نقش اساسی داشته و جنبه‌ای مهم از درس‌های مقدماتی احتمال و آمار هستند. معمولاً تفاوت بین استقلال دو به دو و تام، برای متغیرهای تصادفی گسترش، با مثالی مانند مثال زیر، تشریح می‌شود.

#### مثال ۱

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & p_4, p_3, p_2, p_1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

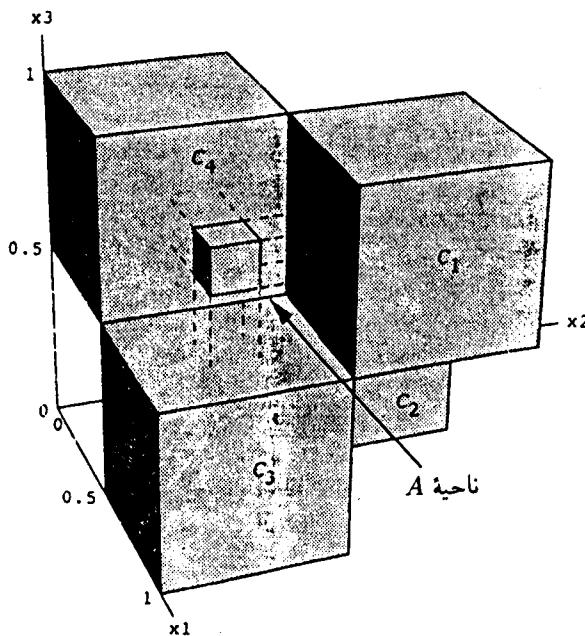
که در آن نقاط عبارت‌اند از:

\* علی اکبر محسنی پور، دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، مؤسسه ریاضیات دکتر مصاحب در دانشگاه تربیت معلم.

## ۲ تکیه‌گاه مستطیلی همبند

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{8}{9}, & \frac{1}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad \frac{1}{3} \leq x_2 \leq 1 \\ \frac{2}{9}, & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

که در آن تکیه‌گاه به صورت یک مربع واحد است، ولی  $X_1, X_2$  وابسته‌اند. همین ایده را می‌توان به حالت سه بعدی گسترش داد و بینش با ارزشی از تفاوت بین استقلال دو بهدو و تام به دست آورد. و این تمايزی است که داشتجویان مبتدی برای فهم آن اغلب دچار مشکل می‌شوند. به طور مشخص تکیه‌گاه سه بعدی متغیرهای پیوسته  $X_1, X_2, X_3$  باید ذاتاً یک مکعب مستطیل باشد تا متغیرها به صورت تام و مستقل باشند، ولی برای استقلال دو بهدو، فقط لازم است که تصویر تکیه‌گاه روی صفحه‌ها، مستطیل باشد. با استفاده از بحث قبلی برای استقلال دو بهدو، چگالی احتمال تأم باید دارای تکیه‌گاه مستطیلی باشد؛ یعنی، تصاویر تکیه‌گاه روی هر کدام از صفحه‌های  $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$  باید یک مستطیل باشد. مثال ۳ با تکیه‌گاهی که در شکل ۲ نشان داده شده است، توصیفی ساده از حالتی است که استقلال دو بهدو وجود دارد، ولی استقلال تام وجود ندارد.



شکل ۲. تکیه‌گاه  $f$  در مثال ۳

مثال ۳

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2, & (x_1, x_2, x_3) \in C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

که در آن، مکعبها به صورت زیرند:

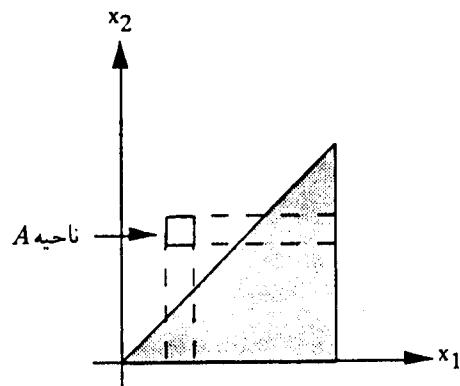
1) Hogg    2) Tanis

در برخی از کتابهای درسی مانند هاگ<sup>۱</sup> و تیس<sup>۲</sup> (۱۹۹۳)، «تکیه‌گاه» تابع چگالی احتمال  $f(x_1, \dots, x_n)$  را مجموعه مقادیری از  $X_1, X_2, \dots, X_n$  تعریف می‌کنند که به ازای آنها،  $> f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . تذکر داده می‌شود که برای آنکه دو متغیر نصادری  $X_1$  و  $X_2$  مستقل باشند، باید تابع چگالی تأم آنها یعنی،  $h(x_1, x_2)$ ، برابر حاصلضرب تابعهای توزیع حاشیه‌ای  $g_1(x_1)$  و  $g_2(x_2)$  باشد و این امر تنها زمانی ممکن است که، تکیه‌گاه  $X_1, X_2$  یک «مستطیل» باشد. مستطیلی بودن تکیه‌گاه اشاره بر حاصلضرب دکارتی بازه‌ها دارد. این نتیجه، پیامدی از فضای حاصلضربی است که، به وسیله فضای احتمال اصلی هر کدام از چگالیهای حاشیه‌ای تشکیل شده است. از مستطیلی بودن تکیه‌گاه نمی‌توان استقلال را نتیجه گرفت، در حالی که مستطیلی نبودن تکیه‌گاه مانع استقلال دو متغیر می‌شود. این موضوع را می‌توان در مثال زیر به آسانی دید.

مثال ۲. فرض کنید،

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x_2 \leq x_1 < 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

شکل ۱ تکیه‌گاه متناسب  $f$  را نشان می‌دهد. توجه کنید که  $P(X_1 < \frac{1}{3}, X_2 > \frac{1}{3}) = 0$ . زیرا احتمال فراگرفتن در مربعي را نشان می‌دهد که خارج تکیه‌گاه است، اما  $P(X_2 > \frac{1}{3}) = P(X_1 < \frac{1}{3}) = 0$ . برای هر تکیه‌گاه غیر مستطیلی، می‌توان ناحیه‌ای مانند ناحیه  $A$  در شکل ۱، بیرون از تکیه‌گاه یافت که در نتیجه احتمال آن برابر صفر باشد، اما هر دو حاشیه مربوط مثبت باشند.



شکل ۱. تکیه‌گاه  $f$  در مثال ۲

به عکس، حتی وقتی که تکیه‌گاه مستطیلی باشد، ممکن است  $X_1$  و  $X_2$  وابسته باشند. این موضوع را با تابع چگالی تأم زیر شرح می‌دهیم.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2 - c, & (x_1, x_2, x_3) \in C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \\ c, & \text{روی یک مکعب واحد دیگر} \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

که در آن،  $c$  هر ثابتی است که در  $C_2 \leq c \leq C_4$  صدق کند. و  $C_i$ ها،  $i = 1, 2, 3, 4$ ، مکعبهایی هستند که در شکل ۲ داده شده‌اند. متغیرهای  $X_1$  و  $X_2$  مستقل دو به دو خواهند بود. ولی هنگامی که،  $1 \neq c$ ،  $X_1$  مستقل نام نیستند. و اگر  $0 \neq c \neq 2$  باشد، روشی می‌بینیم که تکیه‌گاه از تمامی مکعب واحد تشکیل می‌شود.

با این حال توجه به این امر حائز اهمیت است که، اگر چگالی تأمین نداشت باشد، یعنی مقدار ثابتی روی تام تکیه‌گاه بگیرد ( $1 = c$ )، در این صورت، مستطیلی بودن تکیه‌گاه شرط لازم و کافی برای استقلال تام است.

### ۳ تکیه‌گاه مستطیلی مجزا

جالب است توجه شود که، تکیه‌گاه مستطیلی لازم برای استقلال، ممکن است مشکل از چند مقطع مستطیلی ناهمبند باشد که، به صورتی مناسب چنان قرار گرفته‌اند که یک حاصلضرب دکارتی از بازه‌ها را تشکیل می‌دهند، آن گونه که در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۴

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (x_1, x_2) \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

که در آن، مربعها به صورت،

$$S_1 : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}$$

$$S_2 : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1$$

$$S_3 : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}$$

$$S_4 : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1$$

هستند که تکیه‌گاه آن در شکل ۳ نشان داده شده است. می‌بینیم که، این مثال ناحیه‌های بیرون از تکیه‌گاه را که هر دو احتمال حاشیه‌ای آن غیرصفر باشند، مجاز نمی‌داند. بنابراین،

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int f(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(x_1, x_2) dx_2 + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3}, & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3} \quad \text{با} \quad \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad \frac{1}{3} \leq x_2 \leq 1, \quad \frac{1}{3} \leq x_3 \leq 1 \\ C_2 : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3} \\ C_3 : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$C_4 : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \leq x_3 \leq 1$$

برای تعیین چگالیهای حاشیه‌ای توجه کنید که وقتی  $\frac{1}{3} \leq x_1 \leq 0$ ،

$$g_1(x_1) = \iint_{C_1 \cup C_4} 2 dx_2 dx_3 = 1,$$

و وقتی  $0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}$ ،

$$g_1(x_1) = \iint_{C_1 \cup C_3} 2 dx_2 dx_3 = 1$$

با تحلیلی مشابه، می‌توان نشان داد که، برای  $i = 1, 2, 3$ ،

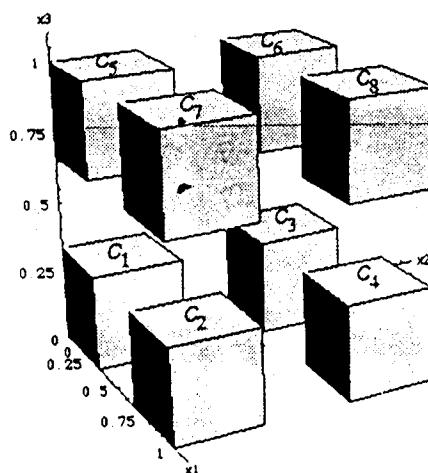
$$g_i(x_i) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_i \leq 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

چگالی تأمین  $h(x_1, x_2)$  شامل انتگرالی متناظر با هر یک از مکعبهای به شکل  $1 = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1}{3}} 2 dx_2 = \int_0^{\frac{1}{3}} 2 dx_2$  است. همچنین، برای  $1 \leq i < j \leq 3$  داریم

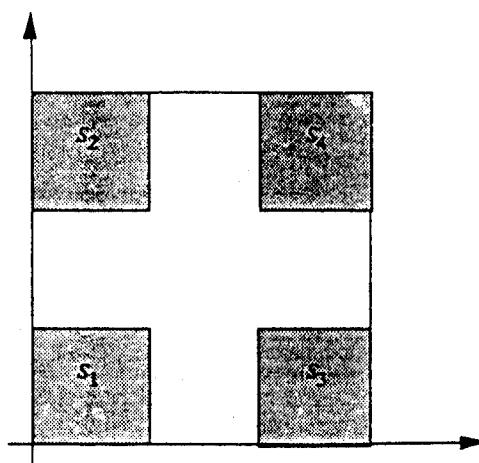
$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_j \leq 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که، مثلاً  $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ، زیرا شامل نقطه‌ای بیرون از تکیه‌گاه  $f$  است، اما،  $1 = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1}{3}} g_1(\frac{1}{3}) g_2(\frac{1}{3}) g_3(\frac{1}{3}) dx_1 dx_2$ . بنابراین،  $X_1, X_2$  و  $X_3$  کلی مستقل نام نیستند. اگرچه، به دلیل اینکه به ازای هر  $i, j$ ،  $3 \leq j < i < 1$ ،  $h(x_i, x_j) = g_i(x_i) g_j(x_j) = 1$ ،  $X_i$  و  $X_j$  دارای استقلال دو به دو هستند. تکیه‌گاه اینتابع چگالی که در شکل ۲ مشخص شده است، نشان می‌دهد که برای استقلال دو به دو  $X_2, X_3$  و  $X_1$  فقط لازم است که تصاویر روی هر صفحه، مستطیل باشند. اما، برای استقلال قویتر تام، تکیه‌گاه باید یک مکعب مستطیل باشد، تا از ایجاد ناحیه‌ای مانند  $A$  در شکل ۲، که در بیرون از تکیه‌گاه  $f$  قرار گرفته و بنابراین دارای احتمال صفر است اما سه احتمال حاشیه‌ای آن مثبت است، جلوگیری کند.

برای اینکه دو متغیر مستقل باشند، مستطیلی بودن تکیه‌گاه شرطی لازم است اما کافی نیست. به طور مشابه برای حالت سه متغیر تصادفی، مکعب مستطیل بودن تکیه‌گاه، تنها شرطی لازم است ولی کافی نیست. مثلاً تابع چگالی تأمین  $f$  را با ساختار زیر در نظر بگیرید.



شکل ۴. تکیگاه در مثال ۵



شکل ۳. تکیگاه در مثال ۴

همچنین

$$g_2(x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3} \text{ یا } \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

$$(g_2(x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)) \text{ بنا برایین } X_1 \text{ و } X_2 \text{ مستقل اند.}$$

شبیه به استقلال دو متغیر که در آن تکیگاه می‌توانست به صورت مقاطع مستطیلی ناهمبند باشد، برای سه متغیر نیز تکیگاه متغیرهای مستقل تام، ممکن است، از مکعبهای مستطیلی ناهمبند، تشکیل شده باشد. این موضوع را با تابع چگالی که در مثال زیر داده‌ایم ثابت کردہ‌ایم.

مثال ۵

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{17}{16}, & (x_1, x_2, x_3) \in \bigcup_{i=1}^4 C_i \\ 0, & \text{سایر جاهای} \end{cases}$$

مکعبهایی که در شکل ۴ مشخص شده‌اند تکیگاه  $f$  را نشان می‌دهند. تابع چگالی توأم دوبعدی آنها،  $(j_i, x_i)$  و  $h(x_i, x_j)$  را تابعهای چگالی حاشیه‌ای آنها،  $(x_i, g_i)$  و  $(x_j, f)$  به ترتیب مشابه (۴) و حاشیه‌ایها (۵) مثال ۲ هستند.

## مرجع

- Hogg, R. B., and Tanis, E. A. (1993), *Probability and Statistical Inference* (4th ed.), New York: Macmillan.

\*\*\*

اصل این مقاله با عنوان

٤٩ تألیف Terry L. Kiser و Neil C. Schwertman The Role of Geometry in pairwise and mutual Independence در شماره ۱، دوره ۴۹ مجله The American Statistician به جاپ رسیده است.