تعیین تابع تجدید برخی از فرایندهای تجدید

شهرام منصوری[1]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۶/۳۰

چکیده:

بین تابع تجدید و تابع چگالی احتمال زمان‌های مشاهدهٔ وقوع رخدادهای متناظر هر فرایند تجدید یک تناظر یک به یک برقرار است. علاوه بر این کاربرد عملی فرایندهای تجدید نیاز به اطلاعات تابع تجدید داشته و این تابع نقش اساسی در مطالعهٔ رفتار فرایندهای تجدید دارد، به‌طوری که به‌وسیلهٔ آن می‌توان پیش‌بینی‌های لازم را بعمل آورد. در این مقاله تابع تجدید متناظر با دو توزیع مهم که در آن زمان‌های مشاهده دارای توزیع ارلانگ (n,λ) و همچنین هنگامی که این زمان‌ها دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0,b)$ باشند را با استفاده از تبدیل لاپلاس و قضایای مربوط به آن تعیین می‌کنیم. در خاتمه کاربردی از فرایند تجدید در فیزیک ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: تبدیل لاپلاس، فرایند تجدید، تابع تجدید.

۱ مقدمه

کاربرد عملی نظریهٔ تجدید عمدتاً نیازمند اطلاعات تابع تجدید $M(t)$ و رفتار آن است. تاکنون برای اکثر توزیع‌ها مانند ارلانگ، وایبول، توزیع نرمال بریده‌شده و غیره هیچ تابع صریحی برای $M(t)$ پیدا نشده است، ولی روش‌های تقریبی متعددی توسط آماردان‌ها مانند روش اسپلاین تعمیم‌یافته درجهٔ سه [۴]، روش تابع مولّد و بسط به سری توانی [۱] ارائه شده است. دو روش اخیر برای تقریب تابع تجدید از اهمیت بیشتری برخوردار است. [۹، ۱۰] روش سری توانی برای تقریب تابع تجدید با توزیع وایبول به‌کار رفته است. [۶] نیز روش‌هایی برای تقریب این تابع بیان کرده‌اند. اسپلاین تعمیم‌یافته درجه سه و روش سری توانی به‌سادگی قابل پیاده‌سازی نبوده و این روش برای مقادیر بزرگ t خطای بزرگی دارد. [۲] یک روش برای محاسبه تابع تجدید فرایند تجدید فازی پیشنهاد کرده است. [۷] به روش مشابهی $M(t)$ را بر اساس مشاهدات برای مقادیر کوچک t به دست آوردند، که این روش برای مقادیر بزرگ t نیز نتایج بهتری می‌دهد. شایان ذکر است که در این روش‌ها تابع تجدید به‌صورت زوج‌های مرتب برای برخی مقادیر پارامترهای توزیع، به روش‌های عددی و بدون استفاده از تبدیل لاپلاس محاسبه شده‌اند. در این مقاله در بخش ۲ مختصری در مورد تبدیل لاپلاس و خواص آن توضیح داده شده است و در بخش ۳ رابطهٔ بین تبدیل لاپلاس تابع تجدید و تبدیل لاپلاس تابع چگالی و تابع توزیع فرایندهای تجدید مشخص گردیده است. سپس تابع تجدید به‌طور دقیق و به‌صورت یک شکل صریح برای توزیع ارلانگ و توزیع یکنواخت با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست می‌آید. یک مثال کاربردی نیز در بخش ۴ بیان می‌شود. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۵ آمده است.

۲ تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ (در صورت وجود) برابر با انتگرال ناسره $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ تعریف شده است در صورتی‌که این انتگرال موجود باشد آن را با نماد $\mathcal{L}(f(t))$ نشان داده و آن را تبدیل لاپلاس $f(t)$ گویند. بدیهی است که این انتگرال تابعی از s

[1] هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

است. لذا

$$F(s)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

اگر این انتگرال همگرا باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ موجود است، و در صورتی که این انتگرال واگرا باشد، آنگاه گوییم تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود نیست. اگر تبدیل لاپلاس موجود باشد، آنگاه عدد حقیقی s_0 وجود دارد که تبدیل لاپلاس برای $s>s_0$ موجود بوده و برای $s\leq s_0$ موجود نیست. مجموعهٔ مقادیر $s>s_0$ را دامنه همگرایی تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ گویند. توابعی نیز وجود دارند که تبدیل لاپلاس آنها به‌ازای هیچ مقداری موجود نیست. اگر $\mathcal{L}\left(f(t)\right)=F(s)$ باشد، آنگاه $f(t)$ را تبدیل لاپلاس وارون $F(s)$ گویند و آن را با نماد $\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱.۲. *با کمی محاسبات می‌توان نشان داد*

$$\mathcal{L}\left(t^{p}\right)=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}};\quad p>-1,\quad s>0 \qquad (۱)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)=e^{at};\quad s>a \qquad (۲)$$

که در آن $\Gamma(p)$ تابع گاما است. برخی خواص تبدیل لاپلاس که در این مقاله مورد نیاز هستند، عبارت است از:

۱. تبدیل لاپلاس و تبدیل وارون آن عملگرهای خطی هستند. به‌عبارت دیگر داریم:

$$\mathcal{L}\left(C_1f_1(t)+C_2f_2(t)\right)=C_1\mathcal{L}\left(f_1(t)\right)+C_2\mathcal{L}\left(f_2(t)\right) \qquad (۳)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(C_1F_1(s)+C_2F_2(s)\right)=C_1\mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right)+C_2\mathcal{L}^{-1}\left(F_2(s)\right) \qquad (۴)$$

که در آن C_1 و C_2 اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۲.۲. *تابع پله‌ای، واحد یا تابع هویساد به‌صورت زیر*

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$$

تعریف می‌شود.

۲. اگر $\mathcal{L}\left(f(t)\right)=F(s)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}\left(u(t-a)f(t-a)\right)=e^{-as}F(s) \qquad (۵)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s))=u(t-a)f(t-a) \qquad (۶)$$

۳. اگر $\mathcal{L}\left(f(t)\right)=F(s)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))=F(s-a) \qquad (۷)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s-a)\right)=e^{at}f(t) \qquad (۸)$$

۴. اگر $\mathcal{L}\left(f(t)\right)=F(s)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right)=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad (۹)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(\frac{s}{a})\right)=af(at) \qquad (۱۰)$$

تعریف ۳.۲. *پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ با نماد $f(t)*g(t)$ نشان می‌دهند و آن را به‌صورت $f(t)*g(t)=\int_{0}^{t}f(u)g(t-u)du$ تعریف می‌کنند (به [۳] مراجعه کنید).*

۵. اگر $\mathcal{L}\left(f(t)\right)=F(s)$ و $\mathcal{L}\left(g(t)\right)=G(s)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)G(s) \qquad (۱۱)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right) \qquad (۱۲)$$

۶. تساوی زیر برقرار است:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)}e^{\alpha_k t} \qquad (۱۳)$$

که در آن $Q(s)=(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)$ بوده و $\alpha_k;\quad k=1,\cdots,n$ اعداد متمایز هستند و $P(s)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n است.

۳ فرایند تجدید و تابع تجدید

اگر $T_1,T_2,\ldots$ زمان‌های مشاهدهٔ رخداد یک پیشامد دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی

$f(t);\ t>۰$ و تابع توزیع $F(t)$ بوده و $N(t)$ تعداد رخدادها یا تجدیدها در بازهٔ زمانی $[۰,t)$ باشند، آن‌گاه هر یک از فرایندهای $\{N(t)\}_{t>۰}$ یا $\{T_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را فرایند تجدید می‌نامند. تابع تجدید در مطالعهٔ یک فرایند تجدید اهمیت زیادی داشته و به‌صورت زیر

$$M(t)=E\left(N(t)\right) \quad (۱۴)$$

تعریف شده است. ثابت شده است که این تابع جواب معادله انتگرالی زیر

$$M(t)=F(t)+\int_{۰}^{t}M(t-x)dF(x) \quad (۱۵)$$

است، که به معادلهٔ تجدید معروف است [۵].

قضیهٔ ۱.۳. *با مفروضات ذکرشده اگر $f^*(s)$ ، $F^*(s)$ ، $M^*(s)$ و $m^*(s)$ تبدیل لاپلاس به ترتیب توابع $f(t)$ ، $F(t)$ ، $M(t)$ و $m(t)=M'(t)$ باشند، آن‌گاه داریم:*

$$M^*(s)=\frac{F^*(s)}{۱-f^*(s)} \quad (۱۶)$$

$$m^*(s)=\frac{f^*(s)}{۱-f^*(s)} \quad (۱۷)$$

برهان: *برای اثبات رابطهٔ (۱۶) با استفاده از رابطهٔ (۱۵) داریم:*

$$M(t)=F(t)+\int_{۰}^{t}M(t-x)f(x)dx \quad (۱۸)$$

با استفاده از تعریف پیچش دو تابع داریم:

$$M(t)=F(t)+M(t)*f(t)$$

با توجه به خاصیت خطی بودن عملگر لاپلاس خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left(M(t)\right)=\mathcal{L}\left(F(t)\right)+\mathcal{L}\left(M(t)*f(t)\right)$$

از رابطهٔ (۱۱) عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}\left(M(t)\right)=\mathcal{L}\left(F(t)\right)+\mathcal{L}\left(M(t)\right)\mathcal{L}\left(f(t)\right)$$

لذا

$$M^*(s)=\frac{F^*(s)}{۱-f^*(s)}$$

برای اثبات رابطهٔ (۱۷) با استفاده از رابطهٔ زیر

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{y_۱(x)}^{y_۲(x)}f(x,y)dy=&\int_{y_۱(x)}^{y_۲(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy\\&+f(x,y_۲(x))\frac{dy_۲(x)}{dx}\\&-f(x,y_۲(x))\frac{dy_۱(x)}{dx}\end{aligned}$$

از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}m(t)=&f(t)+\int_{۰}^{t}\frac{\partial M(t-x)}{\partial t}f(x)dx\\&+M(t-t)f(t)\frac{dt}{dt}\\&-M(t-۰)f(t)\frac{d\left(۰\right)}{dt}\end{aligned}$$

چون $M\left(۰\right)=E\left(N(۰)\right)=۰$ است، لذا داریم:

$$m(t)=f(t)+\int_{۰}^{t}m(t-x)f(x)dx$$

در نتیجه

$$m(t)=f(t)+m(t)*f(t) \quad (۱۹)$$

حال از طرفین رابطهٔ (۱۹) تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود، با استفاده از خاصیت خطی بودن عملگر تبدیل لاپلاس و رابطهٔ (۱۱) داریم:

$$m^*(s)=f^*(s)+m^*(s)f^*(s)$$

که از آن رابطهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود.

۱.۳ تعیین تابع تجدید فرایند تجدید با تابع چگالی ارلانگ با پارامترهای (n,λ)

فرض کنید $\{T_j\}_{j=۱}^{n}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع ارلانگ با پارامترهای (n,λ) که n عدد طبیعی، $\lambda>۰$ و تابع چگالی احتمال زیر

$$f(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(n\right)}t^{n-۱}e^{-\lambda t};\ \ t>۰$$

باشند. به سادگی می‌توان نشان داد که $f^*(s)=\frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n}$، که از رابطهٔ (۱۷) داریم:

$$m^*(s)=\frac{\frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n}}{1-\frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n}}=\frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n-\lambda^n} \qquad (۲۰)$$

برای محاسبه تبدیل وارون لاپلاس تابع در رابطهٔ (۲۰) ابتدا عبارت زیر

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n-1}\right);\ n=2,3,\ldots$$

محاسبه می‌شود. برای این منظور ریشه‌های معادله $Q(s)=s^n-1=0$ به دست آورده می‌شود. (برای اطلاعات بیشتر از گرفتن ریشه‌های n-ام یک عدد مختلط [۸] را ببینید)

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k=0,1,\ldots,n-1$$

از طرفی $Q'(s)=ns^{n-1}$ در نتیجه داریم:

$$Q'(\alpha_k)=n(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})^{n-1}=ne^{\frac{-2k\pi i}{n}}$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n-1}\right)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}e^{\frac{2k\pi i}{n}}e^{t(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}e^{t\cos\frac{2k\pi}{n}}e^{i(\frac{2k\pi}{n}+t\sin\frac{2k\pi}{n})}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{t\cos\frac{2k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}>+t\sin\frac{2k\pi}{n})\\&+\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{t\cos\frac{2k\pi}{n}}\sin(\frac{2k\pi}{n}+t\sin\frac{2k\pi}{n})\end{aligned}$$

در مجموع دوم جمله با اندیس $k=0$ برابر صفر بوده و برای هر k جملات اندیس‌های k و $n-k$ قرینه هستند، لذا

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n-1}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{t\cos\frac{2k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+t\sin\frac{2k\pi}{n})$$

با استفاده از رابطه‌های (۸) و (۱۰) داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda^n}{s^n-\lambda^n}\right)=\frac{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}e^{\lambda t\cos\frac{2k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda t\sin\frac{2k\pi}{n})}{n}$$

$$\begin{aligned}m(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n-\lambda^n}\right)\\&=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\lambda t\cos\frac{2k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda t\sin\frac{2k\pi}{n})\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}M(t)&=\int_0^t m(x)dx\\&=\frac{\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t e^{-\lambda x}e^{\lambda x\cos\frac{2k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})dx\\&=\frac{\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t e^{-2\lambda x\sin^2\frac{k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})dx\\&=\frac{\lambda}{n}(t+\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^t e^{-2\lambda x\sin^2\frac{k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})dx)\end{aligned}$$

به‌ازای هر $n\geq 2$؛ $k=1,\ldots,n-1$ قرار می‌دهیم:

$$I_k=\int_0^t e^{-2\lambda x\sin^2\frac{k\pi}{n}}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})dx$$

بنا بر این خواهیم داشت:

$$M(t)=\frac{\lambda}{n}\left(t+\sum_{k=1}^{n-1}I_k\right) \qquad (۲۱)$$

حال به روش جز به جز می‌توان نشان داد:

$$\int e^{ax}\cos(bx+c)dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin(bx+c)+a\cos(bx+c)\right)$$

بنا بر این به‌ازای $n\geq 2$؛ $k=1,\ldots,n-1$ داریم:

$$\begin{aligned}I_k=&\frac{e^{-2\lambda x\sin^2\frac{k\pi}{n}}}{4\lambda^2\sin^4\frac{k\pi}{n}+(\lambda\times 2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n})^2}\\&\times\{\lambda\sin\frac{2k\pi}{n}\sin(\frac{2k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})\\&-2\lambda x\sin^2\frac{k\pi}{n}\cos(\frac{2k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})\}\Big|_0^t\\=&\frac{e^{-2\lambda x\sin^2\frac{k\pi}{n}}\sin(\frac{k\pi}{n}+\lambda x\sin\frac{2k\pi}{n})}{2\lambda\sin\frac{k\pi}{n}}\Big|_0^t\\=&\frac{e^{-2\lambda t\sin^2\frac{k\pi}{n}}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\lambda t\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}{2\lambda\sin\frac{k\pi}{n}}-\frac{1}{2\lambda}\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با قرار دادن (۲۲) در (۲۱) داریم

$$\begin{aligned}M(t)=&\frac{1}{n}\{\lambda t-\frac{1}{2}(n-1)\\&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-2\lambda t\sin^2\frac{k\pi}{n}}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\lambda t\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}}\}\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

۲.۳ تعیین تابع تجدید با تابع چگالی احتمال یکنواخت در بازه $(0,b)$

فرض کنید که $f(t)$ و $F(t)$ به‌ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع $U(0,b)$ باشند، به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$f^*(t)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\frac{1-e^{-bs}}{bs}$$
$$F^*(s)=\mathcal{L}\left(F(t)\right)=\frac{1-e^{-bs}}{bs^2}$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۶) داریم

$$M^*(s)=\frac{F^*(s)}{1-f^*(s)}=\frac{\frac{1-e^{-bs}}{bs^2}}{1-\frac{1-e^{-bs}}{bs}}=\frac{1-e^{-bs}}{s(bs-1+e^{-bs})} \qquad (24)$$

با توجه به این‌که عبارت زیر برقرار است:

$$\frac{1-e^{-bs}}{s(bs-1+e^{-bs})}=\frac{b}{bs-1+e^{-bs}}-\frac{1}{s} \qquad (25)$$

و همچنین

$$\frac{b}{bs-1+e^{-bs}}=\frac{1}{s-\frac{1}{b}+\frac{e^{-bs}}{b}}$$
$$=\frac{1}{s-\frac{1}{b}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{b}\frac{e^{-bs}}{s-\frac{1}{b}}}. \qquad (26)$$

برای $s>\frac{1}{b}$ تابع $h(s)=\frac{e^{-bs}}{b\left(s-\frac{1}{b}\right)}$ کاهشی و حد آن وقتی که $s\to\infty$ صفر است، $s_0>0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $s>s_0$ داریم:

$$0<\frac{e^{-bs}}{b\left(s-\frac{1}{b}\right)}<1$$

حال با استفاده از رابطه‌های (۲۵) و (۲۶) و سری زیر

$$\frac{1}{1+\varepsilon}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^j\varepsilon^j;\ \ |\varepsilon|<1$$

می‌توان رابطهٔ (۲۴) را به‌صورت زیر نوشت:

$$M^*(s)=\frac{1}{s-\frac{1}{b}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{b^j}\frac{e^{-jbs}}{\left(s-\frac{1}{b}\right)^j}-\frac{1}{s}$$

بنا بر این داریم:

$$M(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{b^j}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-jbs}}{\left(s-\frac{1}{b}\right)^{j+1}}\right)-1 \qquad (27)$$

از رابطهٔ (۱) داریم $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{j+1}}\right)=\frac{t^j}{j!}$ و از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-\frac{1}{b}\right)^{j+1}}\right)=\frac{t^je^{\frac{t}{b}}}{j!}$$

و طبق رابطهٔ (۶) داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-jbs}}{\left(s-\frac{1}{b}\right)^{j+1}}\right)=\frac{(t-jb)^je^{\frac{t-jb}{b}}}{j!}u\left(t-jb\right)$$

بنا بر این خواهیم داشت:

$$M(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j!}\left(\frac{t}{b}-j\right)^je^{\frac{t}{b}-j}u\left(t-jb\right)-1$$

که ضابطه $M(t)$ به‌صورت قطعه به قطعه به‌ازای هر $n=0,1,2,\ldots$ در بازه‌های $nb<t\leq(n+1)\,b$ به‌صورت زیر است:

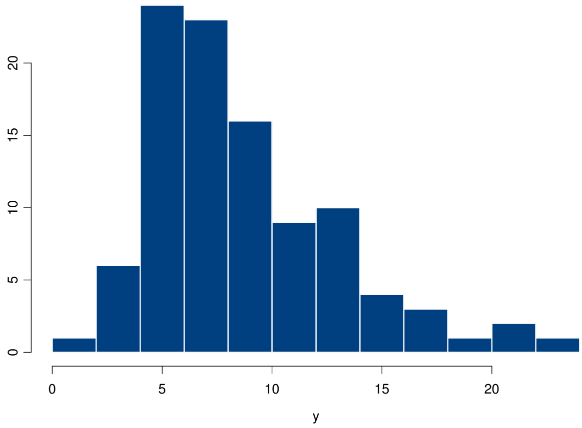
$$M(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\left(\frac{t}{b}-j\right)^je^{\frac{t}{b}-j}-1$$

۴ مثال کاربردی

داده‌های زیر

۸٫۶۰ − ۴٫۶۶ − ۵٫۴۵ − ۷٫۶۳ − ۶٫۶۷ − ۸٫۵۶ − ۴٫۶۸
۴٫۵۴ − ۴٫۵۶ − ۷٫۷۳ − ۶٫۹۶ − ۶٫۴۹ − ۶٫۵۹ − ۹٫۴۰
۶٫۸۳ − ۳٫۴۲ − ۴٫۷۱ − ۴٫۸۵ − ۸٫۹۹ − ۵٫۶۵ − ۶٫۰۱
۵٫۵۰ − ۵٫۶۸ − ۸٫۰۹ − ۵٫۳۸ − ۵٫۶۸ − ۶٫۰۱ − ۷٫۴۲
۱٫۳۶ − ۸٫۰۳ − ۸٫۱۸ − ۴٫۹۵ − ۷٫۹۸ − ۵٫۵۲ − ۳٫۹۲
۹٫۹۳ − ۹٫۲۷ − ۶٫۴۱ − ۹٫۹۵ − ۵٫۹۲ − ۹٫۱۴ − ۵٫۹۹
۴٫۵۰ − ۶٫۷۲ − ۵٫۴۹ − ۹٫۳۶ − ۸٫۴۰ − ۵٫۱۳ − ۴٫۳۱
۶٫۶۵ − ۵٫۲۹ − ۷٫۷۷ − ۴٫۶۰ − ۲٫۴۰ − ۲٫۶۱ − ۷٫۷۵
۷٫۵۵ − ۹٫۰۹ − ۸٫۶۰ − ۷٫۵۷ − ۲٫۲۰ − ۶٫۶۵ − ۲٫۵۲
۷٫۶۳ − ۷٫۳۵ − ۴٫۳۲ − ۷٫۷۲ − ۶٫۵۳ − ۴٫۴۵ − ۸٫۸۶
۱۶٫۵۲ − ۱۳٫۴۵ − ۱۵٫۸۹ − ۲۱٫۸۶ − ۱۲٫۴۸ − ۱۲٫۳۰
۱۳٫۷۷ − ۱۲٫۰۱ − ۱۶٫۳۲ − ۲۳٫۰۹ − ۱۲٫۱۴ − ۱۰٫۵۳
۱۵٫۲۵ − ۱۰٫۵۶ − ۱۱٫۸۲ − ۱۲٫۱۱ − ۱۰٫۲۰ − ۱۵٫۳۶
۱۵٫۱۹ − ۱۰٫۵۰ − ۲۰٫۴۵ − ۱۹٫۲۱ − ۱۲٫۰۹ − ۱۲٫۳۵
۱۱٫۴۶ − ۱۰٫۵۹ − ۱۰٫۴۶ − ۱۰٫۶۱ − ۱۶٫۳۰ − ۱۲٫۰۱

ارقامی هستند که یک کنتور کایگر زمان‌های بین خروج ذرات متوالی ساطع شده از یک ماده رادیواکتیو (T) برای صد ذره بر حسب دقیقه در یک آزمایشگاه فیزیک به ثبت رسانده است. بافت‌نگاشت داده‌ها در شکل ۱ دلالت بر این دارد که توزیع داده‌ها ارلانگ است.



شکل۱. بافت‌نگاشت داده‌ها

حال برای تأیید یا رد فرضیهٔ زیر

$$H_0 : T \sim Erlang(n, \lambda)$$

در سطح ۰/۰۵ ، ابتدا برآوردگرهای گشتاورهای پارامترهای این توزیع از رابطه‌های زیر

$$\hat{\alpha} = \frac{n\bar{X}^2}{(n-1)S^2}, \quad \hat{\lambda} = \frac{n\bar{X}}{(n-1)S^2}$$

محاسبه می‌شود. با توجه به این‌که $\bar{X} = 8.63$ و $S^2 = 18.49$ است، داریم:

$$\hat{n} = 4.06 \approx 4, \quad \hat{\lambda} = 0.47 \approx \frac{1}{2}$$

از آن‌جا که $\chi^2_c = 7.33$ از $\chi^2_{0.05}(4) = 9.48$ کمتر است، لذا فرضیهٔ $H_0 : T \sim Erlang(4, \frac{1}{2})$ رد نمی‌شود. با استفاده از رابطهٔ (۲۳) داریم

$$\begin{aligned} M(t) =& \frac{1}{4}\{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[\frac{e^{-t\sin^2\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}t\sin\frac{\pi}{2})}{\sin\frac{\pi}{4}} \\ &+ \frac{e^{-t\sin^2\frac{2\pi}{4}}\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}t\sin\pi)}{\sin\frac{\pi}{2}} \\ &+ \frac{e^{-t\sin^2\frac{3\pi}{4}}\sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}t\sin\frac{3\pi}{2})}{\sin\frac{3\pi}{4}}]\} \end{aligned}$$

و در نتیجه $M(t)$ برابر است با:

$$M(t) = \frac{1}{8}\{t - 3 + e^{-t} + 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}t)\}$$

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تابع تجدید فرایندهای تجدید با توزیع‌های ارلانگ و یکنواخت که تا کنون به روش عددی محاسبه شده بودند، به‌صورت یک شکل صریح تعیین شد. تعیین فرم تحلیلی تابع تجدید برای سایر توابع چگالی احتمال با تکیه‌گاه مثبت مانند توزیع نرمال بریده‌شده می‌تواند برای ادامه تحقیقات بعدی مفید باشد. همچنین به دست آوردن تابع تجدید توزیع‌های آمیخته شامل ترکیب خطی تابع چگالی ارلانگ یا یکنواخت با پارامتری مختلف می‌تواند موضوع مناسبی برای ادامهٔ تحقیق باشد.

مراجع

[1] Giblin, M. T. (1984). Derivation of renewal functions using discretisation. *In 8th Advances in Reliability Techniques Symposium*.

[2] Kao, E. P. (1988). Computing the phase-type renewal and related functions. *Technometrics*, **30(1)**, 87-93.

[3] Kreyszig, E., Kreyszig, H., and Normintion, N. (2011). *Advanced Engineering Mathematices* Tenth Edition, JOHN WILEY and SONS, INC.

[4] McConalogue, D. J., and Pacheco, A. (1981). Numerical treatment of convolution integrals involving distributions with densities having singularities at the origin. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **10(3)**, 265-280.

[5] Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models*. Academic press.

[6] Smeitink, E., and Dekker, R. (1981). *Algorithms for the Renewal Function*, Tech. Report AMER. 88.016, Koninklijke Shell-Laboratorium, Amsterdam, The NETHERLANDS.

[7] Smeitink, E., and Dekker, R. (1990). A simple approximation to the renewal function (reliability theory). *IEEE Transactions on Reliability*, **39**(**1**), 71-75.

[8] Spiegel, M. R., Lipschutz, S., Schiller, J. J., and Spellman, D. (2015). *Complex Variables: With an Introduction to Conformal Mapping and its Applications*. McGraw-Hill.

[9] Weiss, G. H. (1981). Laguerre expansions for successive generations of a renewal process, *Joural of Research Nat'l Bureau of Standards*, **B66**, 165-168.

[10] White, J. S. (1964). *Weibull Renewal Analysis* (No. 640624). SAE Technical Paper.