

محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای میانگین توزیع پواسون

علی‌رضا شیروانی^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۷/۱۷

چکیده:

توزیع پواسون یک مدل استاندارد برای تحلیل داده‌های شمارشی است و برآورد پارامتر میانگین این توزیع در عمل کاربرد زیادی دارد. تا به حال بازه‌های اطمینان متعددی برای میانگین توزیع پواسون ارائه شده که همگی مجانبی هستند و مقایسه دقیق آن‌ها اهمیت دارد. احتمال پوشش بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ برای میانگین متغیر تصادفی پواسون X با پارامتر نامعلوم θ تابعی نسبت به θ است. از آنجا که توزیع پواسون گسسته است، تابع احتمال پوشش شکل بسته‌ای ندارد و با تغییر θ در فضای پارامتری تغییر می‌کند. بنا بر این محاسبه بیشینه، کمینه و میانگین احتمالات پوشش به صورت دقیق برای بازه‌های اطمینان پارامتر θ کار بسیار مشکلی است. روش محاسبه کمینه و میانگین دقیق احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای پارامتر θ توسط وانگ [۱۱] ارائه شده است. در این مقاله روش محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای پارامتر نامعلوم θ در توزیع پواسون ارائه می‌شود. اگر تصمیم‌گیری با مقایسه همزمان بازه‌های اطمینان بر اساس بیشینه، کمینه و میانگین احتمالات پوشش آن‌ها انجام شود، مطمئن‌تر خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: توزیع پواسون، بازه اطمینان، احتمال پوشش، ضریب اطمینان، میانگین احتمال پوشش، بیشینه احتمالات پوشش.

۱ مقدمه

اطمینان MSC و کابایلا و برن [۴] یک بازه اطمینان دقیق و کوتاه برای پارامتر میانگین توزیع پواسون ارائه کرده‌اند. شورتمن و مارتینز [۸] و ساهای و خورشید [۷] دقت چند بازه اطمینان مجانبی ارائه شده برای پارامتر میانگین توزیع پواسون را بررسی کرده‌اند. کابایلا و لوید [۵] نیز بازه‌های اطمینانی را برای پارامترهای مجهول توزیع‌های گسسته ارائه کرده‌اند. از آنجا که اکثر بازه‌های ارائه شده دارای کران‌های صعودی هستند، بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی اهمیت ویژه‌ای می‌یابند. بنا بر این در این‌جا بازه‌های اطمینان $(L(X), U(X))$ را به صورتی در نظر می‌گیریم که $L(X)$ و $U(X)$ تابعی صعودی نسبت به X باشند. وانگ [۱۱] روش محاسبه دقیق ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای توزیع‌های گسسته یک پارامتری را ارائه کرده است. ارزیابی بازه‌ها با معیار ضریب اطمینان خیلی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین نامعلوم θ باشد. احتمال پوشش بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ برای θ به کمک از احتمال این که بازه تصادفی $(L(X), U(X))$ مقدار واقعی پارامتر θ را در بر داشته باشد. بنا بر این احتمال پوشش تابعی نسبت به θ است. ممکن است در توزیع‌های پیوسته، تابع احتمال پوشش، برای همه نقاط فضای پارامتری یکسان باشد، اما در توزیع‌های گسسته، تابع احتمال پوشش با تغییر مقدار پارامتر مجهول در فضای پارامتری، تغییر می‌کند. به همین دلیل محاسبه دقیق بیشینه، کمینه و میانگین احتمالات پوشش برای بازه‌های اطمینان پارامتر این توزیع، کار دشواری است. تا کنون چندین بازه اطمینان مجانبی برای θ معرفی شده است. به عنوان مثال، خام کنگ [۶] بازه اطمینان مجانبی AWC ، گوآن [۳] بازه

^۱ عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه ولایت، ایران‌شهر

$$U(0), U(1), U(2), \dots$$

این نقاط را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم و آن ها را v_1 و v_2 و ... نامگذاری می کنیم. برای $i = 1, 2, \dots$ تعریف می کنیم:

$$w_i = \begin{cases} v_i, & l \leq v_i \leq u \\ l, & v_i < l \\ u, & v_i > u \end{cases} \quad (1)$$

برای یک $\theta \in (v_i, v_{i+1})$ توابع k و k_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$k_1(\theta): \text{کوچک ترین مقدار } x \text{ که برای آن, } U(x) > \theta$$

$$k(\theta): \text{بزرگ ترین مقدار } x \text{ که برای آن, } L(x) < \theta$$

لم ۲.۲. اگر بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ گزاره ۱.۲ را داشته باشد، خواهیم داشت:

$$P_\theta(\theta \in (L(X), U(X))) = \sum_{i=k_1(\theta)}^{k_1(\theta)} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}. \quad (1)$$

اثبات. اگر قرار دهیم $X = k_1(\theta)$ و $Y = k_1(\theta)$ ، با توجه به تعریف k و k_1 فقط چهار حالت زیر ممکن است:

حالت اول: $L(Y) < U(Y) < \theta < L(X) < U(X)$ که در این صورت θ پوشش داده نمی شود.

حالت دوم: $L(X) < L(Y) < \theta < U(X) < U(Y)$ که در این صورت طبق گزاره ۱.۲ داریم $X \leq Y$. حالت سوم: $L(X) < L(Y) < U(Y) < \theta < U(X)$

حالت چهارم: $L(Y) < \theta < L(X) < U(X) < U(Y)$

حالت های سوم و چهارم طبق گزاره ۱.۲ امکان پذیر نیستند. بنا بر این یگانه حالت ممکن، حالت دوم است و این یعنی $k_1(\theta) \leq k(\theta)$. از طرفی طبق تعریف k و k_1 و گزاره ۱.۲ داریم:

$$L(X) < \theta \Leftrightarrow X \leq k_1(\theta)$$

$$U(X) > \theta \Leftrightarrow X \geq k(\theta)$$

محافظه کارانه است، زیرا اگر احتمال پوشش حتی در یک نقطه از فضای پارامتری کوچک باشد، ضریب اطمینان نیز کوچک خواهد بود. از طرفی میانگین احتمالات پوشش نیز به شدت تحت تأثیر کمینه و بیشینه احتمالات پوشش قرار دارد. بنا بر این با در نظر گرفتن همزمان کمینه، میانگین و بیشینه احتمالات پوشش، می توان مقایسه دقیق تری بین بازه ها انجام داد. در این مقاله روش محاسبه بیشینه احتمالات پوشش بازه های اطمینان با کران های صعودی برای میانگین توزیع پواسون ارائه می شود. با این روش می توانیم بیشینه احتمالات پوشش و نقطه ای از فضای پارامتری را که بیشینه احتمالات پوشش به ازای آن رخ می دهد به صورت دقیق به دست آوریم.

در بخش ۲ به شرایط مورد نیاز بازه اطمینان و روش محاسبه بیشینه احتمالات پوشش دقیق می پردازیم. سپس در بخش ۳ چند بازه اطمینان برای میانگین توزیع پواسون معرفی کرده، آن ها را از نظر بیشینه احتمالات پوشش دقیق مقایسه می کنیم. در ادامه، بخش ۴ به شبیه سازی اختصاص دارد. در نهایت در بخش ۵ بحث و نتیجه گیری آورده شده است.

۲ روش محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر نامعلوم θ باشد. احتمال پوشش بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ برای θ به کمک از $P_\theta(\theta \in (L(X), U(X)))$ ؛ یعنی احتمال این که بازه تصادفی $(L(X), U(X))$ مقدار واقعی θ را پوشش دهد.

در این مقاله بازه های اطمینانی را بررسی می کنیم که شرط زیر را داشته باشند:

گزاره ۱.۲. برای بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ از $X_1 < X_2$ ، بتوان نتیجه گرفت که $L(X_1) \leq L(X_2)$ و $U(X_1) \leq U(X_2)$.

قبل از ارائه نتیجه اصلی، نمادگذاری ها را معرفی می کنیم:

فرض کنید l و u به ترتیب کران پایین و بالای فضای پارامتری باشند. برای یک بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ ، نقاط نخستینی و انتهایی متناظر با $x = 0, 1, 2, \dots$ عبارت اند از:

$$L(0), L(1), L(2), \dots$$

بنا بر این:

و این، اثبات قسمت‌های اول و دوم لم را به دنبال دارد. حال به اثبات قسمت سوم لم می‌پردازیم. فرض کنید m_1 و m_0 دو عدد حسابی باشند و $m_0 \leq m_1$ تعریف می‌کنیم:

$$y(\theta) = \sum_{i=m_0}^{m_1} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}.$$

از تابع $y(\theta)$ نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} = e^{-\theta} \theta^{m_0-1} \left(\frac{1}{(m_0-1)!} - \frac{\theta^{m_1-m_0+1}}{m_1!} \right).$$

برای یافتن نقاط اکسترمم تابع $y(\theta)$ مقدار مشتق به‌دست آمده را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} = e^{-\theta} \theta^{m_0-1} \left(\frac{1}{(m_0-1)!} - \frac{\theta^{m_1-m_0+1}}{m_1!} \right) = 0.$$

$$m_1! - (m_0-1)! \theta^{m_1-m_0+1} = 0.$$

$$\theta = \sqrt[m_1-m_0+1]{\frac{m_1!}{(m_0-1)!}} \quad (2)$$

واضح است که مشتق $y(\theta)$ برای مقادیر θ کمتر از $\sqrt[m_1-m_0+1]{\frac{m_1!}{(m_0-1)!}}$ مثبت و برای مقادیر θ بیشتر از $\sqrt[m_1-m_0+1]{\frac{m_1!}{(m_0-1)!}}$ منفی است. بنا بر این تابع $y(\theta)$ تابعی تک‌مندی است که بیشینه آن در نقطه $\sqrt[m_1-m_0+1]{\frac{m_1!}{(m_0-1)!}}$ اتفاق می‌افتد و اثبات کامل است. $\square$

فضای پارامتری برای میانگین توزیع پواسون بازه $(0, +\infty)$ است، اما در عمل برای قابل انجام شدن محاسبات باید فضای پارامتری را کراندار در نظر بگیریم که با توجه به اثبات لم ۴.۲ مشکلی در محاسبه بیشینه احتمالات پوشش در این حالت‌ها نخواهیم داشت.

قضیه ۶.۲. برای یک بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ که گزاره ۱.۲ را داشته باشد، بیشینه احتمالات پوشش برابر است با بیشینه احتمالات پوشش به‌ازای نقاط مجموعه زیر:

$$S_1 = \{w_1, w_2, \dots, a_1, a_2, \dots\}. \quad (3)$$

به‌طوری که

$$a_i = h(k_0(\frac{w_i + w_{i+1}}{2}), k_1(\frac{w_i + w_{i+1}}{2}))$$

و تابع h در لم ۵.۲ تعریف شده است.

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\theta \in (L(X), U(X))) &= P_{\theta}(L(X) < \theta, U(X) > \theta) \\ &= P_{\theta}(X \leq k_1(\theta), X \geq k_0(\theta)) \\ &= P_{\theta}(k_0(\theta) \leq X \leq k_1(\theta)) \\ &= \sum_{i=k_0(\theta)}^{k_1(\theta)} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!} \end{aligned}$$

و اثبات کامل است. $\square$

تعریف ۳.۲. خانواده توابع چگالی یک پارامتری $\{f_{\theta} : \theta \in \Theta\}$ دارای خاصیت نسبت درست‌نمایی یکنوا^۲ در آماره T با تابع چگالی $g_{\theta}(t)$ است اگر $\frac{g_{\theta_2}(t)}{g_{\theta_1}(t)}$ به‌ازای هر $\theta_2 > \theta_1$ تابعی غیر نزولی نسبت به t باشد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $f_{\theta}(x)$ یک خانواده از توابع چگالی روی $\mathbb{R}$ با خاصیت نسبت درست‌نمایی یکنوا (MLR) در x باشد. در این صورت برای هر $\theta_1 < \theta_2$ تابع توزیع تجمعی X در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$F_{\theta_2}(x) \leq F_{\theta_1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

اثبات. قضیه ۸.۳.۱۷ در کسلا و برگر [۲] را ببینید. $\square$

لم ۵.۲. ۱- برای یک m_1 ثابت که $m_1 > 0$ ، $\sum_{i=0}^{m_1} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$ یک تابع نزولی نسبت به θ است.

۲- برای یک m_0 ثابت که $m_0 > 0$ ، $\sum_{i=m_0}^{+\infty} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$ تابع صعودی نسبت به θ است.

۳- برای $m_0 < m_1$ ثابت که $0 < m_0 < m_1$ ، $\sum_{i=m_0}^{m_1} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$ یک تابع تک‌مندی نسبت به θ است و بیشینه این تابع در نقطه $\theta = h(m_0, m_1)$ رخ می‌دهد، زمانی که:

$$h(m_0, m_1) = \sqrt[m_1-m_0+1]{\frac{m_1!}{(m_0-1)!}}$$

اثبات. خانواده توابع چگالی پواسون دارای خاصیت MLR در x است. بنا بر این طبق قضیه ۴.۲ داریم:

$$F_{\theta_2}(x) \leq F_{\theta_1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta_1 < \theta_2$$

^۲ monotone likelihood ratio

اثبات. میتوان نوشت:

۳ مثال‌ها

در مثال‌های ۱.۳ و ۲.۳ با استفاده از الگوریتم به دست آمده در بخش ۲ بیشینه احتمالات پوشش دو بازه اطمینان مجانبی معرفی شده برای پارامتر میانگین توزیع پواسون توسط گوان [۳] را به صورت دقیق محاسبه و سپس آن‌ها را با معیار بیشینه احتمالات پوشش مقایسه می‌کنیم.

مثال ۱.۳. فرض کنید $z_{\frac{\alpha}{4}}$ چندک $\frac{\alpha}{4}$ بالایی توزیع نرمال استاندارد باشد. بازه اطمینان SC یا امتیاز با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به صورت زیر معرفی شده است:

$$x + \frac{z_{\frac{\alpha}{4}}}{4} \mp z_{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{x + \frac{z_{\frac{\alpha}{4}}}{4}}$$

در این جا بیشینه احتمالات پوشش را روی فضای پارامتری محدود شده به بازه $(0, 5)$ به دست می‌آوریم. جدول ۱ بازه‌های SC ، ۹۵ درصدی به ازای $x = 0, 1, \dots, 10$ را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۱ برای $x \geq 10$ بازه‌های اطمینان کاملاً خارج از بازه $(0, 5)$ قرار می‌گیرند. بنا بر این کافی است فقط بازه‌های اطمینان متناظر با $x = 0, 1, \dots, 9$ را در نظر بگیریم. با توجه به بازه‌ها واضح است که گزاره ۱.۲ برقرار است. بنا بر این می‌توانیم بیشینه احتمالات پوشش را به صورت دقیق محاسبه کنیم. برای این منظور در ابتدا کران‌های بازه‌های اطمینان به ازای $x = 0, 1, \dots, 9$ را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم، یعنی ۰ و ۰/۱۷۶ و ۰/۵۴۸ و ۱/۰۲۰ و ۱/۵۵۵ و ۲/۱۳۶ و ۲/۷۵۰ و ۳/۳۹۱ و ۳/۸۴۲ و ۴/۰۵۴ و ۴/۷۳۵ و ۵/۶۶۵ و ۵/۷۸۸ و ۱۷/۱۰۶. با توجه به این که فضای پارامتری، بازه $(0, 5)$ است، داریم:

$$w_1 = 0, w_2 = 0/176, w_3 = 0/548, w_4 = 1/020,$$

$$w_5 = 1/555, w_6 = 2/136, w_7 = 2/750, w_8 = 3/391,$$

$$w_9 = 3/842, w_{10} = 4/054, w_{11} = 4/735, w_{12} = 5.$$

همچنین داریم، $a_1 = 0$ و $a_2 = 0/176$ و $a_3 = 0/548$ و $a_4 = 1/020$ و $a_5 = 1/555$ و $a_6 = 2/136$ و $a_7 = 2/750$ و $a_8 = 3/391$ و $a_9 = 3/842$ و $a_{10} = 4/054$ و $a_{11} = 4/735$ و $a_{12} = 5$. احتمال پوشش در w_1 و ... و w_{12} و a_1 و ... و a_{12} به ترتیب برابر است با ۰/۹۹۹ و ۰/۸۳۸ و ۰/۸۹۵ و ۰/۹۱۶ و ۰/۹۲۷ و ۰/۹۳۴ و ۰/۹۳۹ و ۰/۹۴۳ و ۰/۹۵۸ و ۰/۹۲۸ و ۰/۹۳۹ و ۰/۹۶۱.

$$\begin{aligned} & \max_{\theta \in (l, u)} P_{\theta}(\theta \in (L(X), U(X))) \\ &= \max_{i=1,2,\dots} \left(\max_{w_i < \theta < w_{i+1}} P_{\theta}(\theta \in (L(X), U(X))) \right) \end{aligned}$$

از طرفی طبق لم ۵.۲ داریم:

$$P_{\theta}(\theta \in (L(X), U(X))) = \sum_{i=k_1(\theta)}^{k_2(\theta)} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$$

و در لم ۵.۲ ثابت کردیم تابع $\sum_{i=m}^{m_1} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$ تابعی صعودی، نزولی، یا تک‌مدی است که بیشینه آن در نقطه $h(m_1, m_1)$ رخ می‌دهد. با توجه به این که برای θ ‌های متعلق به فاصله (w_i, w_{i+1}) ، $k_1(\theta)$ و $k_2(\theta)$ یکسان هستند، می‌توانیم $k_1(\frac{w_i + w_{i+1}}{2})$ و $k_2(\frac{w_i + w_{i+1}}{2})$ را در نظر بگیریم. بنا بر این $\max_{w_i < \theta < w_{i+1}} P_{\theta}(\theta \in (L(X), U(X)))$ به ازای یکی از نقاط $\theta = w_i$ ، $\theta = w_{i+1}$ و $\theta = a_i$ اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر بیشینه احتمالات پوشش به ازای یکی از نقاط مجموعه S_1 اتفاق می‌افتد که درون فضای پارامتری نیز قرار دارد. بنا بر این اثبات کامل است. $\square$

۱.۲ الگوریتم محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش

گام ۱: در ابتدا بررسی می‌شود که بازه اطمینان مورد نظر، گزاره ۱.۲ را دارا باشد. اگر گزاره ۱.۲ برقرار نباشد، قادر به محاسبه بیشینه احتمالات پوشش نیستیم.

گام ۲: نقاط انتهایی بازه‌های اطمینان متناظر با $x = 0, 1, 2, \dots$ را که درون فضای پارامتری قرار دارند در نظر می‌گیریم.

گام ۳: نقاط $a_1, a_2, \dots$ ارائه شده در قضیه ۶.۲ را به دست می‌آوریم.

گام ۴: احتمالات پوشش متناظر با نقاط به دست آمده در گام‌های دوم و سوم و کران‌های پایین و بالای فضای پارامتری را به دست می‌آوریم. بیشینه احتمالات پوشش به دست آمده همان بیشینه دقیق احتمالات پوشش بازه مورد نظر است.

در ابتدا بررسی می‌کنیم که $4/054$ به‌ازای چه x هایی در بازه اطمینان قرار می‌گیرد. سپس احتمالات مشاهده آن x ها را با فرض $\theta = 4/054$ با هم جمع می‌کنیم. با توجه به بازه‌های بالا، $4/054$ در بازه‌های متناظر با $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ قرار می‌گیرد. بنا بر این داریم:

$$P_{4/054}(4/054 \in (L(X), U(X))) = \sum_{x=1}^7 \frac{e^{-x} x^{4/054}}{x!} = 0/9282$$

مثال ۲.۳. بازه اطمینان MSC یا امتیاز متحرک^۳ با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به‌صورت زیر معرفی شده است:

$$x + 0/46 z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4}}$$

در این‌جا نیز بیشینه احتمالات پوشش را روی فضای پارامتری محدود شده به بازه $(0, 5)$ به دست می‌آوریم. جدول ۲ بازه‌های MSC نود و پنج درصدی را به‌ازای $x = 0, 1, \dots, 10$ نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۲ برای $x \geq 10$ بازه‌های اطمینان کاملاً خارج از بازه $(0, 5)$ قرار می‌گیرند. بنا بر این کافی است فقط بازه‌های اطمینان متناظر با $x = 0, 1, \dots, 9$ را در نظر بگیریم. با توجه به بازه‌ها واضح است که گزاره ۱.۲ برقرار است. بنا بر این می‌توانیم بیشینه احتمالات پوشش را به‌صورت دقیق محاسبه کنیم.

برای این منظور، در ابتدا کران‌های فواصل را به‌ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم؛ یعنی $0/154 -$ و $0/023$ و $0/395$ و $0/866$ و $1/402$ و $1/982$ و $2/596$ و $3/237$ و $3/688$ و $3/900$ و $4/581$ و $5/278$ و $5/953$ و $6/422$ و $6/946$ و $7/474$ و $7/997$ و $8/511$ و $9/044$ و $9/581$ و $10/118$ و $10/655$ و $11/197$ و $11/739$ و $12/281$ و $12/823$ و $13/365$ و $13/907$ و $14/449$ و $14/991$ و $15/533$ و $16/075$ و $16/617$ و $17/160$ و $17/702$ و $18/244$ و $18/786$ و $19/328$ و $19/870$ و $20/412$ و $20/954$ و $21/496$ و $22/038$ و $22/580$ و $23/122$ و $23/664$ و $24/206$ و $24/750$ و $25/292$ و $25/834$ و $26/376$ و $26/918$ و $27/460$ و $28/002$ و $28/544$ و $29/086$ و $29/628$ و $30/170$ و $30/712$ و $31/254$ و $31/796$ و $32/338$ و $32/880$ و $33/422$ و $33/964$ و $34/506$ و $35/048$ و $35/590$ و $36/132$ و $36/674$ و $37/216$ و $37/758$ و $38/300$ و $38/842$ و $39/384$ و $39/926$ و $40/468$ و $41/010$ و $41/552$ و $42/094$ و $42/636$ و $43/178$ و $43/720$ و $44/262$ و $44/804$ و $45/346$ و $45/888$ و $46/430$ و $46/972$ و $47/514$ و $48/056$ و $48/598$ و $49/140$ و $49/682$ و $50/224$ و $50/766$ و $51/308$ و $51/850$ و $52/392$ و $52/934$ و $53/476$ و $54/018$ و $54/560$ و $55/102$ و $55/644$ و $56/186$ و $56/728$ و $57/270$ و $57/812$ و $58/354$ و $58/896$ و $59/438$ و $59/980$ و $60/522$ و $61/064$ و $61/606$ و $62/148$ و $62/690$ و $63/232$ و $63/774$ و $64/316$ و $64/858$ و $65/400$ و $65/942$ و $66/484$ و $67/026$ و $67/568$ و $68/110$ و $68/652$ و $69/194$ و $69/736$ و $70/278$ و $70/820$ و $71/362$ و $71/904$ و $72/446$ و $72/988$ و $73/530$ و $74/072$ و $74/614$ و $75/156$ و $75/698$ و $76/240$ و $76/782$ و $77/324$ و $77/866$ و $78/408$ و $78/950$ و $79/492$ و $80/034$ و $80/576$ و $81/118$ و $81/660$ و $82/202$ و $82/744$ و $83/286$ و $83/828$ و $84/370$ و $84/912$ و $85/454$ و $85/996$ و $86/538$ و $87/080$ و $87/622$ و $88/164$ و $88/706$ و $89/248$ و $89/790$ و $90/332$ و $90/874$ و $91/416$ و $91/958$ و $92/500$ و $93/042$ و $93/584$ و $94/126$ و $94/668$ و $95/210$ و $95/752$ و $96/294$ و $96/836$ و $97/378$ و $97/920$ و $98/462$ و $98/904$ و $99/446$ و $99/988$ و $100/530$ و $101/072$ و $101/614$ و $102/156$ و $102/698$ و $103/240$ و $103/782$ و $104/324$ و $104/866$ و $105/408$ و $105/950$ و $106/492$ و $107/034$ و $107/576$ و $108/118$ و $108/660$ و $109/202$ و $109/744$ و $110/286$ و $110/828$ و $111/370$ و $111/912$ و $112/454$ و $112/996$ و $113/538$ و $114/080$ و $114/622$ و $115/164$ و $115/706$ و $116/248$ و $116/790$ و $117/332$ و $117/874$ و $118/416$ و $118/958$ و $119/500$ و $120/042$ و $120/584$ و $121/126$ و $121/668$ و $122/210$ و $122/752$ و $123/294$ و $123/836$ و $124/378$ و $124/920$ و $125/462$ و $125/904$ و $126/446$ و $126/988$ و $127/530$ و $128/072$ و $128/614$ و $129/156$ و $129/698$ و $130/240$ و $130/782$ و $131/324$ و $131/866$ و $132/408$ و $132/950$ و $133/492$ و $134/034$ و $134/576$ و $135/118$ و $135/660$ و $136/202$ و $136/744$ و $137/286$ و $137/828$ و $138/370$ و $138/912$ و $139/454$ و $139/996$ و $140/538$ و $141/080$ و $141/622$ و $142/164$ و $142/706$ و $143/248$ و $143/790$ و $144/332$ و $144/874$ و $145/416$ و $145/958$ و $146/500$ و $147/042$ و $147/584$ و $148/126$ و $148/668$ و $149/210$ و $149/752$ و $150/294$ و $150/836$ و $151/378$ و $151/920$ و $152/462$ و $152/904$ و $153/446$ و $153/988$ و $154/530$ و $155/072$ و $155/614$ و $156/156$ و $156/698$ و $157/240$ و $157/782$ و $158/324$ و $158/866$ و $159/408$ و $159/950$ و $160/492$ و $161/034$ و $161/576$ و $162/118$ و $162/660$ و $163/202$ و $163/744$ و $164/286$ و $164/828$ و $165/370$ و $165/912$ و $166/454$ و $166/996$ و $167/538$ و $168/080$ و $168/622$ و $169/164$ و $169/706$ و $170/248$ و $170/790$ و $171/332$ و $171/874$ و $172/416$ و $172/958$ و $173/500$ و $174/042$ و $174/584$ و $175/126$ و $175/668$ و $176/210$ و $176/752$ و $177/294$ و $177/836$ و $178/378$ و $178/920$ و $179/462$ و $179/904$ و $180/446$ و $180/988$ و $181/530$ و $182/072$ و $182/614$ و $183/156$ و $183/698$ و $184/240$ و $184/782$ و $185/324$ و $185/866$ و $186/408$ و $186/950$ و $187/492$ و $188/034$ و $188/576$ و $189/118$ و $189/660$ و $190/202$ و $190/744$ و $191/286$ و $191/828$ و $192/370$ و $192/912$ و $193/454$ و $193/996$ و $194/538$ و $195/080$ و $195/622$ و $196/164$ و $196/706$ و $197/248$ و $197/790$ و $198/332$ و $198/874$ و $199/416$ و $199/958$ و $200/500$ و $200/042$ و $200/584$ و $201/126$ و $201/668$ و $202/210$ و $202/752$ و $203/294$ و $203/836$ و $204/378$ و $204/920$ و $205/462$ و $205/904$ و $206/446$ و $206/988$ و $207/530$ و $208/072$ و $208/614$ و $209/156$ و $209/698$ و $210/240$ و $210/782$ و $211/324$ و $211/866$ و $212/408$ و $212/950$ و $213/492$ و $214/034$ و $214/576$ و $215/118$ و $215/660$ و $216/202$ و $216/744$ و $217/286$ و $217/828$ و $218/370$ و $218/912$ و $219/454$ و $219/996$ و $220/538$ و $221/080$ و $221/622$ و $222/164$ و $222/706$ و $223/248$ و $223/790$ و $224/332$ و $224/874$ و $225/416$ و $225/958$ و $226/500$ و $227/042$ و $227/584$ و $228/126$ و $228/668$ و $229/210$ و $229/752$ و $230/294$ و $230/836$ و $231/378$ و $231/920$ و $232/462$ و $232/904$ و $233/446$ و $233/988$ و $234/530$ و $235/072$ و $235/614$ و $236/156$ و $236/698$ و $237/240$ و $237/782$ و $238/324$ و $238/866$ و $239/408$ و $239/950$ و $240/492$ و $241/034$ و $241/576$ و $242/118$ و $242/660$ و $243/202$ و $243/744$ و $244/286$ و $244/828$ و $245/370$ و $245/912$ و $246/454$ و $246/996$ و $247/538$ و $248/080$ و $248/622$ و $249/164$ و $249/706$ و $250/248$ و $250/790$ و $251/332$ و $251/874$ و $252/416$ و $252/958$ و $253/500$ و $254/042$ و $254/584$ و $255/126$ و $255/668$ و $256/210$ و $256/752$ و $257/294$ و $257/836$ و $258/378$ و $258/920$ و $259/462$ و $259/904$ و $260/446$ و $260/988$ و $261/530$ و $262/072$ و $262/614$ و $263/156$ و $263/698$ و $264/240$ و $264/782$ و $265/324$ و $265/866$ و $266/408$ و $266/950$ و $267/492$ و $268/034$ و $268/576$ و $269/118$ و $269/660$ و $270/202$ و $270/744$ و $271/286$ و $271/828$ و $272/370$ و $272/912$ و $273/454$ و $273/996$ و $274/538$ و $275/080$ و $275/622$ و $276/164$ و $276/706$ و $277/248$ و $277/790$ و $278/332$ و $278/874$ و $279/416$ و $279/958$ و $280/500$ و $281/042$ و $281/584$ و $282/126$ و $282/668$ و $283/210$ و $283/752$ و $284/294$ و $284/836$ و $285/378$ و $285/920$ و $286/462$ و $286/904$ و $287/446$ و $287/988$ و $288/530$ و $289/072$ و $289/614$ و $290/156$ و $290/698$ و $291/240$ و $291/782$ و $292/324$ و $292/866$ و $293/408$ و $293/950$ و $294/492$ و $295/034$ و $295/576$ و $296/118$ و $296/660$ و $297/202$ و $297/744$ و $298/286$ و $298/828$ و $299/370$ و $299/912$ و $300/454$ و $300/996$ و $301/538$ و $302/080$ و $302/622$ و $303/164$ و $303/706$ و $304/248$ و $304/790$ و $305/332$ و $305/874$ و $306/416$ و $306/958$ و $307/500$ و $308/042$ و $308/584$ و $309/126$ و $309/668$ و $310/210$ و $310/752$ و $311/294$ و $311/836$ و $312/378$ و $312/920$ و $313/462$ و $313/904$ و $314/446$ و $314/988$ و $315/530$ و $316/072$ و $316/614$ و $317/156$ و $317/698$ و $318/240$ و $318/782$ و $319/324$ و $319/866$ و $320/408$ و $320/950$ و $321/492$ و $322/034$ و $322/576$ و $323/118$ و $323/660$ و $324/202$ و $324/744$ و $325/286$ و $325/828$ و $326/370$ و $326/912$ و $327/454$ و $327/996$ و $328/538$ و $329/080$ و $329/622$ و $330/164$ و $330/706$ و $331/248$ و $331/790$ و $332/332$ و $332/874$ و $333/416$ و $333/958$ و $334/500$ و $335/042$ و $335/584$ و $336/126$ و $336/668$ و $337/210$ و $337/752$ و $338/294$ و $338/836$ و $339/378$ و $339/920$ و $340/462$ و $340/904$ و $341/446$ و $341/988$ و $342/530$ و $343/072$ و $343/614$ و $344/156$ و $344/698$ و $345/240$ و $345/782$ و $346/324$ و $346/866$ و $347/408$ و $347/950$ و $348/492$ و $349/034$ و $349/576$ و $350/118$ و $350/660$ و $351/202$ و $351/744$ و $352/286$ و $352/828$ و $353/370$ و $353/912$ و $354/454$ و $354/996$ و $355/538$ و $356/080$ و $356/622$ و $357/164$ و $357/706$ و $358/248$ و $358/790$ و $359/332$ و $359/874$ و $360/416$ و $360/958$ و $361/500$ و $362/042$ و $362/584$ و $363/126$ و $363/668$ و $364/210$ و $364/752$ و $365/294$ و $365/836$ و $366/378$ و $366/920$ و $367/462$ و $367/904$ و $368/446$ و $368/988$ و $369/530$ و $370/072$ و $370/614$ و $371/156$ و $371/698$ و $372/240$ و $372/782$ و $373/324$ و $373/866$ و $374/408$ و $374/950$ و $375/492$ و $376/034$ و $376/576$ و $377/118$ و $377/660$ و $378/202$ و $378/744$ و $379/286$ و $379/828$ و $380/370$ و $380/912$ و $381/454$ و $381/996$ و $382/538$ و $383/080$ و $383/622$ و $384/164$ و $384/706$ و $385/248$ و $385/790$ و $386/332$ و $386/874$ و $387/416$ و $387/958$ و $388/500$ و $389/042$ و $389/584$ و $390/126$ و $390/668$ و $391/210$ و $391/752$ و $392/294$ و $392/836$ و $393/378$ و $393/920$ و $394/462$ و $394/904$ و $395/446$ و $395/988$ و $396/530$ و $397/072$ و $397/614$ و $398/156$ و $398/698$ و $399/240$ و $399/782$ و $400/324$ و $400/866$ و $401/408$ و $401/950$ و $402/492$ و $403/034$ و $403/576$ و $404/118$ و $404/660$ و $405/202$ و $405/744$ و $406/286$ و $406/828$ و $407/370$ و $407/912$ و $408/454$ و $408/996$ و $409/538$ و $410/080$ و $410/622$ و $411/164$ و $411/706$ و $412/248$ و $412/790$ و $413/332$ و $413/874$ و $414/416$ و $414/958$ و $415/500$ و $416/042$ و $416/584$ و $417/126$ و $417/668$ و $418/210$ و $418/752$ و $419/294$ و $419/836$ و $420/378$ و $420/920$ و $421/462$ و $421/904$ و $422/446$ و $422/988$ و $423/530$ و $424/072$ و $424/614$ و $425/156$ و $425/698$ و $426/240$ و $426/782$ و $427/324$ و $427/866$ و $428/408$ و $428/950$ و $429/492$ و $430/034$ و $430/576$ و $431/118$ و $431/660$ و $432/202$ و $432/744$ و $433/286$ و $433/828$ و $434/370$ و $434/912$ و $435/454$ و $435/996$ و $436/538$ و $437/080$ و $437/622$ و $438/164$ و $438/706$ و $439/248$ و $439/790$ و $440/332$ و $440/874$ و $441/416$ و $441/958$ و $442/500$ و $443/042$ و $443/584$ و $444/126$ و $444/668$ و $445/210$ و $445/752$ و $446/294$ و $446/836$ و $447/378$ و $447/920$ و $448/46$

به تصادف از توزیع یکنواخت روی فاصله (۰,۵) انتخاب شده‌اند (در این جا فضای پارامتری را بازه (۰,۵) در نظر گرفته‌ایم). در کنار بیشینه دقیق احتمالات پوشش محاسبه شده با الگوریتم ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهد.

و ۰/۹۴۰ و ۰/۹۴۲ و ۰/۹۴۶ و ۰/۹۴۹ و ۰/۹۵۱ و ۰/۹۵۳ و ۰/۹۷۸ و ۰/۹۳۸ و ۰/۹۵۸. بنا بر این بیشینه احتمالات پوشش بازه MSC با ضریب ۰/۹۵ به کمک از ۱/۰۰۰.

۴ مطالعه شبیه سازی

در این بخش در ابتدا دو بازه اطمینان مجانبی AWC یا والد اصلاح شده با اضافه کردن احتمال در دم توزیع^۴ و WCC یا والد اصلاح شده با تصحیح پیوستگی^۵ برای پارامتر میانگین توزیع پواسون را از مقاله خام کنگ [۶] معرفی می‌کنیم و سپس برای اثبات نیرومندی الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ از یک مطالعه شبیه سازی استفاده می‌کنیم.

۱.۴ بازه اطمینان AWC

بازه اطمینان AWC با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به صورت زیر معرفی شده است:

$$x + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{2} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x}$$

۲.۴ بازه اطمینان WCC

بازه اطمینان WCC با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به صورت زیر معرفی شده است:

$$x \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x + 0.5}$$

جدول ۳ بیشینه احتمالات پوشش بازه های اطمینان SC ، MSC ، AWC و WCC نود و پنج درصدی را، در صد هزار نقطه که

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله روش محاسبه بیشینه دقیق احتمالات پوشش بازه های اطمینان با کران های صعودی برای میانگین توزیع پواسون را ارائه کردیم. با این روش می‌توانیم با محاسبه احتمالات پوشش بازه اطمینان در تعداد کمی از نقاط فضای پارامتری به بیشینه دقیق احتمالات پوشش بازه مورد نظر دست یابیم. نتایج شبیه سازی در بخش ۴ نشان می‌دهد که مقادیر بیشینه تقریبی به دست آمده در مقایسه با بیشینه دقیق احتمالات پوشش محاسبه شده برای بازه های اطمینان توسط الگوریتم بخش ۲ کوچک تر هستند، و این نشان دهنده اهمیت زیاد روش پیشنهادی است. چرا که با محاسبه احتمال پوشش در نقاطی بسیار کمتر به بیشینه احتمالات پوشش بیشتری دست می‌یابیم. با توجه به جدول ۳ بر اساس بیشینه احتمالات پوشش، بازه ها به ترتیب بهینگی عبارت اند از:

۱. MSC یا WCC

۲. SC

۳. AWC

جدول ۳. بیشینه احتمالات پوشش بازه های اطمینان ۹۵ درصدی در صد هزار نقطه فضای پارامتری که به تصادف انتخاب، در کنار بیشینه دقیق احتمالات پوشش

بازه اطمینان	بیشینه تقریبی	بیشینه دقیق
SC	۰/۹۹۹۹۴۲	۰/۹۹۹۹۹۹
MSC	۰/۹۹۹۹۱۴	۱
AWC	۰/۹۲۳۱۹۱	۰/۹۳۱۸۱۹
WCC	۱	۱

^۴ adding the tail probability of the wald confidence interval

^۵ wald interval with continuity correction

مراجع

- [1] Byrne, J. and Kabaila, P. (2001). Short exact confidence intervals for the Poisson mean, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **30**, 257-261.
- [2] Casella, G. and Berger, R. (2002). *Statistical inference*, 2nd ed. United States of America: Thomson Learning Academic Resource Center
- [3] Guan, Y. (2011). Moved score confidence intervals for means of discrete distributions, *American Open Journal of Statistics*, **1**, 81-86.
- [4] Kabaila, P. and Byrne, J. (2001). Exact short Poisson confidence intervals, *Canadian Journal of Statistics*, **29**, 99-106.
- [5] Kabaila, P. and Lloyd, C.J. (1997). Tight upper confidence limits from discrete data, *Australian Journal of Statistics*, **39**, 193-204.
- [6] Khamkong, M. (2012). Approximate confidence interval for the mean of Poisson distribution, *American Open Journal of Statistics*, **2**, 204-207.
- [7] Sahai, H. and Khurshid, A. (1993). Confidence intervals for the mean of a Poisson distribution, *Biometrical Journal*, **35**, 7, 857-867.
- [8] Schwertman, N.C. and Martinez, (1994). Approximate Poisson confidence limits, *Communication in Statistics: Theory and Methods*, **23(5)**, 1507-1529.
- [9] Shirvani, A. and Fathizadeh, M. (2016). Assessing the accuracy of approximate confidence intervals proposed for the mean of a Poisson distribution, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. to appear.
- [10] Shirvani, A. and Toomaj, A. (2016). Exact confidence coefficient and maximum coverage probabilities of nested confidence intervals for geometric parameter, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, to appear.
- [11] Wang, H. (2009). Exact average coverage probabilities and confidence coefficients of confidence intervals for discrete distributions, *Statistics and Computing*, **19**, 139-148.