

مقایسه روش‌های برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای در توزیع رایلی وارون

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۳/۱۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۷/۱۰

چکیده:

در این مقاله، قابلیت اعتماد در مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، وقتی که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع‌های رایلی وارون با پارامترهای متفاوت α و β هستند، به روش‌های ماکسیم درست‌نمایی، بیزی و بیزی تجربی برآورد می‌شود. سپس به کمک شبیه‌سازی مونته‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، این روش‌های برآورد با هم مقایسه می‌شوند. **واژه‌های کلیدی:** مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، قابلیت اعتماد، برآورد ماکسیم درست‌نمایی، برآورد بیزی، برآورد بیزی تجربی، توزیع رایلی معکوس.

۱ مقدمه

باشند به‌طوری که برای یک سیستم، X بیان‌کننده مقاومت و Y بیان‌کننده تنش وارد بر آن باشد، $R = P(X > Y)$ که پارامتر قابلیت اعتماد سیستم تک‌مؤلفه‌ای نام دارد، میزان کارایی سیستم را نشان می‌دهد. در این مقاله برآورد قابلیت اعتماد^۲ در مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای^۳ بر اساس توزیع رایلی وارون به دست آورده می‌شود. بنا بر این یک سیستم با k مؤلفه را در نظر بگیرید که این مؤلفه‌ها، به‌ترتیب مقاومت‌های تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_k$ دارند و متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع $IR(\alpha)$ هستند که هر کدام از این k مؤلفه، تنش تصادفی Y با توزیع $IR(\beta)$ دارد. با توجه به [۴]، این سیستم تا زمانی فعال است که حد اقل s مؤلفه از k مؤلفه، مقاومتش بر تنش آن غلبه کند. بنا بر این اگر $X_1, X_2, \dots, X_k$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم و $G(y)$ تابع توزیع پیوسته Y و $F(x)$ تابع توزیع پیوسته مشترک $X_1, X_2, \dots, X_k$ باشند، آنگاه با توجه به [۴]، قابلیت اعتماد در سیستم چندمؤلفه‌ای به‌صورت

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع رایلی وارون [۲۱] به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$$f(x; \alpha) = \frac{2\alpha}{x^3} e^{-\frac{\alpha}{x^2}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \quad (1)$$

$$F(x; \alpha) = e^{-\frac{\alpha}{x^2}}, \quad x > 0, \alpha > 0. \quad (2)$$

در این مقاله، توزیع با تابع چگالی احتمال در رابطه (۱) و تابع توزیع تجمعی در رابطه (۲) با نماد $IR(\alpha)$ نشان داده می‌شود. توزیع رایلی وارون برای مدل‌بندی داده‌های تنش-مقاومت و داده‌های مربوط به طول عمر بسیار مؤثر است. مدل‌های تنش-مقاومت به بررسی مقاومت مؤلفه مورد نظر در برابر فشار وارد بر آن می‌پردازد که میزان این فشار یک متغیر تصادفی است. این مدل‌ها به‌طور گسترده در بسیاری از شاخه‌های علوم مانند روانشناسی، داروسازی، پزشکی و مهندسی کاربرد دارند. چنین سیستمی تا وقتی فعال است که مقاومت سیستم از تنش وارد بر آن بیشتر باشد. بنا بر این اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل

^۱ هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

^۲ Reliability estimation

^۳ Multicomponent stress-strength model

زیر تعریف می‌شود:

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F(y))^i (F(y))^{k-i} dG(y) \quad (3)$$

نویسندگان زیادی به برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت تک مؤلفه‌ای برای توزیع‌های مختلف پرداخته‌اند. بعضی از آنها عبارت‌اند از: [۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۱۵]. برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای که توسط [۴، ۱۲] مورد بررسی قرار گرفت، در سال‌های اخیر نیز مورد توجه بعضی از نویسندگان قرار گرفت. مانند [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰] که به برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای به‌ترتیب برای توزیع‌های لگ-لوژستیک، نمایی تعمیم‌یافته، ریلی و وایبول توانی پرداخته‌اند. در بخش دوم این مقاله، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد بیزی و برآورد بیزی تجربی^۴ $R_{s,k}$ به دست آورده می‌شود. در بخش سوم به روش مونته‌کارلو، شبیه‌سازی انجام می‌شود. همچنین در این بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی، برای تشریح روش‌های برآورد استفاده می‌گردد. بخش چهارم نیز به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲ روش‌های برآورد $R_{s,k}$

فرض کنید X (مقاومت) و Y (تنش) متغیرهای تصادفی مستقل و به‌ترتیب دارای توزیع‌های $IR(\alpha)$ و $IR(\beta)$ هستند. با توجه به رابطه (۳)، قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای برای توزیع ریلی وارون به‌صورت زیر است:

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{y^\beta}}\right)^i \left(e^{-\frac{\alpha}{y^\beta}}\right)^{k-i} \left(\frac{\beta}{y^{\beta+1}} e^{-\frac{\alpha}{y^\beta}}\right) dy$$

به‌کمک بسط دوجمله‌ای داریم:

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j \int_0^{\infty} \left(\frac{\beta}{y^{\beta+1}}\right) e^{-\frac{\beta+(k-i+j)\alpha}{y^\beta}} dy$$

$$= \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j \beta}{\beta + (k-i+j)\alpha} \quad (4)$$

۱.۲ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$

فرض کنید X دارای توزیع $IR(\alpha)$ و Y دارای توزیع $IR(\beta)$ و $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ و $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از X و Y هستند. بنا بر این لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر است:

$$L(\alpha, \beta) = n \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^n \log x_i + \sum_{j=1}^m \log y_j \right) + m \log(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^\beta} - \beta \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j^\beta}$$

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی α و β که به‌ترتیب با نمادهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\alpha} = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^\beta} \right)^{-1}, \quad \hat{\beta} = m \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j^\beta} \right)^{-1}$$

بعد از به دست آوردن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$ که با نماد $\hat{R}_{s,k}^{ML}$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$\hat{R}_{s,k}^{ML} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j \hat{\beta}}{\hat{\beta} + (k-i+j)\hat{\alpha}} = f(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

[۱۳] نشان داد $R_{s,k}$ یعنی $\hat{R}_{s,k}$ ، تابعی از دو آماره مستقل از هم مانند $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ باشد، واریانس مجانبی آن به‌صورت زیر

$$V(\hat{R}_{s,k}) = V(\hat{\alpha}) \left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \right)^2 + V(\hat{\beta}) \left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \right)^2 \quad (5)$$

به دست می‌آید، که می‌تواند در محاسبه فاصله اطمینان مجانبی $R_{s,k}$ نقش مهمی داشته باشد. برای مثال به‌ازای $(s, k) = (1, 2), (2, 3)$ ، به‌کمک رابطه (۴) داریم:

$$R_{1,2} = \frac{2\alpha\beta}{(\beta+\alpha)(\beta+3\alpha)}, \quad R_{2,3} = \frac{6\alpha^2\beta}{(\beta+\alpha)(\beta+3\alpha)(\beta+4\alpha)}$$

اکنون می‌توان $\frac{\partial \hat{R}_{s,k}}{\partial \beta}$ و $\frac{\partial \hat{R}_{s,k}}{\partial \alpha}$ را به‌ازای $(s, k) = (1, 2), (2, 3)$ و با توجه به واریانس‌های مجانبی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ که به‌صورت زیر

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{n}, \quad V(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2}{m}$$

هستند، واریانس مجانبی $R_{1,2}$ و $R_{2,3}$ را به‌کمک رابطه (۵) به دست آورد.

^۴ Empirical bayesian

۲.۲ برآورد بیزی

و

$$B_1 = \frac{(b_1 + t)^{n+a_1} (b_2 + u)^{m+a_2}}{\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2)}$$

هستند. بنا بر این

$$R_{s,k}^B(t, u) = B \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \left\{ \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j}{(k-i+j+1)^{n+a_1}} \right. \\ \left. \times \int_0^1 \frac{w^{m+a_2-1} (1-w)^{n+a_1-1}}{A^{n+m+a_1+a_2}} dw \right\} \quad (۸)$$

که در آن

$$B = \frac{(b_1 + t)^{n+a_1} (b_2 + u)^{m+a_2} \Gamma(n+m+a_1+a_2)}{\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2)}$$

است. همچنین انتگرال در $R_{s,k}^B(t, u)$ دارای شکل صریحی نیست و باید به کمک روش‌های عددی مانند روش شبیه‌سازی مونت کارلو حل شود.

۳.۲ برآورد بیزی تجربی

در این بخش فرض می‌شود، ابر پارامترهای a_1 و a_2 معلوم و b_1 و b_2 مجهول هستند. به کمک تابع درست‌نمایی مشاهدات $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و رابطه (۶)، تابع چگالی شرطی $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ به شرط b_1 و b_2 به صورت زیر

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y} | b_1, b_2) = \frac{2^{n+m} b_1^{a_1} b_2^{a_2} \Gamma(n+a_1) \Gamma(m+a_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) (b_1+t)^{n+a_1} (b_2+u)^{m+a_2}} \\ \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{y_j} \right) \quad (۹)$$

به دست می‌آید. به کمک لگاریتم تابع چگالی داده شده در رابطه (۹)، برآورد ماکسیم درست‌نمایی b_1 و b_2 یعنی $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_2$ به صورت زیر

$$\hat{b}_1 = \frac{a_1}{n} t, \quad \hat{b}_2 = \frac{a_2}{m} u$$

به دست می‌آیند. با جایگذاری $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_2$ در رابطه (۸)، برآورد بیزی تجربی $R_{s,k}$ که با نماد $R_{s,k}^{EB}$ نشان داده می‌شود، تحت تابع زیان توان دوم خطاها به صورت

$$R_{s,k}^{EB}(t, u) = \hat{B} \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \left\{ \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j \Gamma(n+m+a_1+a_2)}{(k-i+j)^{n+a_1}} \right. \\ \left. \times \int_0^1 \frac{w^{m+a_2-1} (1-w)^{n+a_1-1}}{(\hat{A})^{n+m+a_1+a_2}} dw \right\}$$

در این بخش برآورد بیزی $R_{s,k}$ تحت تابع زیان توان دوم خطاها یعنی $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ به دست می‌آید. فرض کنید $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ و $X_1, X_2, \dots, X_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از هم و به ترتیب دارای توزیع‌های $IR(\beta)$ و $IR(\alpha)$ هستند. با فرض آن‌که پارامترهای α و β مستقل از هم و دارای توزیع‌های پیشین به ترتیب زیر

$$\pi(\alpha) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha} \quad (۶)$$

$$\pi(\beta) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \beta^{a_2-1} e^{-b_2 \beta}$$

هستند، توزیع پسین توأم α و β به صورت زیر

$$\pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(b_1 + t)^{n+a_1} (b_2 + u)^{m+a_2}}{\Gamma(n+a_1) \Gamma(m+a_2)} \\ \times \alpha^{n+a_1-1} \beta^{m+a_2-1} e^{-(b_1+t)\alpha - (b_2+u)\beta} \quad (۷)$$

به دست می‌آیند، که در آن

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$t = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}, \quad u = \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j}$$

هستند. بنا بر این با توجه به رابطه‌های (۴) و (۷) برآورد بیزی $R_{s,k}$ که با نماد $R_{s,k}^B(t, u)$ نشان داده می‌شود، تحت تابع زیان توان دوم خطاها به صورت زیر

$$R_{s,k}^B(t, u) = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \left\{ \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta \pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\beta + (k-i+j)\alpha} d\alpha d\beta \right\}$$

به دست می‌آید. به کمک تغییر متغیرهای $w = \frac{\beta}{\beta + (k-i+j)\alpha}$ و $v = \beta + (k-i+j)\alpha$ داریم:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta + (k-i+j)\alpha} \pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\alpha d\beta \\ = \frac{B_1 \Gamma(n+m+a_1+a_2)}{(k-i+j)^{n+a_1}} \int_0^1 \frac{w^{m+a_2-1} (1-w)^{n+a_1-1}}{A^{n+m+a_1+a_2}} dw$$

که در آن

$$A = w(u + b_2) + \frac{(t + b_1)(1-w)}{k-i+j}$$

۲. در حالت $(s, k) = (1, 2)$ ، برای β ثابت، برای $\alpha \geq 1/5$ برآورد بیزی تجربی کارتر از برآورد بیزی و برای α ثابت، برای $\beta \geq 2/5$ برآورد بیزی از برآورد بیزی تجربی کارتر است. اما در حالت $(s, k) = (2, 3)$ همواره برآورد بیزی از برآورد بیزی تجربی کارتر است.

به دست می‌آید، که $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به صورت زیر

$$\hat{A} = w[u(1 + \frac{a_2}{m})] + \frac{(1-w)[t(1 + \frac{a_1}{n})]}{k-i+j}$$

$$\hat{B} = \frac{[t(1 + \frac{a_1}{n})]^{n+a_1}[u(1 + \frac{a_2}{m})]^{m+a_2}\Gamma(n+m+a_1+a_2)}{\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2)}$$

هستند.

۲.۳ داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی برای تحلیل روش‌های برآورد $R_{s,k}$ استفاده می‌شود. این مجموعه داده‌ها که از [۵] گرفته شده است، مربوط به مدت زمان خرابی سیستم تهویه (بر حسب ساعت) مربوط به دو نوع هواپیمای مختلف است، که در [۱۹] نشان دادند این مجموعه داده‌ها به خوبی به توزیع رایلی وارون برازش می‌شوند. این مجموعه داده‌ها در جدول ۳ آمده‌اند.

به کمک این مجموعه داده‌ها برآورد ماکسیم درست‌نمایی، برآورد بیزی برای $a_1 = a_2 = 1/5, b_1 = 2, b_2 = 3$ و برآورد بیزی تجربی برای $a_1 = a_2 = 1/5$ در حالت $(s, k) = (1, 2)$ به ترتیب برابر با $0.2279, 0.1204$ و 0.1008 و در حالت $(s, k) = (2, 3)$ به ترتیب برابر با $0.2688, 0.1722$ و 0.1061 به دست آمدند. نتایج بیان‌کننده بهتر بودن برآورد ماکسیم درست‌نمایی نسبت به بقیه برآوردها در هر دو حالت (s, k) است. همچنین بزرگ‌تر بودن مقادیر $R_{s,k}^{ML}, R_{s,k}^B$ و $R_{s,k}^{EB}$ در حالت $(s, k) = (2, 3)$ بیان‌کننده کارتر بودن سیستم سه مؤلفه‌ای با حد اقل دو مؤلفه فعال از سیستم دو مؤلفه‌ای با حد اقل یک مؤلفه فعال است.

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله برآورد قابلیت اعتماد در مدل تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، بر اساس توزیع‌های رایلی وارون با پارامتر متفاوت به روش‌های ماکسیم درست‌نمایی، بیزی و تجربی به دست آمدند. به کمک شبیه‌سازی مونته‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، با استفاده از میانگین اریبی و میانگین توان

۳ تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از روش شبیه‌سازی مونته‌کارلو و به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردهای $R_{s,k}^{ML}, R_{s,k}^B$ و $R_{s,k}^{EB}$ با استفاده از میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطاهای آنها با هم مقایسه می‌شوند.

۱.۳ شبیه‌سازی

در این زیر بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو از هر کدام از توزیع‌های متغیر مقاومت و متغیر تنش که به ترتیب دارای توزیع‌های $IR(\alpha)$ و $IR(\beta)$ هستند، برای مقادیر متفاوت (α, β) ، مانند $(1/5, 1/5), (2, 1/5), (2/5, 1/5), (3, 1/5)$ ، $(1/5, 2), (1/5, 2/5)$ و $(1/5, 3)$ ، نمونه تصادفی به اندازه‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ تولید می‌شود. سپس برآورد ماکسیم درست‌نمایی، برای $a_1 = a_2 = 1/5, b_1 = 2, b_2 = 3$ برآورد بیزی و برای $a_1 = a_2 = 1/5$ برآورد بیزی تجربی $R_{s,k}$ به همراه میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطاهای آنها برای $(s, k) = (1, 2), (2, 3)$ به دست می‌آید، که در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است. نتایج شبیه‌سازی، بیان‌کننده آن است، که

۱. با افزایش اندازه نمونه، برای هر ترکیبی از پارامترهای (α, β) ، قدر مطلق میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطاهای برآورد $R_{s,k}$ در هر دو حالت (s, k) و تحت هر سه روش برآورد، کاهش می‌یابد و برآورد ماکسیم درست‌نمایی $R_{s,k}$ نسبت به بقیه روش‌ها در هر دو حالت (s, k) کارتر است.

دوم خطاهای برآوردها، نشان داده شد که برآورد ماکسیم

درست‌نمایی از بقیه برآوردها کاراتر است. همچنین نتیجه گرفته شد که کارایی سیستم سه مؤلفه‌ای با حد اقل دو مؤلفه فعال بیشتر از کارایی سیستم دو مؤلفه‌ای با حد اقل یک مؤلفه فعال است.

نویسنده از سردبیر و داوران مجله در ارزیابی مقاله و پیشنهادات ارزنده‌شان نهایت تشکر را دارد.

جدول ۱. برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی (سطر اول)، برآورد بیزی (سطر دوم) و برآورد بیزی تجربی (سطر سوم) به همراه میانگین توان دوم

خطاها (داخل پرانتز) برای $(s, k) = (1, 2)$

$n = m$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
$(\alpha, \beta) = (3, 1/5)$	-۰/۰۰۰۱۶۶ (۰/۰۱۰۰۱)	۰/۰۰۰۱۰۴ (۰/۰۰۰۹۱۶)	-۰/۰۰۰۰۸۶ (۰/۰۰۰۶۲۴)	۰/۰۰۰۰۱۹ (۰/۰۰۰۴۷۵)
	۰/۰۰۰۶۷۷ (۰/۰۱۷۸۱)	۰/۰۰۱۱۵۱ (۰/۰۱۵۴۹)	۰/۰۰۰۲۴۲ (۰/۰۱۲۹۲)	-۰/۰۰۰۲۵۹ (۰/۰۱۳۱۸)
	-۰/۰۰۰۳۵۱ (۰/۰۱۶۵۳)	۰/۰۰۰۱۸۳ (۰/۰۱۱۰۵)	-۰/۰۰۰۱۸۶ (۰/۰۱۱۵۳)	۰/۰۰۰۰۷۴ (۰/۰۱۲۳۷)
$(\alpha, \beta) = (2/5, 1/5)$	-۰/۰۰۰۳۶۱ (۰/۰۱۰۵۸)	۰/۰۰۰۲۲۶ (۰/۰۰۰۸۴۵)	-۰/۰۰۰۰۵۱ (۰/۰۰۰۵۶۱)	-۰/۰۰۰۱۰۳ (۰/۰۰۰۴۳۴)
	-۰/۰۰۰۱۷۹ (۰/۰۱۷۶۷)	-۰/۰۰۰۱۰۷ (۰/۰۱۴۶۲)	-۰/۰۰۰۰۴۰ (۰/۰۱۴۳۲)	-۰/۰۰۰۱۳۱ (۰/۰۱۴۳۶)
	-۰/۰۰۰۶۹۱ (۰/۰۱۵۲۹)	-۰/۰۰۰۳۶۳ (۰/۰۱۲۱۲)	۰/۰۰۰۱۹۸ (۰/۰۱۳۰۴)	-۰/۰۰۰۲۵۶ (۰/۰۰۱۳۶۰)
$(\alpha, \beta) = (2, 1/5)$	-۰/۰۰۰۶۲۱ (۰/۰۱۰۶۰)	-۰/۰۰۰۳۲۲ (۰/۰۰۰۶۷۲)	-۰/۰۰۰۱۸۱ (۰/۰۰۰۴۴۷)	-۰/۰۰۰۱۷۳ (۰/۰۰۰۳۴۱)
	-۰/۰۰۱۰۷۵ (۰/۰۱۵۸۱)	-۰/۰۰۰۶۷۳ (۰/۰۱۴۹۲)	-۰/۰۰۰۴۵۵ (۰/۰۱۵۳۶)	-۰/۰۰۰۴۰۰ (۰/۰۱۵۹۳)
	-۰/۰۰۱۱۴۱ (۰/۰۱۲۳۱)	-۰/۰۰۰۶۱۷ (۰/۰۱۲۸۳)	-۰/۰۰۰۳۷۸ (۰/۰۱۴۲۲)	-۰/۰۰۰۳۴۰ (۰/۰۱۵۱۷)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 1/5)$	-۰/۰۰۰۹۳۴ (۰/۰۰۰۷۷۳)	-۰/۰۰۰۴۹۸ (۰/۰۰۰۳۹۳)	-۰/۰۰۰۳۰۵ (۰/۰۰۰۲۵۵)	-۰/۰۰۰۲۲۸ (۰/۰۰۰۱۹۲)
	-۰/۰۰۱۸۷۴ (۰/۰۱۴۰۸)	-۰/۰۰۱۱۳۳ (۰/۰۰۰۲۲۵)	-۰/۰۰۰۷۷۹ (۰/۰۱۶۷۲۲)	-۰/۰۰۰۶۸۱ (۰/۰۱۸۷۵)
	-۰/۰۰۱۶۴۵ (۰/۰۱۰۲۷)	-۰/۰۰۰۹۱۴ (۰/۰۱۳۹۱)	۰/۰۰۰۵۷۸ (۰/۰۱۵۷۵)	-۰/۰۰۰۵۱۵ (۰/۰۱۷۹۷)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 2)$	-۰/۰۰۱۱۴۰ (۰/۰۰۰۳۸۱)	-۰/۰۰۰۵۷۸ (۰/۰۰۰۱۵۴)	-۰/۰۰۰۳۹۲ (۰/۰۰۰۰۹۱)	-۰/۰۰۰۲۸۷ (۰/۰۰۰۰۶۳)
	-۰/۰۰۲۲۳۳ (۰/۰۱۴۱۸)	-۰/۰۰۱۳۱۸ (۰/۰۱۷۶۲)	-۰/۰۰۰۸۹۷ (۰/۰۲۰۶۸)	-۰/۰۰۰۷۷۲ (۰/۰۲۳۳۰)
	-۰/۰۰۱۹۸۶ (۰/۰۱۰۸۷)	-۰/۰۰۱۰۷۴ (۰/۰۱۵۴۸)	-۰/۰۰۰۶۹۲ (۰/۰۱۸۷۹)	-۰/۰۰۰۵۹۵ (۰/۰۲۱۷۱)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 2/5)$	-۰/۰۰۱۲۰۷ (۰/۰۰۰۲۶۱)	-۰/۰۰۰۶۱۴ (۰/۰۰۰۰۷۱)	-۰/۰۰۰۴۱۳ (۰/۰۰۰۰۳۳)	-۰/۰۰۰۳۱۰ (۰/۰۰۰۰۲۰)
	-۰/۰۰۲۱۲۸ (۰/۰۱۰۵۶)	-۰/۰۰۱۱۷۳ (۰/۰۱۶۸۳)	-۰/۰۰۰۸۵۳ (۰/۰۲۲۲۶)	-۰/۰۰۰۵۷۷ (۰/۰۲۵۸۴)
	-۰/۰۰۲۱۰۱ (۰/۰۱۵۷۸)	-۰/۰۰۱۱۴۲ (۰/۰۲۰۴۵)	-۰/۰۰۰۷۹۷ (۰/۰۲۵۵۱)	-۰/۰۰۰۵۲۴ (۰/۰۲۸۷۶)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 3)$	-۰/۰۰۱۱۹۲ (۰/۰۰۰۲۹۵)	-۰/۰۰۰۵۹۹ (۰/۰۰۰۰۹۴)	-۰/۰۰۰۴۰۶ (۰/۰۰۰۰۵۰)	-۰/۰۰۰۳۰۴ (۰/۰۰۰۰۳۳)
	-۰/۰۰۱۶۳۳ (۰/۰۱۱۱۶)	-۰/۰۰۰۸۲۲ (۰/۰۱۹۳۵)	-۰/۰۰۰۴۹۸ (۰/۰۲۵۲۲)	-۰/۰۰۰۳۴۱ (۰/۰۳۰۵۴)
	-۰/۰۰۲۰۱۴ (۰/۰۱۹۰۸)	-۰/۰۰۱۱۲۰ (۰/۰۲۵۹۵)	-۰/۰۰۰۷۴۱ (۰/۰۳۰۵۸)	-۰/۰۰۰۵۱۸ (۰/۰۳۵۳۸)

جدول ۲. برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی (سطر اول)، برآورد بیزی (سطر دوم) و برآورد بیزی تجربی (سطر سوم) به همراه میانگین توان دوم خطاها (داخل پرانتز) برای $(s, k) = (2, 3)$

$n = m$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
$(\alpha, \beta) = (3, 1/5)$	-۰/۰۰۳۹۲ (۰/۰۰۸۷۱)	-۰/۰۰۱۷۴ (۰/۰۰۴۹۰)	-۰/۰۰۱۱۶ (۰/۰۰۳۴۵)	-۰/۰۰۰۸۶ (۰/۰۰۲۶۱)
	-۰/۰۰۳۵۹۰ (۰/۰۰۴۸۵۴)	-۰/۰۰۴۵۶۴ (۰/۰۰۴۵۰۴)	-۰/۰۰۴۷۴۹ (۰/۰۰۴۶۸۲)	-۰/۰۰۴۹۰۶ (۰/۰۰۴۶۴۷)
	-۰/۰۰۴۴۶۱ (۰/۰۰۶۸۱۹)	-۰/۰۰۵۱۰۹ (۰/۰۰۴۷۹۴)	-۰/۰۰۵۱۶۳ (۰/۰۰۴۶۹۴)	-۰/۰۰۵۲۴۵ (۰/۰۰۴۷۳۱)
$(\alpha, \beta) = (2/5, 1/5)$	-۰/۰۰۰۴۹۲ (۰/۰۰۰۶۶۴)	-۰/۰۰۰۲۷۴ (۰/۰۰۰۳۶۱)	-۰/۰۰۰۱۵۸ (۰/۰۰۰۲۴۵)	-۰/۰۰۰۱۱۹ (۰/۰۰۰۱۸۷)
	-۰/۰۰۴۸۵۶ (۰/۰۰۷۱۲۶)	-۰/۰۰۶۲۵۵ (۰/۰۰۴۷۳۶)	-۰/۰۰۶۴۰۴ (۰/۰۰۴۷۸۵)	-۰/۰۰۶۴۹۹ (۰/۰۰۴۸۰۱)
	-۰/۰۰۵۰۸۴ (۰/۰۰۹۴۲۰)	-۰/۰۰۶۴۲۸ (۰/۰۰۵۰۵۱)	-۰/۰۰۶۵۲۴ (۰/۰۰۴۸۶۵)	-۰/۰۰۶۵۹۴ (۰/۰۰۴۸۰۴)
$(\alpha, \beta) = (2, 1/5)$	-۰/۰۰۰۷۰۲ (۰/۰۰۰۴۶۲)	-۰/۰۰۰۳۷۴ (۰/۰۰۰۲۰۳)	-۰/۰۰۰۲۳۲ (۰/۰۰۰۱۲۹)	-۰/۰۰۰۱۸۸ (۰/۰۰۰۰۹۴)
	-۰/۰۰۳۷۶۱ (۰/۰۰۲۳۲۰۶)	-۰/۰۰۶۶۸۲ (۰/۰۰۹۵۲۱)	-۰/۰۰۷۵۹۶ (۰/۰۰۶۴۴۸)	-۰/۰۰۸۰۱۸ (۰/۰۰۵۱۸۷)
	-۰/۰۰۳۳۳۳ (۰/۰۰۲۹۶۶۶)	-۰/۰۰۶۶۰۴ (۰/۰۰۱۰۲۴۶)	-۰/۰۰۷۵۶۱ (۰/۰۰۶۶۸۲)	-۰/۰۰۷۹۹۵ (۰/۰۰۵۲۹۹)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 1/5)$	-۰/۰۰۰۸۴۳ (۰/۰۰۰۲۵۶)	-۰/۰۰۰۴۴۳ (۰/۰۰۰۰۸۰)	-۰/۰۰۰۲۸۶ (۰/۰۰۰۰۳۷)	-۰/۰۰۰۲۱۹ (۰/۰۰۰۰۲۴)
	۰/۰۰۴۷۹۳ (۰/۰۰۱۱۵۸۲)	۰/۰۰۴۲۵۰ (۰/۰۰۶۴۲۲۴)	۰/۰۰۲۸۰۹ (۰/۰۰۴۴۷۲۶)	-۰/۰۰۲۱۳۳ (۰/۰۰۳۶۳۸)
	۰/۰۰۹۴۸۷ (۰/۰۰۱۵۵۰۴)	۰/۰۰۴۹۳۶ (۰/۰۰۷۳۳۶۵)	۰/۰۰۳۱۱۳ (۰/۰۰۴۸۲۸۲)	-۰/۰۰۲۳۱۶ (۰/۰۰۳۸۲۱۳)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 2)$	-۰/۰۰۰۸۹۹ (۰/۰۰۰۳۹۶)	-۰/۰۰۰۴۳۶ (۰/۰۰۰۱۳۵)	-۰/۰۰۰۳۰۶ (۰/۰۰۰۰۸۲)	-۰/۰۰۰۲۱۹ (۰/۰۰۰۰۲۳)
	۰/۰۰۱۰۳۳ (۰/۰۰۱۴۳۷۶)	۰/۰۰۵۸۳۸ (۰/۰۰۷۹۴۰۳)	۰/۰۰۴۴۳۲ (۰/۰۰۵۶۷۲۸)	۰/۰۰۳۶۳۶ (۰/۰۰۴۳۷۸۸)
	۰/۰۰۱۳۶۹۷۴ (۰/۰۰۲۰۸۸۵)	۰/۰۰۶۹۹۱ (۰/۰۰۹۳۹۹۳)	۰/۰۰۵۰۴۳ (۰/۰۰۶۳۵۶۸)	۰/۰۰۳۹۷۵ (۰/۰۰۵۱۱۷۴)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 2/5)$	-۰/۰۰۰۷۸۶ (۰/۰۰۰۶۶۸)	-۰/۰۰۰۴۱۵ (۰/۰۰۰۳۳۶۲)	-۰/۰۰۰۲۸۰ (۰/۰۰۰۲۲۷)	-۰/۰۰۰۲۰۹ (۰/۰۰۰۱۵۷)
	۰/۰۰۱۲۴۵۵۰ (۰/۰۰۱۶۱۸۶)	۰/۰۰۸۰۶۱ (۰/۰۰۷۳۷۷۲)	۰/۰۰۶۴۸۹ (۰/۰۰۷۰۳۵۵)	۰/۰۰۵۱۵۷ (۰/۰۰۴۰۱۷)
	۰/۰۰۱۷۶۲۲ (۰/۰۰۲۴۷۲۶)	۰/۰۰۹۶۶۲ (۰/۰۰۱۵۸۹)	۰/۰۰۷۴۹۴ (۰/۰۰۸۰۳۴۷)	۰/۰۰۵۶۹۴ (۰/۰۰۹۲۲۳)
$(\alpha, \beta) = (1/5, 3)$	-۰/۰۰۰۷۰۷ (۰/۰۰۱۰۴۳)	-۰/۰۰۰۳۱۷ (۰/۰۰۰۵۳۷)	-۰/۰۰۰۲۳۱ (۰/۰۰۰۳۶۱)	-۰/۰۰۰۱۸۰ (۰/۰۰۰۲۷۱)
	۰/۰۰۱۵۴۹۹ (۰/۰۰۲۸۵۸۶)	۰/۰۰۱۰۲۳۸ (۰/۰۰۸۸۷۵۷)	۰/۰۰۸۳۰۰ (۰/۰۰۷۷۰۰۱)	۰/۰۰۶۸۵۳ (۰/۰۰۶۰۸۰۴)
	۰/۰۰۲۲۵۷۱ (۰/۰۰۳۰۱۴۵)	۰/۰۰۱۲۸۲۸ (۰/۰۰۹۶۳۳۲)	۰/۰۰۹۷۱۶ (۰/۰۰۹۰۴۶۸)	۰/۰۰۷۷۱۳ (۰/۰۰۶۸۴۸۷)

جدول ۳. مجموعه داده‌های اول X و مجموعه داده‌های دوم Y

۳۲۰	۲۴۶	۲۳۹	۲۲۰	۱۸۲	۱۷۶	۱۰۴	۵۶	۵۵	۴۷	۳۳	X
۷۴	۷۰	۵۹	۵۷	۴۸	۲۹	۲۹	۲۷	۲۶	۲۱	۱۲	Y
۵۰۲ ۳۸۶ ۳۲۶ ۱۵۳											

مراجع

- [1] Awad, M., and Gharraf, K. (1986). Estimation of $P(Y < X)$ in Burr case: A comparative study. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **15**, 389-403.
- [2] Asgharzadeh A., Valiollahi R., and Raqab M. Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *SORT*, **35**(2), 103-124.

- [3] Al-Mutairi D. K., Gitany M. E., and Kundu D. (2013). Inferences on Stress-strength reliability from Lindley distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42(8)**, 1443-1463.
- [4] Bhattacharyya, G. K., and Johnson R. A. (1974). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model, *JASA*, **69**, 966-970.
- [5] Bain, L. J., and M. Engelhardt. (1991). Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models, 2nd ed., Marcel and Dekker, New York, NY.
- [6] Downtown, F. (1973). The estimation of $P(Y < X)$ in the normal case, *Technometrics*, **15**, 551-558.
- [7] Enis, P., and Geisser, S. (1971). Estimation of the probability that $Y < X$. *JASA*, **66**, 162-168.
- [8] Ghitany M. E., Al-Mutairi D. K., and Aboukhamseen S. M. (2015). Estimation of the reliability of a Stress-strength system from power indley distributions, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.
- [9] Kundu D., and Gupta R. D. (2006). Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **55(2)**, 270-280.
- [10] Lio Y. L., and Tsai T. R. (2012). Estimation of for Burr XII distribution based on the progressivey first failure-censord samples, *Journal of Applied Statistics*, **39(2)**, 465-483.
- [11] Nandi S. B., and Aich A. B. (1994). A note on estimation of $P(X > Y)$ for some distributions useful in life-testing, *IAPQR Trans-actions*, **19(1)**, 35-44.
- [12] Pandey M., and Borhan U. M. d. (1985). *Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model following Burr distribution*, Proceedings of the First Asian congress on Quality and Reliability, New Delhi, India, 307-312.
- [13] Rao C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, Wiley Eastern Limited, India.
- [14] Raqab M. Z., and Kundu D. (2005). Comparison of diferent estimators of $P(Y < X)$ for a scaled Burr type X distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **34(2)**, 465-483.
- [15] Raqab M. Z., Madi M. T., and Kundu, D. (2008). Estimation of $P(Y < X)$ for the 3-parameter generalized exponential distribution, *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **37(18)**, 2854-2864.
- [16] Rao G. S., and Kantam R. R. L. (2010). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model: log-logistic distribution, *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **3(2)**, 75-84.
- [17] Rao G. S. (2012a). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on generalized exponential distribution, *Colombian Journal of Statistics*, **35(1)**, 67-76.

- [18] Rao G. S. (2012b). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on Rayleigh distribution, *ProbStat Forum*, **5**, 150-161.
- [19] Rao G. S., Kantam, R. R. L., Rosaiah, K., and Reddy, J. P. (2013). Estimation of stress-strength reliability from inverse Rayleigh distribution. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 30(4), 256-263.
- [20] Rao G. S., Aslam M., and Aril O. H. (2017). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on exponentiated Weibull distribution, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **46(15)**, 7495-7502.
- [21] Treyer V. N. (1964). *Doklady Acad, Nauk, Belorus, U.S.S.R.*