

بحثی در اندازه اهمیت توأم اجزاء در سیستم‌های k از n

مرضیه باغبان سیجانی^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۴/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده:

این مقاله مطالعه‌ای در اندازه اهمیت توأم، JRI ، اجزای در سیستم‌های منسجم k از n با اجزای مستقل از هم است. JRI نرخ بهبود قابلیت اعتماد سیستم به سبب بهبود قابلیت اعتماد دو یا چند جزء است. علامت و مقدار JRI نشان‌دهنده نوع و میزان تأثیر متقابل اجزای بر حسب قابلیت اعتماد سیستم است. البته در حالاتی خاص می‌توان علامت JRI را بدون محاسبه تعیین کرد. از این اندازه در تعیین اولویت اجزای برای تعمیر و نگهداری پیشگیرانه سیستم‌ها و تعیین سطح افزونگی سیستم‌های k از n استفاده می‌شود. **واژه‌های کلیدی:** افزونگی، اندازه اهمیت توأم، تعمیر، سیستم‌های k از n .

۱ مقدمه

TOI را تعریف کردند.

این مقاله مطالعه‌ای در زمینه اندازه اهمیت توأم اجزاء در سیستم‌های منسجم با اجزای مستقل از هم است. در بخش ۲ به تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم. در بخش ۳ اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که در آن علامت JRI دو جزء بر حسب نوع تأثیر متقابل اجزای بررسی شده است. در بخش ۴ مقدار این اندازه برای دو جزء در سیستم‌های k از n به طور جداگانه بررسی شده است. در بخش ۵ این اندازه را برای k جزء مورد مطالعه قرار داده ایم که در آن، علامت و مقدار JRI برای سه جزء در سیستم‌های k از n بررسی شده است.

هر سیستم، مجموعه‌ای از اجزای است که برای هدفی معین طراحی شده و لزوماً همه اجزای سیستم، اهمیت یکسانی برای کارایی آن ندارند. لذا یکی از اهداف تحلیل قابلیت اعتماد شناسایی اجزایی است که بیشترین اهمیت را برای بهبود سیستم یا بیشترین بحران را برای شکست آن ایجاد می‌کنند.

بیرنهام [۳] بر مبنای ساختار و قابلیت اعتماد اجزای، اولین اندازه اهمیت را بر حسب احتمال بحرانی بودن یک جزء در سیستم‌های منسجم تعریف کرد. این اندازه به اندازه اهمیت بیرنهام، I_B ، معروف است. هانگ و لی [۶] اندازه I_B را توسعه داده، مفهوم اندازه اهمیت توأم^۲ (JRI) را برای دو جزء در یک سیستم با اجزای مستقل تعریف کردند.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۲ سیستم و اجزای آن

فرض کنید سیستمی n جزء دارد و هر جزء در آن فعال یا غیرفعال است. برای توصیف این وضعیت، یک متغیر دوقماری X_i ، $i = 1, \dots, n$ ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{جزء } c_i \text{ فعال است} \\ 0, & \text{جزء } c_i \text{ غیرفعال است} \end{cases}$$

همچنین فرض می‌کنیم که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیرفعال است. برای تعیین وضعیت سیستم برحسب

آرمسترانگ [۲] اندازه JRI را در حالتی که بین اجزای وابستگی است، مورد مطالعه کرد. این اندازه برای سیستم‌های چندحالتی توسط وو [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. هانگ و همکاران [۷]، اندازه JRI اجزای را در سیستم‌هایی با ساختار k از n مطالعه کردند و به بررسی برخی از ویژگی‌های آن پرداختند. جان و چانگ [۸] مجدداً این ویژگی‌ها را مورد مطالعه قرار داده، به تصحیح و تکمیل برخی از این نتایج پرداختند. گائو و همکاران [۴] مفهوم JRI را برای گروهی از اجزای مستقل توسعه دادند. بر اساس JRI مرتبه k ، کو و ژو [۹] اندازه اهمیت مرتبه کلی،

^۱ دانش‌آموخته کارشناس ارشد آمار دانشگاه اصفهان

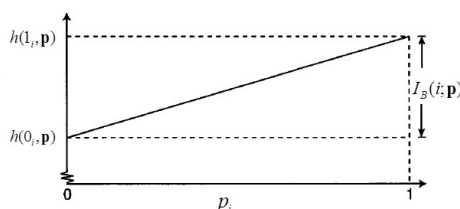
^۲ Joint Reliability Importance

تعریف می‌شود:

$$I_B(i; \mathbf{p}) = \frac{\partial h(\mathbf{p})}{\partial p_i}. \quad (1)$$

بزرگ بودن I_B یعنی یک تغییر کوچک در قابلیت اعتماد جزء c_i می‌تواند باعث افزایش قابلیت اعتماد سیستم شود.

اندازه اهمیت بیرنجام به صورت نموداری در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودار اندازه اهمیت بیرنجام

بنا بر رابطه

$$I_B(i; \mathbf{p}) = h(\mathbf{1}_i, \mathbf{p}^{(i)}) - h(\mathbf{0}_i, \mathbf{p}^{(i)}),$$

می‌توان گفت که اندازه اهمیت بیرنجام، معادل است با میزان افزایش قابلیت اعتماد سیستم وقتی که قابلیت اعتماد جزء c_i یک واحد افزایش می‌یابد. بنا بر رابطه

$$I_B(i; \mathbf{p}) = P(\varphi(\mathbf{1}_i, \mathbf{x}^{(i)}) - \varphi(\mathbf{0}_i, \mathbf{x}^{(i)}) = 1),$$

اندازه $I_B(i; \mathbf{p})$ ، احتمال آن است که جزء c_i برای سیستم بحرانی باشد. به عبارتی احتمال آن است که کارکرد یا عدم کارکرد جزء c_i سبب کارکرد یا عدم کارکرد سیستم شود. با استفاده از این رابطه، حدود I_B در نتیجه ذیل حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲. برای یک سیستم منسجم با $n \geq 2$ و $i = 1, \dots, n$

$$0 \leq I_B(i; \mathbf{p}) \leq 1$$

۳ اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو

جزء

اگرچه I_B برای رتبه‌بندی اجزای بر حسب کاهش یا افزایش اندازه اهمیتشان مورد استفاده قرار می‌گیرد و مهم‌ترین جزء را در افزایش قابلیت اعتماد سیستم تعیین می‌کند، I_B حاوی همه اطلاعات مربوط به تأثیر متقابل بین اجزای در قابلیت اعتماد سیستم نیست؛ به عبارتی تعیین‌کننده میزان تغییر اهمیت یک جزء در صورت فعال یا غیرفعال بودن جزء دیگر نیست. به این

وضعیت اجزای، فرض می‌شود که پیوند سیستم با اجزای آن، با تابع دومقداری $\varphi(\mathbf{X})$ ، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص می‌شود که در آن $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

بردار $\mathbf{X}$ را بردار وضعیت سیستم می‌گوییم. بنا براین، با در نظر گرفتن وضعیت بردار $\mathbf{X}$ داریم

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{سیستم فعال است} \\ 0, & \text{سیستم غیرفعال است} \end{cases}$$

شکل تابعی $\varphi(\mathbf{X})$ ، پس از آن که نوع ارتباط بین اجزای در سیستم معلوم شود، قابل تعیین خواهد بود.

تعریف ۱.۲. یک سیستم را زمانی منسجم می‌نامند که تابع ساختار آن یکنوا بوده، جزء نامربوط در آن وجود نداشته باشد.

۲.۲ سیستم‌های k از n

یک سیستم شامل n جزء را k از n می‌نامند هرگاه فعال بودن آن، مستلزم فعال بودن حداقل k جزء از n جزء آن باشد. نمایش جبری تابع ساختار سیستم‌های k از n به صورت زیر است:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ذکر این نکته ضروری است که سیستم متوالی، یک سیستم n از n ، سیستم موازی، یک سیستم ۱ از n است.

۳.۲ بردارهای مسیر و بردارهای قطع‌کننده

تعریف ۲.۲. یک مسیر مینیمال، بردار وضعیتی است که به‌ازای آن سیستم فعال است و اگر حداقل یکی از اجزای فعال آن بردار، غیرفعال شود، سیستم نیز غیرفعال خواهد شد.

تعریف ۳.۲. بردار قطع‌کننده مینیمال، برداری است که به‌ازای آن سیستم از کار می‌افتد و چنانچه حداقل یکی از اجزای آن بردار فعال شود، سیستم ممکن است شروع به کار کند.

۴.۲ اندازه اهمیت بیرنجام

یک سیستم منسجم با تابع ساختار φ با n جزء مستقل $c_1, \dots, c_n$ را در نظر بگیرید که قابلیت اعتماد جزء c_i ، p_i است و $h(\mathbf{p})$ قابلیت اعتماد سیستم است. اندازه اهمیت بیرنجام جزء c_i به صورت زیر

ج) $I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0$ معادل است با $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) = I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$ در این صورت، I_B جزء c_j در حالتی که جزء c_i در سیستم غیرفعال، باشد برابر است با حالتی که جزء c_i در سیستم فعال است.

قضیه ۴.۳ در حالتی که متغیرها مستقل یا وابسته باشند، برقرار است.

قضیه ۴.۳ الف) اگر هیچ مسیر مینیمالی شامل هر دو جزء c_i و c_j وجود نداشته باشد، آن گاه

$$I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) \leq 0.$$

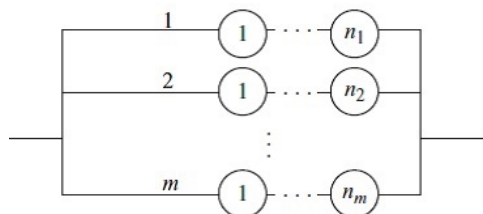
ب) اگر هیچ قطع کننده مینیمالی شامل هر دو جزء c_i و c_j وجود نداشته باشد، آن گاه

$$I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) \geq 0.$$

بنا بر قضیه فوق، در حالتی که دو جزء به صورت متوالی به هم متصل هستند علامت $I_{JR^{II}}$ مثبت است و در حالتی که دو جزء به صورت موازی به هم متصل هستند علامت $I_{JR^{II}}$ منفی است.

تذکر ۵.۳ دو جزء، مکمل (جانشین) قابلیت اعتماد یکدیگر هستند اگر با فعال بودن یکی از این دو جزء، اهمیت جزء دیگر افزایش (کاهش) یابد [۵]. بنا بر این، دو جزء، مکمل (جانشین) قابلیت اعتماد یکدیگر هستند اگر علامت JRI آن‌ها غیر منفی (غیر مثبت) باشد.

مثال ۶.۳ یک سیستم موازی-متوالی با اجزای $i.i.d.$ و قابلیت اعتماد یکسان p را مانند شکل ۲ در نظر بگیرید.



شکل ۲. سیستم با ساختار موازی-متوالی

فرض کنید سیستم دارای k زیر سیستم متوالی با n_k جزء در k امین زیرسیستم، $k = 1, \dots, m$ ، باشد. بنا بر این، قابلیت اعتماد سیستم برابر است با $h(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{k=1}^m (1 - p^{n_k})$ دو جزء c_j و c_i در زیرسیستم k ، به صورت زیر محاسبه می شود

$$I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = p^{n_k-2} \prod_{r \neq k} (1 - p^{n_r}) \geq 0.$$

منظور هانگ و لی [۷] اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء c_j و c_i ، $I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p})$ را به صورت زیر تعریف کردند:

$$I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}^{(ij)}) = \frac{\partial^2 h(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}. \quad (2)$$

برحسب اندازه فوق، از لحاظ تعمیر و نگهداری و یا حتی انتخاب اجزای با هزینه و کیفیت بیشتر، دو جزئی بیشتر مورد توجه قرار می گیرند که JRI بزرگتری داشته باشند.

هانگ و لی [۷] در قضیه ۱.۳ رابطه بین I_B و $I_{JR^{II}}$ را در یک سیستم منسجم به دست آوردند.

فرض کنید نماد $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$ نشان دهنده اندازه اهمیت بیرنجام جزء c_j به شرط فعال بودن جزء c_i در سیستم و نماد $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$ نشان دهنده اندازه اهمیت بیرنجام جزء c_j به شرط غیرفعال بودن جزء c_i در سیستم باشد.

قضیه ۱.۳ در سیستم منسجم (N, φ) با اجزای مستقل $c_1, \dots, c_n$ داریم الف)

$$I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) - I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}).$$

ب)

$$I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = I_B(i; \cdot_j, \mathbf{p}^{(i)}) - I_B(i; \cdot_j, \mathbf{p}^{(i)}).$$

بر اساس این قضیه، JRI مقداری مثبت، منفی یا صفر است. در اصل JRI دو جزء نشان دهنده میزان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد یک جزء در حضور یا عدم حضور جزء دیگر است که بر اساس آن، نتایج ذیل حاصل می شود.

نتیجه ۲.۳ برای هر دو جزء c_j و c_i

$$-1 \leq I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) \leq 1.$$

نتیجه ۳.۳ الف) $I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) \geq 0$ معادل است با $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) \geq I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$ در این صورت، جزء c_j در حالتی که جزء c_i در سیستم فعال است، I_B بزرگتری دارد نسبت به حالتی که جزء c_i در سیستم غیرفعال است.

ب) $I_{JR^{II}}(i, j; \mathbf{p}) \leq 0$ معادل است با $I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)}) \leq I_B(j; \cdot_i, \mathbf{p}^{(i)})$ در این صورت، جزء c_j در حالتی که جزء c_i در سیستم غیرفعال است، I_B بزرگتری دارد نسبت به حالتی که جزء c_i در سیستم فعال است.

۱.۴ مقایسه JRI دو جزء در یک سیستم k از n

در این قسمت تغییر JRI اجزای را در سیستم‌های k از n از دو جهت مطالعه می‌کنیم. ابتدا تغییر JRI را بر حسب تغییر p و n در یک نقطه ثابت k ($2 =$) و سپس تغییر آن را بر حسب تغییر p و k در نقطه ثابت n مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۳.۴. برای سیستم‌های 2 از n با اجزای *i.i.d.*

$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = (1-p)^{n-2} [1 - (1-n)p] \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{p \rightarrow 0} I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = 1 \quad (\text{ب})$$

(ج) کمترین مقدار I_{JRI}^{II} برابر است با $-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$ و این مقدار به‌ازای $p = \frac{2}{n-1}$ به دست می‌آید.

(د) برای $n \geq 5$ ، نمودار I_{JRI}^{II} دارای نقطه عطف $\left[\frac{3}{n-1}, -2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}\right]$ است.

بر اساس قضیه ۳.۴، در یک سیستم 2 از n با افزایش قابلیت اعتماد اجزای، اندازه اهمیت توأم دو جزء کاهش می‌یابد و هنگامی که $p \rightarrow 1$ ، JRI دو جزء صفر می‌شود.

قضیه ۴.۴. فرض کنید که $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p})$ اندازه اهمیت توأم دو جزء c_i و c_j برای سیستم 2 از n باشد. در این صورت رابطه بین JRI سیستم 2 از n و سیستم 2 از $n+1$ به‌صورت ذیل است.

(الف) $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) < I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p})$ اگر $0 < p < \frac{2}{n}$

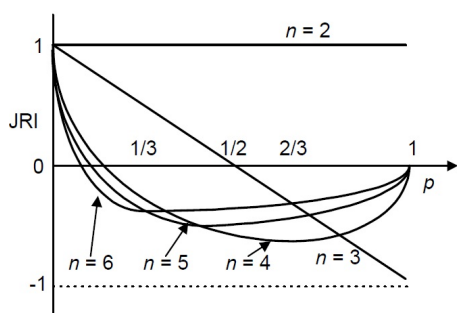
(ب) $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p})$ اگر $p = \frac{2}{n}$

(ج) $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) > I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p})$ اگر $\frac{2}{n} < p < 1$

برای تعیین سطح بهینه‌ای از افزونگی در ساختارهای k از n به تغییرات JRI در سیستم‌های 2 از n به شکل ۳ توجه فرمایید. از شکل ۳ نتایج ذیل حاصل می‌شود.

□ برای $n \geq 4$ با افزایش قابلیت اعتماد اجزای، p اندازه اهمیت توأم دو جزء c_i و c_j به صفر میل می‌کند.

□ برای $n \geq 4$ و مقادیر بزرگ p با افزایش n ، مقدار قدر مطلق JRI دو جزء c_i و c_j کاهش می‌یابد.



شکل ۳. تغییرات JRI بر حسب سطح افزونگی در یک سیستم 2 از n

I_{JRI}^{II} جزء c_i در زیرسیستم k و جزء c_j در زیرسیستم k' به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$I_{JRI}^{II}(i, j; p) = -p^{n_k - n_{k'} - 2} \prod_{r \neq k, k'} (1 - p^{n_r}) \leq 0.$$

با توجه به مثال فوق، JRI دو جزئی که در یک سیستم به‌صورت متوالی به یکدیگر متصل هستند، مثبت است و JRI دو جزئی که در یک سیستم به‌صورت موازی به یکدیگر متصل باشند، منفی است.

۴ JRI دو جزء در سیستم‌های k از n

قضیه زیر، شکل بسته‌ای برای JRI دو جزء در یک سیستم k از n با اجزای *i.i.d.* است. بر مبنای این قضیه می‌توان تفاوت مقدار اندازه اهمیت JRI دو جزء را بر حسب قابلیت اعتماد اجزای و پارامترهای k و n بررسی کرد.

قضیه ۱.۴. برای $n \geq 0$ و $2 \leq k \leq n$ ، I_{JRI}^{II} برای سیستم k از n با اجزای *i.i.d.* برای دو جزء c_i و c_j به‌صورت زیر تعیین می‌شود

$$I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = p^{k-2} (1-p)^{n-k-1} \times \left[\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-1}{k-1} p \right] \quad (3)$$

نتیجه زیر از قضیه ۱.۴ حاصل می‌شود که بر اساس آن با آگاهی از مقدار p می‌توان علامت JRI را تعیین کرد.

نتیجه ۲.۴. برای $n \geq 0$ و $2 \leq k \leq n$ ، علامت I_{JRI}^{II} برای سیستم k از n با اجزای *i.i.d.* برای دو جزء c_i و c_j به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

(الف) اگر $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) > 0$

$$0 < p < \frac{k-1}{n-1}.$$

(ب) اگر $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) = 0$

(ج) اگر $I_{JRI}^{II}(i, j; \mathbf{p}) < 0$

$$\frac{k-1}{n-1} < p < 1.$$

طبق نتیجه ۲.۴ به‌راحتی می‌توان تعیین کرد که در چه شرایطی اجزای جانشین قابلیت اعتماد یا مکمل قابلیت اعتماد یکدیگر هستند.

۵ اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم k جزء

گائو و همکاران [۴] مفهوم اندازه اهمیت توأم JRI را برای k جزء در سیستم به صورت زیر توسعه دادند:

$$I_{JR^k}(c_1, \dots, c_k) = \frac{\partial^k h(\mathbf{p})}{\prod_{i=1}^k \partial p_i}.$$

قضیه ۱.۵. در صورتی که اجزای از یکدیگر مستقل باشند، اهمیت قابلیت اعتماد نسبی توأم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} I_{JR^k}(c_1, \dots, c_k) &= h(1_1, \dots, 1_k, \mathbf{p}) \\ &\quad - h(1_1, 1_2, \dots, 1_k, \mathbf{p}) \pm \dots \pm h(1_1, 1_2, \dots, 1_k, \mathbf{p}) \\ &\quad \pm h(1_1, 1_2, \dots, 1_k, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (۴)$$

بررسی علامت مثبت و منفی قبل از تابع h در رابطه ۴ بر مبنای اصول زیر تعیین می شود.

(الف) اگر عدد k فرد باشد، در صورتی که تعداد متناظر با ۱ها نیز فرد باشد، علامت قبل از تابع h مثبت و در غیر این صورت منفی است.

(ب) اگر عدد k زوج باشد، در صورتی که تعداد متناظر با ۱ها نیز زوج باشد، علامت قبل از تابع h مثبت و در غیر این صورت منفی است.

(ج) علامت قبل از تابع $h(1_1, \dots, 1_k, \mathbf{p})$ نیز به این صورت تعیین می شود که اگر k فرد باشد، منفی و در غیر این صورت مثبت است.

نتیجه ۲.۵. تساوی زیر میان JRI برای k جزء و JRI مراتب پایین تر برقرار است.

$$\begin{aligned} I_{JR^k}(c_1, \dots, c_k) &= I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s * c_k} \\ &\quad I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s - c_k}. \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن $I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s * c_k}$ نشان دهنده اثر توأم $k-1$ جزء در سیستم است، در صورتی که جزء c_k آن فعال باشد و $I_{JR^{k-1}}(c_1, \dots, c_{k-1})_{s - c_k}$ به این معنا است که جزء c_k در سیستم غیر فعال است.

در حقیقت، JRI برای k جزء نشان دهنده میزان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد $k-1$ جزء در حضور یا عدم حضور جزء دیگر است.

این اطلاعات برای تعیین سطح افزونگی در یک سیستم k از n بر حسب مقدار p مفید است. به عنوان مثال، می توان مقدار n را طوری تعیین کرد که اجزای جانشین قابلیت اعتماد یکدیگر باشند. به این منظور، اگر $n < \frac{1+p}{p}$ ترجیح داده می شود که سطح افزونگی افزایش یابد؛ زیرا در حالتی که $n < \frac{1+p}{p}$ اجزاء مکمل قابلیت اعتماد یکدیگر هستند.

در سیستم های ۲ از n ، اگر $p > \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه $|I_{JR_{i,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p})| > |I_{JR_{i,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p})|$. به عبارتی اگر قابلیت اعتماد اجزای بیش از $\frac{1}{2}$ باشد، افزایش سطح افزونگی سبب کاهش شدت اثر متقابل دو جزء c_i و c_j می شود. در قضیه زیر، تغییرات JRI را می توان با تغییر k و p بررسی کرد.

قضیه ۵.۴. (الف)

برای $2 \leq k \leq n$ ، در سیستم های k از n داریم

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0.$$

(ب) برای $2 \leq k \leq n-1$ ، در سیستم های k از $n-1$ داریم

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_{JR_{n-1,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} I_{JR_{n-1,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = -1.$$

طبق قضیه ذیل می توان JRI سیستم k از n را با سیستم k از $n+1$ بر مبنای مقدار p مقایسه نمود.

قضیه ۶.۴. با فرض این که $a = \sqrt{\frac{(k-1)(n-k+1)}{n-1}}$ باشد، رابطه $I_{JR^{II}}$ سیستم k از n با سیستم k از $n+1$ به صورت زیر است. (الف) برای $0 < p < \frac{k-1-a}{n}$ یا $\frac{k-1+a}{n} < p < 1$ خواهیم داشت

$$I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) < I_{JR_{k,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p}).$$

(ب) برای $p = \frac{k-1+a}{n}$ خواهیم داشت

$$I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) = I_{JR_{k,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p}).$$

(ج) برای $\frac{k-1-a}{n} < p < \frac{k-1+a}{n}$ خواهیم داشت

$$I_{JR_{k,n}^{II}}(i, j; \mathbf{p}) > I_{JR_{k,n+1}^{II}}(i, j; \mathbf{p}).$$

۱.۵ علامت JRI برای سه جزء

برقرار است:

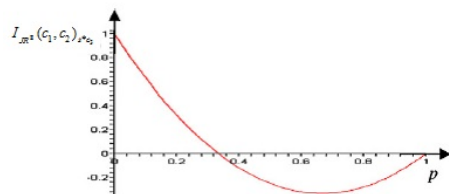
$$I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) = \epsilon p^2 - \epsilon p + 1,$$

$$I_{JRII}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 2p - 3p^2,$$

$$I_{JRII}(c_1, c_2)_{s*c_3} = I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) +$$

$$I_{JRII}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 1 - 4p + 3p^2.$$

شکل ۵، $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s*c_3}$ را برای مقادیر مختلف p نشان می‌دهد.



شکل ۵. $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s*c_3}$ برای سیستم ۳ از ۵

از شکل ۵ نتایج زیر حاصل می‌شود.

□ اگر $p \in [0, \frac{1}{3})$ آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s*c_3} > 0$. بنا بر

این، $I_B(c_1)_{s*c_3*c_2} > I_B(c_1)_{s*c_3-c_2}$

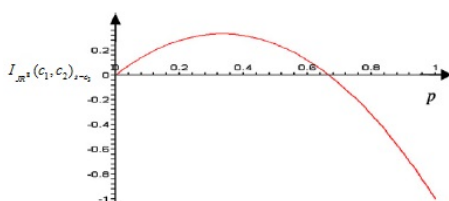
یعنی، در یک سیستم ۳ از ۵ برای $p \in [0, \frac{1}{3})$ جزء c_1 در صورت فعال بودن c_2 و c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_3 فعال و c_2 غیرفعال باشد.

□ اگر $p \in (\frac{1}{3}, 1)$ آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s*c_3} < 0$. بنا

بر این، $I_B(c_1)_{s*c_3*c_2} < I_B(c_1)_{s*c_3-c_2}$. یعنی به‌ازای $p \in (\frac{1}{3}, 1)$ جزء c_1 در صورت غیرفعال بودن c_2 و فعال بودن c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_2 و c_3 هر دو فعال باشند.

□ اگر $p = \frac{1}{3}$ آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s*c_3} = 0$. یعنی به‌ازای $p = \frac{1}{3}$ اهمیت جزء c_1 در دو حالتی که c_2 و c_3 هر دو فعال یا c_2 غیرفعال و c_3 فعال باشد، یکسان است.

شکل ۶، $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s-c_3}$ را برای مقادیر مختلف p نشان می‌دهد.



شکل ۶. $I_{JRII}(c_1, c_2)_{s-c_3}$ برای سیستم ۳ از ۵

از این شکل، نتایج ذیل حاصل می‌شود.

در نتیجه ذیل از قضیه ۲.۵، به بررسی حالات خاصی می‌پردازیم که بر اساس آن می‌توان علامت JRI سه جزء را بدون محاسبه تعیین کرد.

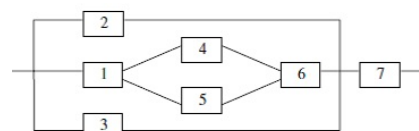
نتیجه ۳.۵. الف) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ موازی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت موازی باشند، آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$.

ب) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ موازی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت متوالی باشند، آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) \leq 0$.

ج) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ متوالی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت موازی باشند، آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) \leq 0$.

د) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ متوالی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت متوالی باشند، آن گاه $I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$.

مثال ۴.۵. یک سیستم متوالی-موازی شامل ۷ جزء $i.i.d.$ با قابلیت اعتماد یکسان p با ساختار شکل ۴ را در نظر بگیرید.



شکل ۴. سیستم مثال ۴.۵

اجزای c_2 و $\{c_1, c_6\}$ در حالت موازی و c_1 و c_6 با یکدیگر در حالت متوالی هستند. لذا، بر اساس قسمت (ب) از نتیجه ۳.۵ داریم $I_{JRII}(c_1, c_2, c_6) \leq 0$. اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ در حالت موازی و c_1 و c_2 نیز با یکدیگر در حالت موازی هستند. بنا بر این، طبق قسمت (الف) از نتیجه ۳.۵ داریم $I_{JRII}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$.

۲.۵ JRI سه جزء در سیستم‌های k از n

گائو و همکاران [۴]، اندازه اهمیت توأم سه جزء را در سیستم‌های k از n مطالعه کردند و برای حالتی که اجزای $i.i.d.$ هستند، صورت بسته‌ای برای JRI به دست آوردند.

مثال ۵.۵. یک سیستم ۳ از ۵ را در نظر بگیرید. با فرض آن که قابلیت اعتماد همه اجزای یکسان و برابر p باشد، روابط زیر

□ به ازای $p \in [0, \frac{2}{n-1})$ بر اساس قضیه فوق، در صورتی که $p < \frac{2}{n-1}$ باشند، آن گاه

افزایش n سبب کاهش اثر توأم سه جزء در قابلیت اعتماد سیستم می شود.

در ادامه به مثالی در این زمینه توجه فرمایید.

مثال ۷.۵. برای سیستم ۳ از n با n های متفاوت، $I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3)$ را برای حالت های زیر، محاسبه می کنیم.

$$k = 3, \quad n = 5,$$

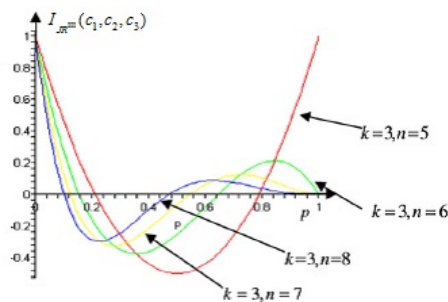
$$k = 3, \quad n = 6,$$

$$k = 3, \quad n = 7,$$

$$k = 3, \quad n = 8.$$

با توجه به شکل ۷، به ازای مقدار ثابت $k = 3$ و مقادیر مختلف $p \in (0, 1)$ به وضوح مشاهده می کنیم که برای $p < \frac{2}{n-1}$ داریم:

$$I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3) > I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3).$$



شکل ۷. $I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3)$ سیستم های ۳ از n

$$I_{JR^{II}}(c_1, c_2)_{s-c_3} > 0.$$

بنا بر این، $I_B(c_1)_{s-c_3*c_2} > I_B(c_1)_{s-c_3-c_2}$ یعنی به ازای $p \in [0, \frac{2}{n-1})$ جزء c_1 در صورت فعال بودن c_2 و غیرفعال بودن c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_2 و c_3 هر دو غیرفعال باشند.

□ به ازای $p \in (\frac{2}{n-1}, 1)$

$$I_{JR^{II}}(c_1, c_2)_{s-c_3} < 0.$$

بنا بر این، $I_B(c_1)_{s-c_3*c_2} < I_B(c_1)_{s-c_3-c_2}$ یعنی به ازای $p \in (\frac{2}{n-1}, 1)$ جزء c_1 در صورت غیرفعال بودن c_2 و c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_2 فعال و c_3 غیرفعال باشد.

□ به ازای $p = \frac{2}{n-1}$

$$I_{JR^{II}}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 0.$$

یعنی به ازای $p = \frac{2}{n-1}$ اهمیت جزء c_1 در دو حالتی که c_2 و c_3 هر دو غیرفعال یا c_2 فعال و c_3 غیرفعال باشند، یکسان است.

قضیه زیر تأثیر افزایش سطح افزونگی را در یک سیستم ۳ از n بر روی JRI سه جزء نشان می دهد.

قضیه ۷.۵. در یک سیستم ۳ از n ، اگر $p < \frac{2}{n-1}$ باشند، آن گاه

$$I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3) > I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3).$$

مراجع

[۱] اسدی، مجید (۱۳۹۲)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

- [2] Armstrong, M. J. (1995). Joint reliability-importance of components. *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 408–412.
- [3] Birnbaum, Z. W. (1969). On the importance of different components in a multicomponent system. In: Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II*. New York: Academic Press, pp. 581–592.
- [4] Gao, X., Cui, L. and Li, J. (2007). Analysis for joint importance of components in a coherent system. *European Journal of Operational Research*, **182**, 282–299.
- [5] Hagstrom, J. N. (1990). *Redundancy, substitutes and complements in system reliability*. Technical report, College of Business Administration, University of Illinois.

- [6] Hong, J. S. and Lie, C. H. (1993). Joint reliability-importance of two edges in an undirected network. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 17–33.
- [7] Hong, J. S., Koo, H. Y. and Lie C. H. (2002). Joint reliability-importance of k -out-of- n systems. *European Journal of Operational Research*, **142**, 539–547.
- [8] Jan, S. and Chang, H. W. (2006). *Joint reliability importance of k -out-of- n systems and series-parallel systems*. Proceedings of PDPTA'06, pp. 395–398.
- [9] Kuo, W. and Zhu, X. (2012). *Importance Measures in Reliability, Risk, and Optimization: Principles and Applications*. Wiley, New York.
- [10] Wu, S. (2005). Joint importance of multistate systems. *Computers and Industrial Engineering*, **49**, 63–75.
- [11] Xie, M. and Lai, C. D. (1996). Exploiting symmetry in the reliability analysis of coherent systems. *Naval Research Logistics*, **43**, 1025–1034.