

استنباط آماری زنجیرهای مارکوف

غلامحسین شاهکار *

چکیده

مسائل استنباط آماری زنجیرهای مارکوف مانند برآورد و آزمون فرضها در زمینه‌های مختلف کاربردی اهمیت ویژه دارند و متأسفانه کمتر مورد توجه مؤلفان قرار گرفته‌اند. در این مقاله ضمن شرح روش درست‌نمایی ماکسیم برای برآورد احتمالات تغییر وضعیت زنجیرهای مارکوف، در نحوه آزمون رتبه یک زنجیر مارکوف نیز بحث می‌کنیم.

نظر بگیرید. (فرض کنید n_{ij} تعداد تغییر وضعیتهای یک مرحله‌ای مشاهده شده از وضعیت i به j ، و $N + 1$ تعداد کل مشاهدات باشد.) گیریم

$$\sum_{j=1}^m n_{ij} = n_{i.}, \quad \sum_{i=1}^m n_{ij} = n_{.j}, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} = \sum_{i=1}^m n_{i.} = n_{..}$$

ویتل (۱۹۵۵) احتمال مشاهده تغییر وضعیتها را به صورت زیر به دست آورد:

$$f(n_{ij}) = \prod_{i=1}^m \left[g(n_{i.}) \frac{(n_{i.})!}{\prod_{j=1}^m (n_{ij})!} \prod_{j=1}^m p_{ij}^{n_{ij}} \right] \quad (1)$$

می‌توان لگاریتم تابع درست‌نمایی را به صورت زیر نوشت

$$L(p_{ij}) = c + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \log(p_{ij}) \quad (2)$$

که در آن c شامل تمام جملات مستقل از p_{ij} هاست. چون $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ ، لذا می‌توان (۲) را چنین نوشت:

$$L(p_{ij}) = c + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} n_{ij} \log(p_{ij}) + \sum_{i=1}^m n_{im} \log\left[1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij}\right] \quad (3)$$

فرض کنید r مقدار مشخص شده‌ای برای i باشد. برای هر مقدار $k = 1, 2, \dots, m-1$ ، برآورد درست‌نمایی ماکسیم $\hat{p}_{rk}$ از حل معادلات زیر به دست می‌آید

۱ مقدمه

مسائل استنباط آماری زنجیرهای مارکوف مانند برآورد و آزمون فرضها را محققانی نظیر بارتلت^۱، ویتل^۲، اندرسن^۳، گودمن^۴ و بیلینگسلی^۵ نه تنها به دلیل جالب بودن جنبه‌های نظری آنها بلکه به دلیل کاربردهای در زمینه‌های مختلف بررسی کرده‌اند. برای برآورد احتمالات تغییر وضعیت زنجیرهای مارکوف مرتبه اول و بالاتر، روشهایی که جدیدترین آنها مبتنی بر شیوه‌های برنامه‌ریزی خطی و درجه دوم برای حصول برآوردهای کمترین مربعات است ارائه شده‌اند (لی^۶ و همکاران (۱۹۷۰) را ببینید). در اینجا روش درست‌نمایی ماکسیم را برای برآورد احتمالات تغییر وضعیت با استفاده از مشاهدات به عمل آمده معرفی می‌کنیم. و براساس این برآورد چندین آزمون را نیز ارائه می‌دهیم.

۲ برآورد درست‌نمایی ماکسیم

یک زنجیر مارکوف همگن با تعدادی متناهی از وضعیتها مثلاً m وضعیت و با ماتریس احتمال تغییر وضعیت $P = (p_{ij})$ ، $i, j = 1, 2, \dots, m$ را در

* دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

1) Bartlett 2) Whittle 3) Anderson 4) Goodman 5) Billingsley 6) Lee

آماره

$$\sum_{j=1}^m \frac{n_{i.}(\hat{p}_{ij} - p_{ij}^*)^2}{p_{ij}^*}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

دارای توزیع مجانبی χ^2 با $m-1$ درجه آزادی است. البته باید p_{ij}^* هایی را که برابر صفرند خارج کرده و از درجه آزادی به اندازه تعداد آنها کم کنیم. با جمع بندی آماره بالا روی تمام مقادیر i می توان آزمونی برای تمام p_{ij} ها به دست آورد. در این حالت آماره

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{n_{i.}(\hat{p}_{ij} - p_{ij}^*)^2}{p_{ij}^*} \quad (12)$$

دارای توزیع مجانبی χ^2 با $m(m-1)$ درجه آزادی است (در اینجا نیز لازم است از تعداد درجات آزادی به اندازه تعداد p_{ij} هایی که به ازای $i, j = 1, 2, \dots, m$ برابر صفر هستند کم کنیم).

با استفاده از نسبت درستنمایی، آماره مناسب آزمون برای فرض H_0 عبارت است از

$$\lambda = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^m \left[\frac{\hat{p}_{ij}}{p_{ij}^*} \right]^{n_{ij}}$$

و تحت فرض صفر آماره

$$-2 \log \lambda = -2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \log \frac{n_{ij}}{n_{i.} p_{ij}^*} \quad (13)$$

دارای توزیع مجانبی χ^2 با $m(m-1)$ درجه آزادی است.

قبل از معرفی آزمون دوم اندرسن، مرتبه یک فرایند تصادفی را تعریف می کنیم. فرایندی را از مرتبه k می گویم هرگاه در توزیع شرطی X_n به شرط معلوم بودن $X_{n-1}, \dots, X_0$ فقط k مقدار آخر در این توزیع شرطی مؤثر باشند و بتوان از متغیرهای قبل از آن صرف نظر کرد. به زبان نمادها خواهیم داشت

$$P(X_n = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) =$$

$$P(X_n = y | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_{n-k} = x_{n-k})$$

(۲) برای آزمون مرتبه یک زنجیر مارکوف نیز می توان از برآوردهای درستنمایی ماکسیم استفاده کرد. آماره آزمون برای آزمون این فرض که زنجیر از مرتبه صفر است، یعنی به ازای تمام مقادیر i ، $p_{ij} = p_j$ در H_0 برابر این فرض که زنجیر از مرتبه یک است عبارت است از

$$\lambda = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^m \left[\frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_{ij}} \right]^{n_{ij}} \quad (14)$$

که در آن

$$\hat{p}_j = \frac{n_{.j}}{n_{..}}, \quad \hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$$

$$\frac{\partial L(p_{rk})}{\partial p_{rk}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad (4)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می شود

$$\frac{n_{rk}}{p_{rk}} - \frac{n_{rm}}{1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{rj}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad (5)$$

حال مقدار مشخصی برای k مثلاً s را در نظر بگیرد، داریم

$$\begin{aligned} \frac{n_{rs}}{p_{rs}} &= \frac{n_{rk}}{p_{rk}} \\ &= \frac{n_{rm}}{1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{rj}}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (6)$$

بنابراین

$$1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{rj} = \frac{n_{rm}}{n_{rs}} p_{rs} \quad (7)$$

و

$$p_{rk} = \frac{n_{rk}}{n_{rs}} p_{rs}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \dots, m-1 \quad (8)$$

اگر طرفین (۸-۲) را روی مقادیر $k = 1, 2, \dots, m-1$ جمع کرده و نتیجه را به (۷-۲) اضافه کنیم به دست می آوریم

$$1 = \frac{\sum_{k=1}^m n_{rk}}{n_{rs}} p_{rs}$$

و بنابراین برآورد $\hat{p}_{rs}$ را همان طور که به طور شهودی نیز انتظار داریم به صورت زیر نتیجه می گیریم

$$\hat{p}_{rs} = \frac{n_{rs}}{\sum_{k=1}^m n_{rk}} \quad (9)$$

اما r و s دو مقدار دلخواه برای i و j هستند. پس برای هر جفت دلخواه از مقادیر $i, j = 1, 2, \dots, m-1$ برآورد درستنمایی ماکسیم p_{ij} عبارت است از

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{k=1}^m n_{ik}} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} \quad (10)$$

۳ آزمون فرضها

دو آزمون زیر به وسیله اندرسن برای برآوردهای بالا ارائه شد:

(۱) می خواهیم این فرض را که مشاهدات، مقادیر محقق یک زنجیر مارکوف با ماتریس احتمال تغییر وضعیت P^* هستند آزمون کنیم. به عبارت دیگر فرض صفر عبارت است از

$$H_0: P = P^*$$

تحت فرض صفر، آماره

$$-2 \log \lambda_{r-1,r} = 2 \sum_i \dots \sum_l n_{ij\dots kl} \log \frac{(n_{ij\dots kl})(n_{\dots, \dots, \dots})}{(n_{(ij\dots k)}) (n_{\dots j\dots kl})}$$

که متغیری تصادفی با توزیع χ^2 و با $(m-1)^2$ درجه آزادی است. توجه کنید که درستی فرض H_k برای $k < r$ درستی فرض H_r را نتیجه می‌دهد. $\lambda_{k,r}$ را نسبت درستنمایی ماکسیم برای آزمون فرض H_k در مقابل فرض H_r (یعنی فرض اینکه زنجیر از مرتبه k است در برابر این فرض که زنجیر از مرتبه r است) می‌گیریم. پس به دست می‌آوریم

$$\lambda_{k,r} = \prod_{j=k+1}^r \lambda_{k,j} \quad (17)$$

و بنابراین

$$-2 \log \lambda_{k,r} = -2 \log \lambda_{k,k+1} - \dots - 2 \log \lambda_{r-1,r}, k < r \quad (18)$$

فرض کنید متغیرهای $-2 \log \lambda_{r-1,r}$ برای $r = 0, 1, 2, \dots$ به طور مجانبی مستقل باشند، پس با قبول فرض H_k نتیجه می‌شود که $-2 \log \lambda_{k,r}$ دارای توزیع χ^2 با تعداد درجات آزادی زیر است

$$\begin{cases} \nabla m^{r+1} - \nabla m^{k+1}, & k \geq 0 \\ \nabla m^{r+1}, & k = -1 \end{cases}$$

که در آن

$$\nabla m^r = m^r - m^{r-1} \quad r \geq 1$$

در استفاده از این شیوه به عنوان یک روش تصمیم‌گیری، چگونگی انتخاب تابع مناسب زیان مطرح می‌شود. توابع زیانی که آنها را در نظریه کلاسیک آزمون فرضها در نظر می‌گیرند احتمال قبول فرض نادرست یا احتمال رد فرض درست تعریف می‌کنند.

تانگ بر اساس روش میزان اطلاع آکائیک تابع زیان را به صورت زیر پیشنهاد می‌کند

$$R(k) = -2 \log \lambda_{k,m} - 2(\nabla S^{m+1} - \nabla S^{k+1})$$

که در آن m بالاترین مرتبه در نظر گرفته شده برای مدل و k مرتبه برآزنده شده است. تقریب خوبی برای مرتبه یک زنجیر مارکوف براساس برآورد مینیم اطلاع آکائیک مقداری از k است که $R(k)$ را نسبت به تمام مرتبه‌های در نظر گرفته شده مینیم کند. توجه کنید که $R(m) = 0$.

گابریل^۷ و نیومن^۸ وضعیت بارندگی و عدم بارندگی هوا را به صورت یک زنجیر مارکوف دو وضعیتی توصیف کرده‌اند. آنها هوای غیر بارانی را با صفرو هوای بارانی را با یک نشان داده‌اند. مثال زیر مدل مشابهی برای داده‌های هواشناسی است که مدهی^{۱۱} (۱۹۷۶) ارائه داده است.

$$-2 \log \lambda = 2 \sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{n_{ij} n_{..}}{n_{.j} n_{i.}}$$

دارای توزیع مجانبی χ^2 با $(m-1)^2$ درجه آزادی است. به همین نحو می‌توان برای آزمون این فرض که زنجیر از مرتبه اول است در برابر این فرض که زنجیر از مرتبه دوم است آزمون ارائه کرد.

البته این آزمونها ثابت نمی‌کنند که زنجیر مشاهده شده از مرتبه اول است، اما منطقی را برای استفاده از مدل مارکوف به دست می‌دهند. بر پایه برآوردهای درستنمایی ماکسیم آزمونهای مشابهی با استفاده از نسبت درستنمایی برای (الف) آزمون مانایی (یا همگن زمانی) یک زنجیر مارکوف یعنی آزمون $p_{ij}(t) = H_0$ و همچنین (ب) برای آزمون اینکه آیا چندین نمونه از زنجیر مارکوفی با مرتبه معین آمده‌اند ارائه شده است.

۴ تعیین مرتبه یک زنجیر مارکوف به وسیله

برآورد مینیم میزان اطلاع آکائیک

تونگ^۲ (۱۹۷۵) شیوه‌ای برای تعیین مرتبه یک زنجیر مارکوف به کمک میزان اطلاع آکائیک^۸ ارائه کرده است. میزان اطلاع آکائیک به صورت زیر تعریف می‌شود.

میزان اطلاع آکائیک =

$$(15) \quad (\text{تعداد پارامترهای مدل}) + 2 \log (\text{درستنمایی ماکسیم}) - 2 \log$$

این آماره اندازه‌ای برای انحراف مدل برآزنده شده از ساختار واقعی را به دست می‌دهد. با داشتن چندین مدل، این شیوه به قبول مدلی منجر می‌شود که میزان اطلاع آکائیک برای آن مینیم باشد و بنابراین آن را برآورد مینیم میزان اطلاع آکائیک می‌گویند. (این شیوه کوششی است جهت ایجاد موازنه میان برآزش بالا که نیاز به پارامترهای بیشتر دارد و برآزش پایین که موجب افزایش واریانس برای مانده می‌شود).

احتمالهای تغییر وضعیت زنجیر مرتبه r را با $p_{ij\dots kl}$ و $i, j = 1, 2, \dots, m$ نشان می‌دهیم که در آن m را کل تعداد وضعیتهای زنجیر فرض کرده‌ایم. در اینجا برآورد درستنمایی ماکسیم عبارت است از

$$p_{ij\dots kl} = \frac{n_{ij\dots kl}}{n_{ij\dots k}} \quad (16)$$

که در آن، $n_{ij\dots k} = \sum_l p_{ij\dots kl}$. فرض آزمون عبارت است از

$$H_{r-1}: p_{ij\dots kl} = p_{j\dots kl}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(یعنی زنجیر از مرتبه $r-1$ است در برابر این فرض که زنجیر از مرتبه r است). آماره آزمون عبارت است از

و می‌توان توزیع حدی را به صورت زیر به دست آورد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = (0,60377, 0,39623)$$

می‌خواهیم فرض

$$H_0: p_{ij} = p_j, \quad i, j = 1, 2$$

یعنی این فرض را که زنجیر از مرتبه صفر است در برابر این فرض که زنجیر از مرتبه یک است آزمون کنیم. داریم

$$\begin{aligned} -2 \log \lambda &= 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_{ij} \log \frac{N n_{ij}}{n_i \cdot n_j} \\ &= 2 \left\{ 175 \log \frac{367 \times 175}{223 \times 224} + 49 \log \frac{368 \times 49}{145 \times 224} \right\} \\ &\quad + 48 \log \frac{368 \times 48}{223 \times 144} + 96 \log \frac{368 \times 96}{145 \times 144} \\ &= 53,28 \end{aligned}$$

$P(\chi^2 \geq 53,28)$ با یک درجه آزادی بسیار کوچک است و بنابراین فرض صفر از مرتبه صفر بودن زنجیر را رد می‌کنیم. همچنین مایلیم فرض

$$H_0: P = P^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

را آزمون کنیم که در آن ماتریس احتمال تغییر وضعیت برای روزهای غیر بارانی و بارانی طی ماههای ژوئن تا اوت است. داریم

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{n_i(p_{ij} - p_{ij}^*)}{p_{ij}^*} = 105,07$$

$P(\chi^2 \geq 105,07)$ با دو درجه آزادی خیلی کوچک است، و بنابراین فرض H_0 را نیز رد می‌کنیم.

مثال داده‌های زیر مشاهدات به عمل آمده از وضعیت بارندگی و عدم بارندگی روزهای مختلف در ناحیه گاهاتای هندوستان است. وضعیت غیر بارانی را با صفر و وضعیت بارانی را با یک نشان داده‌ایم. مدت زمان بررسی از آخرین روز ماه فوریه (یعنی قبل از آغاز موسم بارندگی) تا آخرین روز ماه مه طی چهار سال متوالی از ۱۹۶۷ تا ۱۹۷۰ بوده است و N کل تعداد تغییر وضعیتها طی چهار سال، یا $4 \times 92 = 368$ روز است. تغییر وضعیتهای گزارش شده عبارت‌اند از

	۰	۱	جمع
۰	۱۷۵	۴۹	۲۲۴
۱	۴۸	۹۶	۱۴۴
جمع	۲۲۳	۱۴۵	۳۶۸

پس به موجب (۱۰) ماتریس تغییر وضعیت $P = (p_{ij})$ را به صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$P = \begin{pmatrix} \frac{175}{224} & \frac{49}{224} \\ \frac{48}{144} & \frac{96}{144} \end{pmatrix}$$

داریم

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0,61091 & 0,38909 \\ 0,59289 & 0,40711 \end{pmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0,60390 & 0,39610 \\ 0,60358 & 0,39642 \end{pmatrix}$$

$$P^{20} = \begin{pmatrix} 0,60377 & 0,39623 \\ 0,60377 & 0,39623 \end{pmatrix}$$

مراجع

- [1] T. W. Anderson and L. A. Goodman, "Statistical Inference about Markov chains," Ann. Math. Stat. 28, 89-110 (1957).
- [2] P. Billingsley, "Statistical methods in Markov chains". Ann. Math. Stat., 32, 12-40 (1961).
- [3] P. Billingsley, "Statistical Inference for Markov Processes", University of Chicago Press. Chicago (1961).
- [4] T. C. Lee, G. C. Judge and A. Zellner, Estimating the Parameters of the Markov Probability Model for Aggregate time series Data, North Holland, Amsterdam, (1970).
- [5] J. Medhi, "A Markov chain model for the Occurences of dry and wet days", Ind. J. Met. Hydrol. Geophys., 27, 431-435 (1976).
- [6] H. Tong, "Determination of the order of a Markov chain by Akaike's information criterion," J. Appl. Prob., 21, 488-497 (1975).
- [7] P. Whittle, "Some distributions and moment formulae for The Markov chains," J.R.S.S.B 17, 235-242 (1955).