

تعیین اندازه نمونه بیزی با کمترین هزینه به روش عددی

مسعود قاسمی بهجانی^۱، میلاد اسدزاده^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۷/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲/۲۵

چکیده:

در این مقاله شیوه تعیین اندازه نمونه مطلوب بر اساس تابع زیان نامتقارن لینکس کراندار به روش بیزی برای توزیع‌های نرمال، نمایی و پواسن بیان شده است. اندازه نمونه مطلوب با استفاده از روش عددی محاسبه شده است. در روش عددی، نخست میانگین ریسک پسین را به دست آورده و آن را به تابع هزینه خطی لیندلی اضافه می‌کنیم تا میانگین هزینه کل به دست آید. سپس نمودار اندازه نمونه را در مقابل میانگین هزینه کل رسم می‌کنیم و در نهایت، اندازه نمونه مطلوب را که هزینه را مینیمم می‌کند، به دست می‌آوریم. **واژه‌های کلیدی:** تابع هزینه خطی لیندلی، توزیع پسین، توزیع نرمال و ریسک پسین.

۱ مقدمه

معیار بیزی را بر اساس تغییر مورد انتظار برآورد نقطه‌ای برای میانگین مقادیر نمونه بعدی مطرح کرده، و حد بالایی را برای اندازه نمونه محاسبه نموده است. آدکوک [۱] مطالعه نسبتاً جامعی روی هر دو دسته از روش‌ها ارائه کرده است. فام‌گیا و ترکان [۱۵] مسئله را بر اساس مقادیر مورد انتظار از اطلاعات نمونه بررسی کرده‌اند. همچنین جوزف و همکاران [۹]، فام‌گیا و ترکان [۱۶]، آدکوک [۱]، جوزف و بلیسل [۸]، لیندلی [۱۲] و لی و زلن [۱۰] کارهایی را در زمینه تعیین اندازه نمونه بیزی انجام داده‌اند. اوهاگان و استیونس [۱۳] یک تابع هدف شامل هزینه و سود اجرای یک آزمایش تصادفی را مطرح نموده و با بهینه‌سازی آن، اندازه نمونه آزمایش تصادفی را به روش بیزی به دست آورده‌اند. همچنین پزشک [۱۴]، مروری بر روش‌های مختلف بیزی برای تعیین اندازه نمونه آزمایش‌های تصادفی ارائه کرد. ساهو و اسمیت [۱۷] در مورد تعیین اندازه نمونه در آزمایش‌های بالینی و حساسی مالی بحث کردند. آنار از تابع سود استفاده نکردند؛ بلکه تابع زیان کراندار را مورد بررسی قرار دادند. در طول دهه اخیر، تعیین اندازه نمونه از دیدگاه بیزی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران، صنعت و دولت قرار گرفته است. اگرچه هنوز بین دانشمندان بیزی و کلاسیک بحث و اختلاف نظر وجود دارد، برگر [۳] و برگر و همکاران [۵] به صورت موفقیت‌آمیزی، شایستگی‌های هر دو نگرش کلاسیک و بیزی

هدف از نمونه‌گیری بیزی، انجام دادن استنباط و اخذ تصمیمی در مورد پارامتر نامعلوم θ است. در واقع روش‌های تعیین اندازه نمونه این اجازه را به محقق می‌دهد که اندازه نمونه را با معین کردن هدف مشخص یا اکسترمم‌سازی یک تابع خاص به دست آورد. محاسبه اندازه نمونه در مسائل عملی، سؤال مهمی است که مستقیماً با هزینه مطالعه و گردآوری داده‌ها ارتباط دارد. در هر پژوهش، دانستن تعداد مشاهدات (اندازه نمونه) به‌طوری که هزینه کلی طرح نیز مینیمم شود، مسئله‌ای است که از اهمیت زیادی برخوردار است. هزینه کلی شامل زیان حاصل شده از تصمیم‌گیری و هزینه تحلیل و هدایت آزمایش‌های انجام‌شده است. روش‌های تعیین اندازه نمونه به دو دسته کلاسیک و بیزی تقسیم می‌شوند. روش‌های بیزی نیز خود به دو دسته تقسیم می‌شوند: روش‌هایی که تعیین اندازه نمونه را به‌عنوان یک مسئله تصمیم می‌دانند و از تابع زیان یا تابع سود استفاده می‌کنند و روش‌هایی که استنباط‌هایی روی پارامتر انجام می‌دهند، همچنین روش‌هایی وجود دارند که این دو روش را با هم ترکیب می‌کنند، که به این روش‌ها روش‌های آمیخته بیزی می‌گویند. نگرش تصمیم‌نظری برای پیدا کردن اندازه نمونه بهینه برای هر دو نوع نمونه‌گیری ثابت و دنباله‌ای توسط برگر [۴] بحث شده است. برای برآورد میانگین یک توزیع اختیاری، گلدستاین [۷] یک

^۱ گروه آمار دانشگاه سیستان و بلوچستان، ایران

^۲ گروه آمار دانشگاه یاسوج، ایران

$\gamma > 0$ است. فرض می‌کنیم $a = \gamma c$ پس داریم:

$$L_b(\delta - \theta) = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{1 + a(\exp\{b(\delta - \theta)\} - b(\delta - \theta) - 1)} \right). \quad (1)$$

آنان این تابع زیان را لینکس کراندار نامیدند؛ زیرا این تابع زیان کراندار است و از تابع زیان لینکس حاصل می‌شود. ریسک پسین برای برآوردگر بیزی تحت تابع زیان لینکس کراندار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$PR = \int (L_b(\delta - \theta)) p(\theta|x) d\theta, \quad (2)$$

که حل آن به روش تحلیلی ممکن نیست. بنا بر این، این انتگرال را به روش عددی با استفاده از نرم افزار R محاسبه می‌کنیم.

۲.۱ توزیع پیشگو

فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $p(X_i|\theta, n)$ و تابع چگالی پیشین $p(\theta)$ برای θ باشد. اگر تابع درست‌نمایی نمونه با $p(\mathbf{X}|\theta)$ نشان داده شود، توزیع پیشگوی $\mathbf{X}$ به شرط n به صورت زیر خواهد بود:

$$p(\mathbf{X}|n) = \int_{\Theta} p(\mathbf{x}|\theta, n) p(\theta) d\theta,$$

که Θ فضای پارامتر است.

۳.۱ تابع هزینه

لیندلی [۱۱] با فرض این که c هزینه زیرساختی از نمونه‌گیری یا هر هزینه دیگر در نمونه‌گیری باشد و c هزینه هر واحد نمونه‌گیری در نظر گرفته شود، تابع هزینه برای اندازه نمونه $n > 0$ را به صورت $C(n) = c. + cn$ معرفی کرد. سیف‌الاسلام [۱۸] با اضافه کردن ریسک پسین برآوردگر بیزی به این تابع هزینه، تابع هزینه کل را به صورت

$$TC(n) = c. + cn + PR$$

به دست آورد.

حال با مینیمم‌سازی هزینه نمونه‌گیری، اندازه نمونه مطلوب را مینیمم خواهیم کرد که در برخی موارد، ریسک پسین به بردار تصادفی $\mathbf{X}$ بستگی دارد. در این صورت امید ریاضی ریسک پسین APR را به دست آورده، به تابع هزینه لیندلی اضافه می‌کنیم. در نتیجه، امید ریاضی هزینه کل عبارت است از:

$$E(TC(n)) = c. + cn + APR. \quad (3)$$

را بیان کردند. به هر حال، هیچ یک از بحث‌ها راجع به تعیین اندازه نمونه از نقطه نظر بیزی برای آزمایش‌های بالینی در مرحله طرح‌ریزی میسر نشد، بنا بر این بسیاری از محققان از شبیه‌سازی استفاده نمودند. در این مقاله با در نظر گرفتن تابع هزینه لیندلی و تابع زیان لینکس کراندار، با استفاده از روش بیزی به دنبال تعیین اندازه نمونه هستیم به طوری که هزینه نمونه‌گیری مینیمم شود.

۱.۱ تابع زیان لینکس کراندار

ون و لوی [۱۹] یک تابع زیان نامتقارن و کراندار را پیشنهاد کردند و آن را تابع زیان لینکس کراندار نامیدند. آنان نشان دادند که این تابع زیان در تصمیم‌گیری برای برخی مسائل مانند قابلیت اطمینان می‌تواند کاربرد داشته باشد و با بررسی و مقایسه توابع زیان مختلف و همچنین با توجه به این که اگر تابع زیان بی‌کران باشد از نظر اقتصادی توجیهی ندارند و در ادامه کار با تابع زیان بی‌کران، زیان به بی‌نهایت میل می‌کند، ثابت کردند توابع زیان کراندار، مناسب‌تر از بی‌کران‌ها هستند. آنان همچنین وقتی تابع زیان لینکس را به طور گسترده مورد بررسی قرار دادند، ملاحظه کردند که این تابع زیان بسیار مفید است، اما در کاربرد محدودیت دارد؛ زیرا تحت برخی توابع چگالی، مثلاً t -استیودنت، موجود نمی‌باشد.

اگر پارامتر θ به وسیله δ برآورد شود، تابع زیان لینکس به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\delta - \theta) = c(\exp\{b(\delta - \theta)\} - b(\delta - \theta) - 1),$$

که $c > 0$ و $b \neq 0$. تابع زیان لینکس، کراندار نیست و به علامت پارامتر b بستگی دارد. زیان لینکس از یک طرف تقریب نمایی و از طرف دیگر خطی است.

ون و لوی [۱۹] یک خانواده جدید از تابع زیان نامتقارن کراندار را بر پایه زیان لینکس پیشنهاد کردند که با $L_b(\delta - \theta)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر است:

$$L_b(\delta - \theta) = \frac{L(\delta - \theta)}{1 + \gamma L(\delta - \theta)} = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{1}{1 + \gamma c(\exp\{b(\delta - \theta)\} - b(\delta - \theta) - 1)} \right]$$

که γ پارامتر کران نامیده می‌شود. در این جا $b \neq 0$ ، $c > 0$ و

به دست می آوریم.

۱.۲ تعیین اندازه نمونه برای توزیع نرمال

در ابتدا اندازه نمونه مطلوب را برای پارامترهای توزیع نرمال، در دو حالت بررسی می کنیم. حالت اول، برآورد میانگین با شرط معلوم بودن دقت و حالت دوم، وقتی است که می خواهیم برآورد دقت را با شرط معلوم بودن میانگین به دست آوریم، که به دلیل شباهت به حالت اول، به صورت خلاصه و بدون اجرای محاسبات (مانند توزیع پوآسون در جدول ۴ و شکل ۴) در جدول ۳ و شکل ۳ آورده شده است.

۱.۱.۲ تعیین اندازه نمونه برای میانگین توزیع نرمال وقتی دقت (معکوس واریانس) معلوم است

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع نرمال با میانگین θ و دقت $\xi = \frac{1}{\sigma^2}$ باشد. همچنین فرض کنید توزیع پیشین θ ، نرمال با میانگین μ و دقت $n\xi$ باشد. پس توزیع پسین $\theta|x$ ، نرمال با میانگین $\hat{\mu} = \frac{n\bar{x} + n_0\mu}{n + n_0}$ و دقت $\hat{\xi} = (n + n_0)\xi$ است.

تحت زیان لینکس کراندار، تابع ریسک پسین به صورت زیر است:

$$PR = \int (L_b(\delta - \theta)) p(\theta|x) d\theta.$$

حل این انتگرال به روش تحلیلی دشوار است، بنا بر این با استفاده از الگوریتم گفته شده، اندازه نمونه مطلوب را به دست می آوریم.

در جدول ۱، اندازه نمونه مطلوب را در برآورد میانگین توزیع نرمال برای مقادیر مختلف پارامترهای γ و b با شرط $a = 0.5$ به دست آورده ایم. همچنین در این جدول ملاحظه می کنیم اگر پارامترهای شکل و مقیاس ثابت باشند، اما پارامتر کران افزایش یابد، اندازه نمونه مطلوب کاهش می یابد. از طرف دیگر وقتی پارامتر کران و پارامتر مقیاس ثابت باشند، اگر پارامتر شکل افزایش یابد، اندازه نمونه مطلوب نیز افزایش می یابد. در شکل ۱ مشاهده می شود که برای پارامترهای داده شده اندازه نمونه مطلوب که در آن هزینه نمونه گیری مینیمم است ۲۴ می باشد. در این جا به عنوان مثال c ، یعنی همان هزینه زیرساختی از نمونه گیری یا هر هزینه دیگر در نمونه گیری را برابر با یک واحد و c را 0.001 آن یک واحد در نظر می گیریم.

در این مقاله تابع زیان لینکس کراندار را در نظر می گیریم و برای توزیع های نرمال، نمایی و پوآسون اندازه نمونه مطلوب را به دست می آوریم. با توجه به معادله حاصل از تابع هزینه مذکور، اندازه نمونه مطلوب را به دلیل غیر قابل حل بودن ریسک پسین به روش تحلیلی با کمک شبیه سازی محاسبه کرده ایم.

۴.۱ الگوریتم تعیین اندازه نمونه به روش عددی

همان طور که گفته شد، بعضی توابع به روش تحلیلی قابل محاسبه نیستند، به همین دلیل برای تعیین اندازه نمونه به روش بیزی از شبیه سازی استفاده می کنیم. برای حل به کمک شبیه سازی، $E(TC(n))$ را در رابطه (۲) برای n های مختلف به دست می آوریم و نمودار $E(TC(n))$ را در مقابل n رسم می کنیم. در نهایت اندازه نمونه مطلوب را که دارای کمترین هزینه است به دست می آوریم. برای رسیدن به این اندازه نمونه، الگوریتم زیر را در نظر می گیریم:

۱. یک نمونه به اندازه n از X^* که دارای تابع چگالی حاشیه ای پسین $p(x|n)$ است تولید می کنیم.
۲. یک توزیع پسین برای پارامتر مورد علاقه، $p(\theta|x^*, n)$ پیدا می کنیم.
۳. مقدار ریسک پسین را محاسبه می کنیم.
۴. مراحل ۱ تا ۳ را برای نمونه های مختلف تکرار می کنیم که هر بار یک ریسک پسین به دست می آید و در نهایت، میانگین ریسک پسین APR را پیدا می کنیم.

۵. تابع هزینه خطی $(c + cn)$ را به APR اضافه می کنیم تا $E(TC(n))$ به دست آید.

۶. مراحل ۱ تا ۵ را برای n های مختلف تکرار می کنیم.
۷. $E(TC(n))$ را در مقابل n رسم می کنیم.
۸. اندازه نمونه ای را که حداقل هزینه دارد پیدا می کنیم، که همان اندازه نمونه مطلوب و مد نظر است.

اکنون به کمک الگوریتم بالا و با استفاده از تابع هزینه لیندلی بر اساس تابع زیان لینکس کراندار برای توزیع های مختلف، اندازه نمونه مطلوب را به دست می آوریم.

۲ تعیین اندازه نمونه

در این بخش، اندازه نمونه مطلوب را برای توزیع های نرمال، نمایی و پوآسون تحت تابع زیان لینکس کراندار با کمک شبیه سازی

۲.۲ تعیین اندازه نمونه برای توزیع نمایی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع نمایی با پارامتر λ باشد. همچنین فرض می‌کنیم توزیع پیشین، گاما با پارامترهای α و β باشد. پس تابع چگالی پسین به صورت زیر است:

$$p(\lambda|\mathbf{x}) \propto \lambda^{\alpha+n-1} \exp\{-(\beta+s)\lambda\},$$

که دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha+n$ و $\beta+s$ می‌باشد و $S = \sum_{i=1}^n X_i$ از طرفی می‌دانیم ریسک پسین تحت تابع زیان لینکس کراندار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$PR = \int (L_b(\delta - \theta)) p(\lambda|\mathbf{x}) d\lambda,$$

که حل آن از روش تحلیلی ممکن نیست. پس با استفاده از الگوریتم داده شده میانگین ریسک پسین را به دست خواهیم آورد. بنا بر این در ابتدا X^* را که دارای توزیع حاشیه‌ای پسین گاما-گاما است محاسبه می‌کنیم. برناردو [۶] توزیع گاما-گاما را به صورت زیر تعریف کرد:

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما-گاما با پارامترهای α, β و n است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$g_g(x; \alpha, \beta, n) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n)} \frac{x^{n-1}}{(\beta+x)^{\alpha+n}}; \quad x > 0.$$

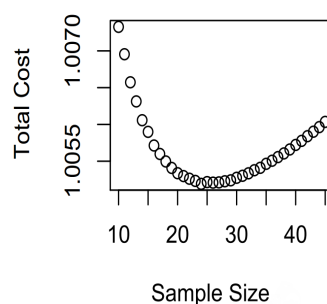
که در آن $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ و n عدد صحیح مثبت است. اگر X دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ باشد آن را با نماد $g_a(x; n, \lambda)$ نشان می‌دهیم. (چون توزیع گاما-گاما با g_g مشخص کردیم، برای مشتبه نشدن، توزیع گاما را با g_a نشان می‌دهیم و اندیس a مربوط به g^{mma} است.) در این صورت به راحتی می‌توان نشان داد که توزیع گاما-گاما از ترکیب دو توزیع گاما به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g_g(x; \alpha, \beta, n) = \int_0^\infty g_a(x; n, \lambda) g_a(\lambda; \alpha, \beta) d\lambda.$$

سپس برای به دست آوردن امید ریاضی هزینه کل، هزینه خطی لیندلی را به ریسک پسین اضافه کرده، فرض می‌کنیم $c = 1$ و $c = 0.0001$ باشد، که به این معنی است که به عنوان مثال c یعنی همان هزینه زیرساختی از نمونه‌گیری یا هر هزینه دیگر در نمونه‌گیری را برابر با یک واحد و c را 0.0001 آن یک واحد در نظر می‌گیریم. در نهایت، امید ریاضی هزینه کل را در مقابل اندازه نمونه مطلوب رسم خواهیم کرد. در جدول ۲، اندازه نمونه مطلوب را برای مقادیر مختلف γ و b با شرط ثابت بودن a به دست آورده‌ایم. در جدول ۲، مشاهده می‌شود که وقتی پارامتر شکل ثابت است اگر پارامتر کران زیاد شود، اندازه نمونه مطلوب کاهش می‌یابد. از طرف دیگر اگر پارامتر کران ثابت باشد، با افزایش پارامتر شکل، اندازه نمونه مطلوب نیز افزایش می‌یابد. در شکل ۲، اندازه نمونه در مقابل هزینه کل رسم شده است، که اندازه نمونه مطلوب ۵۰ است.

۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله اندازه نمونه مطلوب را برای توزیع‌های مختلف بر اساس تابع زیان نامتقارن لینکس کراندار محاسبه کردیم. به دلیل پیچیدگی شکل تابع ریسک پسین، با اجرای محاسبات، میانگین هزینه کل مینیمم شده است. در این جا به وضوح تعیین اندازه نمونه به پارامترهای پیشین، مقیاس، شکل و پارامتر کران بستگی دارد. در همه موارد با فرض ثابت بودن مقیاس، شکل و پارامترهای پیشین، اگر پارامتر کران افزایش یابد، اندازه نمونه مطلوب کاهش می‌یابد. از طرف دیگر برای مقیاس، پارامتر کران و پارامترهای پیشین ثابت، اگر پارامتر شکل افزایش یابد، اندازه نمونه مطلوب نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۱. تعیین اندازه نمونه در برآورد میانگین نرمال، وقتی $\xi = \frac{1}{4}$ ، $n = 1$ ، $\mu = 1$ ، $c = 0.0001$ ، $\gamma = 0.1$ ، $b = 0.5$ و $a = 0.5$ باشد.

جدول ۱. اندازه نمونه مطلوب در برآورد میانگین توزیع نرمال برای مقادیر مختلف γ و b وقتی $\xi = \frac{1}{p}$ ، $n_0 = 1$ ، $\mu_0 = 1$ ، $c = 1$ و $c = 0.001$.

n	b				
γ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۱	۱۰	۱۵	۱۸	۲۲	۲۴
۰/۲	۷	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰
۰/۳	۵	۸	۱۰	۱۲	۱۶
۰/۴	۳	۶	۸	۱۱	۱
۰/۵	۱	۳	۴	۶	۸

جدول ۲. اندازه نمونه مطلوب در برآورد پارامتر توزیع نمایی برای مقادیر مختلف γ و b وقتی $\alpha = \beta = 1$ و $a = 0.5$ باشد.

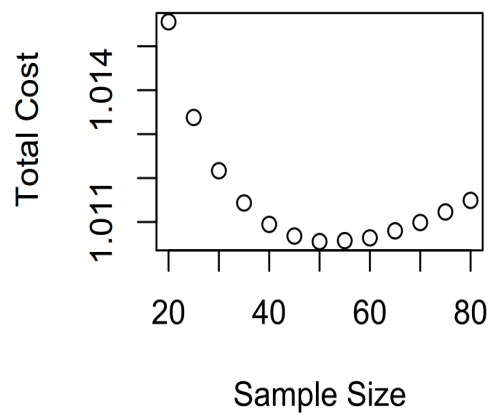
n^*	b				
γ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۱	۴۵	۶۸	۸۱	۹۷	۱۱۰
۰/۲	۳۵	۴۶	۶۹	۸۱	۹۲
۰/۳	۲۵	۳۶	۵۰	۶۸	۷۷
۰/۴	۱۵	۲۷	۳۴	۴۵	۶۳
۰/۵	۱۰	۱۸	۳۰	۳۶	۴۷

جدول ۳. اندازه نمونه مطلوب در برآورد دقت توزیع نرمال وقتی $n_0 = 10$ ، $\mu_0 = 1$ ، $c = 0.0001$ و $\alpha = \beta = 1$ باشد.

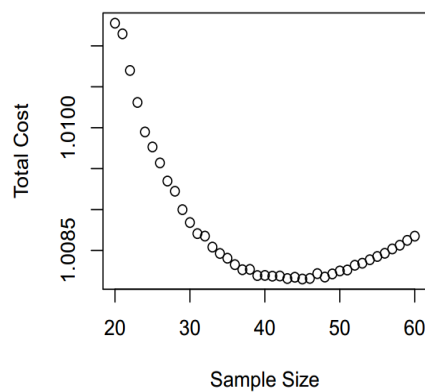
n	b				
γ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۱	۴۵	۶۲	۷۴	۶۹	۱۱۰
۰/۲	۳۵	۴۸	۶۰	۷۲	۸۵
۰/۳	۳۰	۴۰	۵۰	۶۳	۷۰
۰/۴	۲۶	۳۴	۴۴	۵۵	۵۶
۰/۵	۲۰	۳۰	۴۰	۴۶	۴۸

جدول ۴. اندازه نمونه مطلوب در برآورد پارامتر توزیع پواسون برای مقادیر مختلف γ و b وقتی $\alpha = \beta = 2$ و $a = 0.5$ باشد.

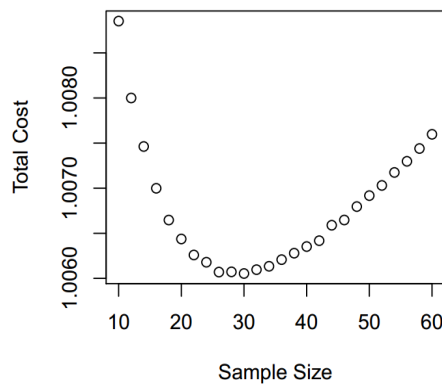
n	b				
γ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۱	۳۴	۴۵	۵۶	۶۵	۷۲
۰/۲	۲۵	۳۶	۴۰	۴۹	۵۸
۰/۳	۲۰	۳۱	۳۶	۴۲	۴۹
۰/۴	۱۵	۲۴	۳۲	۳۵	۴۳
۰/۵	۱۲	۲۱	۲۶	۳۰	۳۶



شکل ۲. تعیین اندازه نمونه در برآورد پارامتر توزیع نمایی وقتی $\alpha = \beta = 1$, $c = 0.0001$, $b = 0.3$ و $a = 0.5$ باشد.



شکل ۳. تعیین اندازه نمونه در برآورد میانگین نرمال وقتی $n = 1$, $\mu = 1$, $c = 0.001$, $b = 0.1$ و $a = 0.5$ باشد.



شکل ۴. تعیین اندازه نمونه در برآورد پارامتر پواسون به ازای $\alpha = \beta = 2$, $c = 1$, $c = 0.0001$, $b = 0.4$ و $a = 0.5$ باشد.

مراجع

- [1] Adcock, C. J. (1988). A Bayesian approach to calculating Sample size. *Statistician*, **37**, 433-439.
- [2] Adcock, C. J. (1997). Sample size determination: A Review. *Statistician*, **46**, 261-283.
- [3] Berger, J. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd edn. New York: Springer.
- [4] Berger, J. O. (1980). *Statistical Decision Theory: Foundation Concepts and Methods*, Springer - Verlag.

- [5] Berger, J. O., Boukai, B. and Wang, Y. (1997). Unified frequentist and Bayesian testing of a precise hypothesis. *Statistical Science*, **12**, 133-160.
- [6] Bernardo, J. M., Smith, A. F. M. (2000). *Bayesian Theory*. Chichester: John Wiley.
- [7] Goldstein, M. (1981). A Bayesian criterion for sample size. *Annals of Statistics*, **9**, 670-672.
- [8] Joseph, L., Belisle, P., (1997). Bayesian sample size determination for normal means and difference between normal means. *Statistician*, **46**, 209-226.
- [9] Joseph, L., Wolfson, D. and du Berger, R., (1995). Sample size calculations for binomial proportions via highest posterior density intervals. *Statistician*, **44**, 143- 154.
- [10] Lee, S. J. and Zelen, M. (2000). Clinical trials and sample size considerations: another perspective. *Statistical Science*, **15**, 95-110.
- [11] Lindley, D. V. (1972). *Bayesian Statistics: A Review*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [12] Lindley, D. V. (1997). The choice of sample size: A reply to the discussion. *Statistician*, **46**, 163-166.
- [13] O'Hagan, A., Stevens, J. W., (2001). Bayesian assessment of sample size for clinical trails of cost-effectiveness. *Medical Decision Making*, **21**, 219-230.
- [14] Pezeshk, H., (2003). Bayesian techniques for sample size determination in clinical trials: A short review. *Statistical Method in Medical Research*, **12(6)**, 489-504.
- [15] Pham-Gia, T. and Turkkan, N. (1992). Sample size determination in Bayesian Analysis. *Statistician*, **41**, 389-397 (Disc: P399-404).
- [16] Pham-Gia, T. (1997). On Bayesian analysis, Bayesian decision theory and the sample size problem. *Statistician*, **46**, 139-144.
- [17] Sahu, S. K., Smith, T. M. F. (2006). A Bayesian method of sample size determination with practical applications. *Journal of the Royal Statistical Society, A* **169**, 235-253.
- [18] Saiful Islam, A. F. M., Pettit, L. I. (2012). Bayesian sample size determination using linex loss and linear cost, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **41**, 223-240.
- [19] Wen, D. and Levy, S. (2001). BLINEX, A bounded asymmetric loss function whit application to Bayesian estimation. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **30(1)**, 147-153.