

برآورد E -بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری

شهرام یعقوبزاده شهرستانی^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۷/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲/۲۵

چکیده:

در این مقاله برآورد E -بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری تحت تابع زیان درجه دوم به دست می‌آید. سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد E -بیزی پارامترها با برآوردهای بیزی مقایسه می‌شوند. **واژه‌های کلیدی:** توزیع نمایی دوپارامتری، برآورد E -بیزی، شبیه‌سازی مونت کارلو.

۱ مقدمه

گاهی وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنا بر این تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. از این رو با در نظر گرفتن توزیع پیشین مناسب برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال

$$f(x; \alpha, \beta) = \beta e^{-\beta(x-\alpha)}, \quad x > \alpha, \alpha \in R, \beta > 0 \quad (1)$$

و اعمال شرایطی خاص روی ابر پارامترهای توزیع پیشین، برآورد بیزی مورد انتظار که به اختصار برآورد E -بیزی نامیده می‌شود به دست می‌آید که می‌تواند کارا یا تحت شرایطی کارا باشد. اخیراً از روش برآورد E -بیزی که توسط [۷] معرفی شده برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای $([8, 7])$ ، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم ([۹]) و برآورد پارامتر توزیع پاسکال ([۱۴]) کمک گرفته شده است. در این مقاله به کمک تعریف ۱.۱ برآورد E -بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ تحت تابع زیان درجه دوم در بخش دوم به دست می‌آید. در بخش سوم به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو، برآورد E -بیزی پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ با برآورد بیزی‌شان مقایسه می‌شود. بخش چهارم هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

توزیع نمایی دوپارامتری دارای کاربردهای متعددی در زمینه‌های شیمی، داروسازی و کشاورزی است. همچنین در قابلیت اعتماد، پارامتر مکان توزیع نمایی دوپارامتری به عنوان مدت ضمانت قطعه الکتریکی و پارامتر مقیاس به عنوان متوسط طول عمر استفاده می‌شود. در مطالعات زیست‌شناسی، پارامتر مکان، دوره پنهان بیماری و پارامتر مقیاس، مدت زمان بیماری علاوه بر مدت زمان پنهان بیماری نامیده می‌شود. بنا بر این برآورد پارامترهای آن اهمیت بسزایی دارد. محققان بسیاری به برآورد پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری به روش‌های مختلف پرداخته‌اند که می‌توان به برخی از آن‌ها مانند [۱، ۳، ۴، ۵، ۱۰، ۱۲] اشاره کرد. در این مقاله در ابتدا روش برآورد E -بیزی تعریف شده، سپس پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری به کمک این روش برآورد می‌شود.

تعریف ۱.۱. اگر $\hat{\theta}_B(b)$ برآورد بیزی θ و $h(b)$ توزیع پیشین b باشد، آن‌گاه برآورد E -بیزی θ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\theta}_{EB} = \int_{\Lambda} \hat{\theta}_B(b) h(b) db = E_b(\hat{\theta}_B), \quad b \in \Lambda.$$

با توجه به تعریف ۱.۱ واضح است که برآورد E -بیزی در واقع امید ریاضی برآورد بیزی پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}_B(b)$ است. از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارائه شده است. از روش‌های برآورد، روش بیزی مبتنی بر توزیع‌های پیشین است که انتخاب معقول آنها روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآورد گر پسین بیزی دارد.

^۱گروه آمار دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۲ برآورد E-بیز

بنا بر این توزیع پیشین توأم α و β به صورت زیر به دست می آید.

$$\pi(\alpha, \beta) = b_1 b_2 e^{-(\alpha b_1 + \beta b_2)} \quad (۶)$$

بر اساس نمونه تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ از توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ و با توجه به رابطه ۶، توزیع پسین توأم α و β به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha, \beta | \mathbf{X}) &= \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2) - \alpha(b_1 - n\beta)}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2) - \alpha(b_1 - n\beta)} d\alpha d\beta} \\ &= \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2) - \alpha(b_1 - n\beta)}}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} (1 - e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)})}{b_1 - n\beta} d\beta}, \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن $x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n)$ و $\beta > 0$ ، $0 < \alpha < x_{(1)}$ است. بنا بر این با توجه به رابطه ۷ برآوردهای بیزی α و β که به ترتیب با نمادهای $\hat{\alpha}_B$ و $\hat{\beta}_B$ نشان داده می شوند، تحت تابع زیان درجه دوم برابرند با

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_B(b_1) &= E(\alpha | \mathbf{X}) \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2) - \alpha(b_1 - n\beta)} d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} (1 - e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)})}{b_1 - n\beta} d\beta} \\ &= \frac{\int_0^\infty \beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} g(\beta) d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} (1 - e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)})}{b_1 - n\beta} d\beta}, \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $g(\beta)$ به صورت زیر است:

$$g(\beta) = \left[\frac{1}{(b_1 - n\beta)^2} - \frac{e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)}}{(b_1 - n\beta)^2} - \frac{x_{(1)} e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)}}{b_1 - n\beta} \right].$$

و

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_B(b_2) &= E(\beta | \mathbf{X}) \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \beta^{n+1} e^{-\beta(\bar{x} + b_2) - \alpha(b_1 - n\beta)} d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} (1 - e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)})}{b_1 - n\beta} d\beta} \\ &= \frac{\int_0^\infty \beta^{n+1} (b_1 - n\beta)^{-1} e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x} + b_2)} (1 - e^{-x_{(1)}(b_1 - n\beta)})}{b_1 - n\beta} d\beta}. \end{aligned} \quad (۹)$$

برای محاسبه انتگرالهای روابط ۸ و ۹ از روش شبیه سازی میانگین نمونه مونت کارلو استفاده می کنیم.

بنا بر این با توجه به روابط ۸ و ۹ و تعریف ۱.۱ برآوردهای

در این بخش در ابتدا برآورد بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ تحت تابع زیان درجه دوم

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

محاسبه و سپس برآورد E-بیزی آنها به دست آورده می شود. از آنجا که پیشنهادی برای توزیع توأم α و β وجود ندارد، مشابه کار [۱۱] فرض می کنیم α (پارامتر مکان) و β (پارامتر مقیاس) مستقل و دارای توزیع پیشین به صورت زیر هستند.

$$\pi_2(\beta | a_2, b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \beta^{a_2-1} e^{-b_2 \beta}, \alpha > 0, a_2, b_2 > 0. \quad (۲)$$

$$\pi_2(\beta | a_2, b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \beta^{a_2-1} e^{-b_2 \beta}, \alpha > 0, a_2, b_2 > 0. \quad (۳)$$

با توجه به [۶]، a_1 و b_1 طوری در نظر گرفته می شود تا $\pi_1(\alpha | a_1, b_1)$ نسبت به α کاهشی باشد. با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi_1(\alpha | a_1, b_1)}{d\alpha} = \frac{b_1^{a_1} \alpha^{a_1-2} e^{-b_1 \alpha}}{\Gamma(a_1)} ((a_1 - 1) - b_1 \alpha)$$

باید $1 \leq a_1 < 0$ و $b_1 > 0$ باشد. اما شرط $b_1 > 0$ باعث نمی شود که b_1 بتواند هر مقداری را در بازه $(0, \infty)$ بگیرد. [۲] نشان داد که بزرگ شدن b_1 باعث می شود کارایی برآوردگر بیزی α کاهش یابد بنا بر این ابر پارامتر b_1 به عنوان یک متغیر تصادفی باید از بالا کراندار شود و به صورت $0 < b_1 < c_1$ باشد. [۸] توزیع های مختلفی برای b_1 در نظر گرفت و نشان داد که مناسب ترین توزیع b_1 توزیع یکنواخت در بازه $(0, c_1)$ است. بنا بر این در این مقاله مشابه کار [۸]، توزیع b_1 یعنی $\pi_3(b_1)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_1)$ (با c_1 ثابت) در نظر گرفته می شود. همچنین با توجه به $0 < a_1 \leq 1$ بدون آن که به کلیت مسئله خللی وارد شود فرض می کنیم $a_1 = 1$ باشد، که در این صورت رابطه ۲ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\pi_1(\alpha | b_1) = b_1 e^{-\alpha b_1}. \quad (۴)$$

با استدلالی مشابه استدلال فوق در باره a_2 و b_2 ، توزیع b_2 یعنی $\pi_2(b_2)$ یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_2)$ با c_2 ثابت در نظر گرفته می شود. همچنین با فرض $a_2 = 1$ رابطه ۳ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\pi_2(\beta | b_2) = b_2 e^{-\beta b_2}. \quad (۵)$$

به کمک روابط (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) و به ازای b_1, b_2, c_1 و c_2 مشخص، برآوردهای بیزی و E -بیزی پارامترهای α و β را به دست می آوریم.

گام ششم: گام های اول تا پنجم را ۱۰۰۰ بار تکرار می کنیم و میانگین برآورد پارامترهای α و β و جذر میانگین توان های دوم خطای آن ها را به دست می آوریم، که نتایج شبیه سازی در جدول های ۱ تا ۴ آمده است. در این مقایسه برآوردگری بهتر است که جذر میانگین توان های دوم خطای آن کمتر باشد. بنا بر این نتایج جدول های ۱ تا ۴ نشان دهنده آن است که برای توزیع نمایی دو پارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ در حالت $\frac{b_1}{b_2} = 1$ (جدول های ۲ و ۴) برآورد E -بیزی پارامتر مکان (α) بهتر از برآورد بیزی آن است. اما در حالت های $\frac{b_1}{b_2} < 1$ (جدول ۱) و $\frac{b_1}{b_2} > 1$ (جدول ۳) برآورد بیزی α بهتر از برآورد E -بیزی آن است ولی برآورد E -بیزی پارامتر مقیاس (β) همواره بهتر از برآورد بیزی آن است. همچنین با افزایش اندازه نمونه، جذر میانگین توان های دوم خطای همه برآوردها کاهش می یابد.

۴ نتیجه گیری

در این مقاله برآوردهای E -بیزی پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری به دست آمد و با مقایسه آن ها با برآوردهای بیزی پارامترها با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو نشان داده شد که برآورد E -بیزی پارامتر مکان، تحت شرایطی بهتر از برآورد بیزی است ولی برآورد E -بیزی پارامتر مقیاس، همواره بهتر از برآورد بیزی آن است.

سپاسگزاری

نویسنده بر خود لازم می داند که از داوران و سردبیر مجله بابت راهنمایی های شان برای بهتر شدن این مقاله تشکر کند.

E -بیزی α و β به صورت های زیر به دست می آیند.

$$\hat{\alpha}_{EB} = \int_{\cdot}^{c_1} \hat{\alpha}_{Bay}(b_1) \pi_{\tau}(b_1) db_1 = \frac{\int_{\cdot}^{\infty} \int_{\cdot}^{c_1} \beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_1)} g(\beta) db_1 d\beta}{c_1 \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_1)} (1 - e^{-x(1)(b_1-n\beta)})}{b_1-n\beta} d\beta}, \quad (10)$$

$$\hat{\beta}_{EB} = \int_{\cdot}^{c_2} \hat{\beta}_{Bay}(b_2) \pi_{\tau}(b_2) db_2 = \frac{\Gamma(n+1) S(\alpha) e^{-\alpha b_1}}{n c_2 \int_{\cdot}^{\infty} \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)} (1 - e^{-x(1)(b_2-n\beta)})}{b_2-n\beta} d\beta}, \quad (11)$$

که

$$S(\alpha) = (\bar{x} - n\alpha)^{-n} - (\bar{x} + c_2 - n\alpha)^{-n}.$$

۳ مطالعه شبیه سازی

در این بخش از توزیع نمایی دو پارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ نمونه های تصادفی با اندازه های متفاوت شبیه سازی می شود و برآوردهای بیزی و E -بیزی پارامترهای α و β محاسبه و با هم مقایسه می شوند. مراحل شبیه سازی در زیر آمده است:

گام اول: به ازای b_1 مشخص، از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال ۴، پارامتر α را تولید می کنیم.

گام دوم: به ازای b_2 مشخص، از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال ۵، پارامتر β را تولید می کنیم.

گام سوم: از توزیع یکنواخت استاندارد، نمونه های تصادفی با اندازه های ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ تولید می کنیم.

گام چهارم: به کمک α و β تولید شده به ترتیب در گام های اول و دوم و با استفاده از رابطه $X = \alpha - \frac{1}{\beta} \log(1 - U)$ نمونه های تصادفی با اندازه های ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ از توزیع با تابع چگالی احتمال ۱ که U متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت استاندارد می باشد، تولید می کنیم.

گام پنجم: با استفاده از نمونه های تولید شده در گام دوم و

جدول ۱. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $c_1 = 2/5$ و $c_2 = 3$.

$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\alpha}_B$	n
$5/34 \times 10^{-4}$	$9/02 \times 10^{-8}$	25/68	600/7	$8/11 \times 10^{-4}$	$2/08 \times 10^{-7}$	1/313	1/668	5
$3/24 \times 10^{-11}$	$4/18 \times 10^{-22}$	20/69	500/8	$4/39 \times 10^{-12}$	$7/66 \times 10^{-22}$	1/438	1/618	10
$1/82 \times 10^{-23}$	$1/30 \times 10^{-46}$	20/04	300/6	$2/37 \times 10^{-23}$	$2/21 \times 10^{-46}$	1/115	1/058	20
$4/12 \times 10^{-56}$	$5/38 \times 10^{-112}$	10/05	88/03	$5/27 \times 10^{-56}$	$8/79 \times 10^{-112}$	0/7631	0/5488	30
$1/94 \times 10^{-66}$	$1/19 \times 10^{-132}$	1/861	2/451	$2/75 \times 10^{-66}$	$2/39 \times 10^{-132}$	0/6247	0/2538	40
$3/52 \times 10^{-95}$	$3/93 \times 10^{-90}$	0/8544	1/514	$4/69 \times 10^{-95}$	$6/90 \times 10^{-90}$	0/5536	0/4541	50

جدول ۲. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = b_2 = 1/5$, $c_1 = c_2 = 2$.

$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\alpha}_B$	n
$2/84 \times 10^{-6}$	$3/80 \times 10^{-6}$	0/8467	0/4682	$3/19 \times 10^{-6}$	$4/77 \times 10^{-12}$	1/519	1/931	5
$[2/2410^{-14}]$	$1/58 \times 10^{-28}$	0/7543	0/3804	$2/45 \times 10^{-14}$	$1/91 \times 10^{-28}$	1/481	1/647	10
$1/10 \times 10^{-24}$	$3/85 \times 10^{-49}$	0/4933	0/2095	$1/19 \times 10^{-24}$	$4/54 \times 10^{-49}$	0/8889	0/7692	20
$2/63 \times 10^{-56}$	$2/19 \times 10^{-112}$	0/2724	0/0648	$2/85 \times 10^{-56}$	$2/56 \times 10^{-112}$	0/6075	0/3938	30
$9/82 \times 10^{-61}$	$3/05 \times 10^{-153}$	0/2260	0/0545	$1/06 \times 10^{-60}$	$3/56 \times 10^{-153}$	0/5131	0/3344	40
$9/72 \times 10^{-65}$	$3/02 \times 10^{-129}$	0/2106	0/0706	$1/05 \times 10^{-64}$	$3/53 \times 10^{-229}$	0/5072	0/3319	50

جدول ۳. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $c_1 = 2$ و $c_2 = 2$.

$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\alpha}_B$	n
$6/20 \times 10^{-5}$	$1/40 \times 10^{-9}$	2/359	3/099	$8/39 \times 10^{-5}$	$2/49 \times 10^{-9}$	1/191	1/138	5
$1/81 \times 10^{-10}$	$1/03 \times 10^{-20}$	1/888	1/583	$2/22 \times 10^{-10}$	$1/56 \times 10^{-20}$	0/7565	0/6723	10
$2/83 \times 10^{-27}$	$2/53 \times 10^{53}$	0/9104	0/2302	$3/38 \times 10^{-27}$	$3/62 \times 10^{-54}$	0/6671	0/3883	20
$6/44 \times 10^{-50}$	$1/33 \times 10^{-99}$	0/6952	0/5718	$7/65 \times 10^{-50}$	$1/87 \times 10^{-99}$	0/5427	0/5800	30
$3/97 \times 10^{-59}$	$5/01 \times 10^{-118}$	0/5809	1/759	$4/7110^{-59}$	$7/01 \times 10^{-118}$	0/4311	1/025	40
$6/05 \times 10^{-66}$	$1/157 \times 10^{-131}$	0/4042	2/319	$7/14 \times 10^{-66}$	$1/61 \times 10^{-131}$	0/3888	0/9264	50

جدول ۴. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = b_2 = 3$ و $c_1 = c_2 = 4$.

$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\alpha}_B$	n
$6/39 \times 10^{-5}$	$1/29 \times 10^{-9}$	0/4629	0/3394	$7/65 \times 10^{-5}$	$1/85 \times 10^{-9}$	0/9593	0/9297	5
$2/84 \times 10^{-19}$	$2/73 \times 10^{-38}$	0/3113	0/1118	$2/84 \times 10^{-19}$	$3/75 \times 10^{-38}$	0/8184	0/3855	10
$9/24 \times 10^{-35}$	$2/71 \times 10^{-69}$	0/1761	0/0226	$1/06 \times 10^{-34}$	$3/60 \times 10^{-69}$	0/7255	0/5276	20
$2/55 \times 10^{-45}$	$2/23 \times 10^{-90}$	0/1218	0/0128	$2/93 \times 10^{-45}$	$2/94 \times 10^{-90}$	0/6829	0/5531	30
$4/43 \times 10^{-54}$	$6/22 \times 10^{-108}$	0/1019	0/0098	$5/08 \times 10^{-54}$	$8/19 \times 10^{-108}$	0/6463	0/4310	40
$2/93 \times 10^{-71}$	$2/71 \times 10^{-142}$	0/0956	0/0078	$3/35 \times 10^{-71}$	$3/56 \times 10^{-142}$	0/5694	0/4087	50

مراجع

- [1] Beg, M. A. (1980). On the estimation of $P(Y < X)$ for the two-parameter exponential distribution. *Metrika*, **27**, 29-34.
- [2] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. second ed. Springer, New York.
- [3] Cramer, E. and Tamm, M. (2014). On a Correction of the scale MLE for a two-parameter exponential distribution under progressive type-I censoring. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **43**, 4401-4414.
- [4] Epstein, B. (1960). Estimation of the parameters of two parameter exponential distributions from censored samples. *Tecnometrics*, **2**, 403-406.
- [5] Ganguly, A., Mitra, S., Samanta, D. and Kundu, D. (2012). Exact inference for the two-parameter exponential distribution under type-II hybrid censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 613-625.
- [6] Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its applications. *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**, 31-40.
- [7] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.
- [8] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from binomial distribution. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.
- [9] Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.
- [10] Jiang, L. and Wong, A. C. M. (2012). Interval estimations of the two-parameter exponential distribution. *Journal of Probability and Statistics*, doi:10.1155/2012/734575.
- [11] Kundu, D. and Gupta, R.D. (2008). Generalized exponential distribution, Bayesian inference. *Computational Statistic and Data Analysis*, **52**, 1872-1883.
- [12] Lam, K., Sinha, B. K. and Wu, Z. (1994). Estimation of Parameters in a two-Parameter exponential distribution using ranked set sample. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 723-736.
- [13] Varde, S. D. (1969). Life testing and reliability estimation for the two parameter exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **64**, 621-631.
- [14] Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of the system reliability parameter. *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.