توزیع نسبت متغیرهای مستقل کاماراسوامی و کاربرد آن در مباحث قابلیت اعتماد

عباس رسولی،[۱] معصومه ایمانی [۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۵/۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده:
در این مقاله، نخست توزیع کاماراسوامی معرفی می‌شود. سپس توابع توزیع توأم و حاشیه‌ای برای $W = \frac{X_1}{X_2}$ و $T = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ که در آنها X_1 و X_2 متغیرهای مستقل و دارای توزیع کاماراسوامی‌اند، به دست می‌آید. همچنین مقدار گشتاورهای متغیرهای W و T محاسبه می‌شود. توزیع کاماراسوامی به‌دلیل انعطاف‌پذیری با توجه به پارامترهای آن در مدل‌های آمار بیزی به‌عنوان توزیع پیشین به کار می‌رود و توزیع متغیرهای T و W در مدل‌های فشار-قدرت مربوط به قابلیت اعتماد سیستم‌ها کاربرد دارد.
واژه‌های کلیدی: توزیع کاماراسوامی، تابع فوق‌هندسی گوسی، تابع چگالی توأم، مدل فشار-قدرت، قابلیت اعتماد سیستم.

۱ مقدمه

توزیع کاماراسوامی [۱]نخستین بار به‌صورت زیر معرفی شد.

$$f_Z(z) = \frac{1}{b-c} pq(\frac{z-c}{b-c})^{p-1} \times [1-(\frac{z-c}{b-c})^p]^{q-1}, \ c < z < b$$

که $p > 0$ و $q > 0$ پارامترهای توزیع‌اند و c و b کران‌های متغیر آن. در حالت کلّی توزیع کاماراسوامی با نماد $Kum(p,q,c,b)$ نشان داده می‌شود و با استفاده از روش تبدیل متغیر، با فرض $X = \frac{Z-c}{b-c}$، تابع چگالی کاماراسوامی استاندارد به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$f_X(x) = pqx^{p-1}(1-x^p)^{q-1}, \quad 0 < x < 1. \qquad (1)$$

در این‌جا همچنین داریم:

$$Kum(p,q) \equiv Kum(p,q,0,1)$$

تابع توزیع تجمعی توزیع کاماراسوامی استاندارد را به‌صورت زیر داریم:

$$F(x) = 1-(1-x^p)^q, \quad 0 < x < 1$$

همچنین شکل چندک $F^{-1}(u)$ را به‌صورت زیر داریم:

$$x = [1-(1-u)^{\frac{1}{q}}]^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < u < 1.$$

و در یک حالت خاص، میانهٔ توزیع کاماراسوامی برابر با $med(X) = (1-0/5^{\frac{1}{q}})^{\frac{1}{p}}$ خواهد بود.

اگر $X \sim Kum(p,q)$ باشد، تابع مولّد گشتاور توزیع کاماراسوامی در نقطهٔ صفر به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\mu'_r(X) = qB(1+\frac{r}{p}, q),$$

که در آن تابع بتا و تابع گاما به ترتیب زیر است.

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

توزیع کاماراسوامی به دلیل اینکه دارای دامنهٔ یکسان با توزیع بتا است، در آمار بیزی به‌عنوان توزیع پیشین اطلاع بخش به‌کار می‌رود. فام جیا [۳] توزیع نسبت متغیرهای بتا را ارائه داد و از آن در بررسی مدل‌های فشار-قدرت استفاده کرد. در این مقاله سعی می‌کنیم بر اساس توزیع کاماراسوامی به‌عنوان توزیعی که انعطاف‌پذیرتر از توزیع بتا است توزیع نسبت متغیرها را ارائه دهیم.

[۱] عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه زنجان، ایران
[۲] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه زنجان، ایران

۲ تابع چگالی توأم و حاشیه‌ای

فرض کنید $X_1 \sim Kum(a, b_1)$ و $X_2 \sim Kum(a, b_2)$. تابع چگالی متغیر تصادفی $W = \frac{X_1}{X_2}$ برای $0 \leqslant w \leqslant 1$ و $w > 1$ به‌ترتیب به‌صورت

$$f(w) = \frac{Aw^{a-1}}{a} \cdot \frac{1}{b_2(b_2+1)} \times {}_2F_1(1-b_1, 2, b_2+2, w^a),$$

و

$$f(w) = \frac{A}{aw^{a+1}} \cdot \frac{1}{b_1(b_1+1)} \times {}_2F_1(1-b_2, 2, b_1+2, \frac{1}{w^a}),$$

می‌باشد که در آن $A = (ab_1)(ab_2)$ و

$$(۲) \qquad {}_2F_1(a, b, c, x) = \int_0^1 \frac{u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}}{B(b, c-b)(1-ux)^a} du,$$

تابع فوق هندسی گوسی بوده و با نماد ${}_2F_1$ نشان داده شده است، (رجوع شود به ماتای و ساکسنا،[۲]).

تابع چگالی احتمال توأم را به‌صورت زیر داریم

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{a-1}(1-x_1^a)^{b_1-1} \times x_2^{a-1}(1-x_2^a)^{b_2-1},$$

که در آن $0 < x_1, x_2 < 1$.

با استفاده از روش تبدیل متغیر داریم:

$$w = \frac{X_1}{X_2},\ v = X_2 \ \Rightarrow\ X_1 = wv,\ X_2 = v,$$

و به‌دنبال آن برای ژاکوبین تبدیل داریم

$$|J| = v.$$

بنا بر این

$$f(w, v) = A(wv)^{a-1}(1-(wv)^a)^{b_1-1} \times v^{a-1}(1-v^a)^{b_2-1}v,$$

و تابع چگالی حاشیه‌ای W را به‌صورت زیر داریم:

$$f(w) = \int_C A(wv)^{a-1}(1-(wv)^a)^{b_1-1} \times v^{a-1}(1-v^a)^{b_2-1} v dv,$$

که در آن

$$C = \{(v, w); 0 < w, 0 < v < 1, 0 < vw < 1\}.$$

برای $0 \leqslant w \leqslant 1$ داریم:

$$f(w) = Aw^{a-1} \int_0^1 v^{2a-1}(1-(wv)^a)^{b_1-1} \times (1-v^a)^{b_2-1} dv.$$

و با تغییر متغیر $v^a = t$ و در نتیجه $av^{a-1}dv = dt$ داریم:

$$f(w) = \frac{Aw^{a-1}}{a} \int_0^1 t(1-w^a t)^{b_1-1} \times (1-t)^{b_2-1} dt.$$

حال با استفاده از (۲) داریم:

$$f(w) = \frac{Aw^{a-1}}{a} \cdot \frac{1}{b_2(b_2+1)} \times {}_2F_1(1-b_1, 2, b_2+2, w^a).$$

برای $w > 1$ با انجام تغییر متغیر دیگری به‌صورت $z = wv$ و در نتیجه $dv = \frac{dz}{w}$ داریم:

$$f(w) = A \int_0^1 z^{a-1}(1-z^a)^{b_1-1} \times (\frac{z}{w})^{a-1}(1-(\frac{z}{w})^a)^{b_2-1}(\frac{z}{w})\frac{dz}{w}.$$

با اندکی ساده کردن داریم:

$$f(w) = A \int_0^1 \frac{z^{2a-1}(1-z^a)^{b_1-1}}{w^{a+1}} \times (1-(\frac{z}{w})^a)^{b_2-1} dz.$$

مجدداً با تغییر متغیر $z^a = t$ و در نتیجه $az^{a-1}dz = dt$ داریم:

$$f(w) = A \int_0^1 \frac{t(1-t)^{b_1-1}}{aw^{a+1}} (1-\frac{t}{w^a})^{b_2-1} dt,$$

و در نهایت با استفاده از (۲) داریم:

$$f(w) = \frac{A}{aw^{a+1}} \cdot \frac{1}{b_1(b_1+1)} \times {}_2F_1(1-b_2, 2, b_1+2, \frac{1}{w^a}).$$

□

فرض کنید $X_1 \sim Kum(a, b_1)$ و $X_2 \sim Kum(a, b_2)$. تابع چگالی $T = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ به‌صورت زیر است: اگر $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$،

$$g(t) = \frac{At^{a-1}(1-t)^{-a-1}}{a} \cdot \frac{1}{b_2(b_2+1)} \times {}_2F_1(1-b_1, 2, b_2+2, (\frac{t}{1-t})^a),$$

اگر $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$،

$$g(t) = \frac{At^{-a-1}(1-t)^{a-1}}{a}\frac{1}{b_1(b_1+1)} \times {}_2F_1(1-b_2, 2, b_1+2, (\frac{1-t}{t})^a).$$

بر اساس تبدیلات، تابع چگالی توأم را به‌صورت زیر داریم:

$$g(y_1,t) = A(t(1-t))^{a-1}y_1^{2a-1} \times (1-(ty_1)^a)^{b_1-1} \times (1-(y_1(1-t))^a)^{b_2-1},$$

و به‌دنبال آن تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر T عبارت است از

$$g(t) = A(t(1-t))^{a-1} \times \int_C y_1^{2a-1}(1-(ty_1)^a)^{b_1-1} \times (1-(y_1(1-t))^a)^{b_2-1}dy_1.$$

که در آن

$$C = \left\{(y_1,t); 0 < y_1 < 2, 0 < y_1 < \frac{1}{t}, 0 < y_1 < \frac{1}{1-t}, 0 < t < 1\right\}.$$

حال با توجه به C، دو ناحیهٔ داریم:

اگر $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$،

$$g(t) = \int_0^{\frac{1}{1-t}} g(y_1,t)dy_1 = A(t(1-t))^{a-1} \times \int_0^{\frac{1}{1-t}} y_1^{2a-1}(1-(ty_1)^a)^{b_1-1} \times (1-(y_1(1-t))^a)^{b_2-1}dy_1,$$

که با تغییر متغیر $v = (1-t)y_1$ و در نتیجه $dv = (1-t)dy_1$ و اندکی ساده کردن داریم:

$$g(t) = At^{a-1}(1-t)^{-a-1}\int_0^1 v^{2a-1} \times (1-(\frac{tv}{1-t})^a)^{b_1-1}(1-v^a)^{b_2-1}dv.$$

مجدداً با فرض $v^a = u$ و در نتیجه $av^{a-1}dv = du$ داریم:

$$g(t) = \frac{At^{a-1}(1-t)^{-a-1}}{a} \times \int_0^1 \frac{u(1-u(\frac{t}{1-t})^a)^{b_1-1}}{(1-u)^{1-b_2}}du,$$

و در نهایت با استفاده از (۲) داریم:

$$g(t) = \frac{At^{a-1}(1-t)^{-a-1}}{a} \cdot (\frac{1}{b_2(b_2+1)}) \times {}_2F_1(1-b_1, 2, b_2+2, (\frac{t}{1-t})^a).$$

برای $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ داریم:

$$g(t) = \int_0^{\frac{1}{t}} g(y_1,t)dy_1 = A(t(1-t))^{a-1}\int_0^{\frac{1}{t}} y_1^{2a-1}(1-(ty_1)^a)^{b_1-1} \times (1-(y_1(1-t))^a)^{b_2-1}dy_1.$$

با تغییر متغیر $u = ty_1$ و در نتیجه $du = tdy_1$ و اندکی ساده کردن داریم:

$$g(t) = At^{-a-1}(1-t)^{a-1}\int_0^1 u^{2a-1}(1-u^a)^{b_1-1} \times (1-(\frac{u(1-t)}{t})^a)^{b_2-1}du.$$

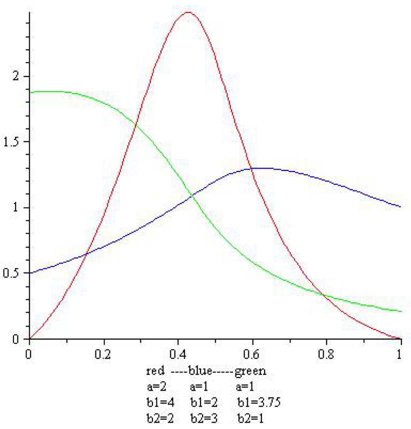
حال تغییر متغیر $u^a = v$ و در نتیجه $au^{a-1}du = dv$ را انجام می‌دهیم.

$$g(t) = \frac{At^{-a-1}(1-t)^{a-1}}{a}\int_0^1 v(1-v)^{b_1-1} \times (1-(\frac{1-t}{t})^a v)^{b_2-1}dv,$$

با استفاده از (۲) داریم:

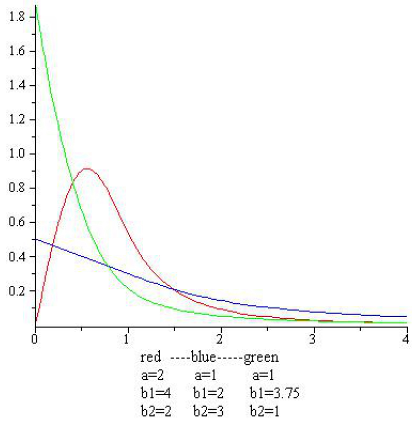
$$g(t) = \frac{At^{-a-1}(1-t)^{a-1}}{a}(\frac{1}{b_1(b_1+1)}) \times {}_2F_1(1-b_2, 2, b_1+2, (\frac{1-t}{t})^a).$$

□



شکل ۱. تابع چگالی متغیر $T = \frac{X_1}{X_1+X_2}$

در شکل‌های ۱ و ۲ تابع چگالی متغیرهای T و W که در آنها $X_1 \sim Kum(a, b_1)$ و $X_2 \sim Kum(a, b_2)$، به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها نشان داده شده است.



شکل۲. تابع چگالی متغیر $W = \frac{X_1}{X_2}$

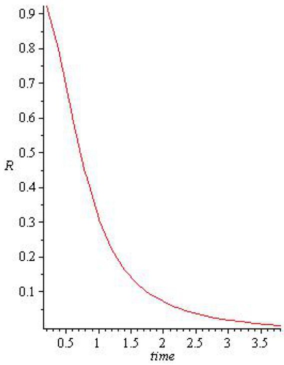
لم ۱.۲. گشتاورهای غیر مرکزی متغیرهای $T = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ و $W = \frac{X_1}{X_2}$ را به‌صورت زیر داریم:

$$
\begin{aligned}
E(T^n) &= \left(\frac{A}{ab_2(b_2+1)}\right) \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{a+n-1}}{(1-t)^{a+1}} \\
&\times {}_2F_1\left(1-b_1, 2, b_2+2, \left(\frac{t}{1-t}\right)^a\right)dt \\
&+ \left(\frac{A}{ab_1(b_1+1)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-a+n-1}(1-t)^{a-1} \\
&\times {}_2F_1\left(1-b_2, 2, b_1+2, \left(\frac{1-t}{t}\right)^a\right)dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(W^n) &= \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{b_2(b_2+1)} \cdot \int_0^1 w^{a+n-1} \\
&\times {}_2F_1(1-b_1, 2, b_2+2, w^a)dw \\
&+ \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{b_1(b_1+1)} \int_1^\infty \frac{1}{w^{a-n+1}} \\
&\times {}_2F_1\left(b_2-1, 2, b_1+2, \frac{1}{w^a}\right)dw.
\end{aligned}
$$

حل انتگرال‌های فوق فقط با روش‌های عددی امکان‌پذیر خواهد بود و بر اساس آنها می‌توان مقادیر امید ریاضی، واریانس، میزان چولگی و کشیدگی متغیرهای W و T را محاسبه کرد. همچنین در بررسی مدل فشار-قدرت، محاسبهٔ مقدار عددی $P(X_1 < X_2)$ یا به‌طور معادل $P(W < 1)$، یعنی احتمال کمتر بودن قدرت یک سیستم در مقابل فشار وارد شده به آن، مورد توجه در مباحث قابلیت اعتماد سیستم‌ها است، که به‌عنوان مثال با فرض $X_1 \sim Kum(2, 4)$ و $X_2 \sim Kum(2, 2)$، با استفاده از روش‌های عددی داریم:

$$
\begin{aligned}
P(W > 1) &= \int_1^\infty \frac{4\,{}_2F_1(-1, 2, 6, w^{-2})}{5 \cdot w^3} dw \\
&= 0/3333.
\end{aligned}
$$



شکل۳. تابع قابلیت اعتماد متغیر $W = \frac{X_1}{X_2}$

به‌عنوان مثالی دیگر با این فرض که $X_1 \sim Kum(2, 4)$ و $X_2 \sim Kum(2, 2)$. در شکل ۳ نمودار تابع قابلیت اعتماد یک سیستم بر مبنای توزیع متغیر W، یعنی $R_w(t) = P(W > t)$، ارائه شده است.

۳ نتیجه گیری

در این مقاله نخست توزیع نسبت متغیرهای کاماراسوامی را به‌دست آوردیم. سپس با ارائه یک مثال نشان داده‌ایم که نسبت دو متغیر مستقل کاماراسوامی می‌تواند در بررسی مسئله فشار-قدرت برای یک سیستم مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

[1] Kumaraswamy, P. (1980). A Generalized Probability Density Function for Double Bounded Random Processes. *Journal of Hydrology*, **46**, 79-88.

[2] Mathai, A. M., Saxena, R. K. (2006). *Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences* (Vol. 348). Springer.

[3] Pham-Gia, T. (2000). Distributions of the ratios of independent beta variables and applications. *Communications in Statistics Theory and Methods*, **29**(**12**), 2693-2715.