

مدل سازی توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی با استفاده از توابع هم وردا و ناوردا

مهدی شمس^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۲/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۸/۳۰

چکیده:

قضیهٔ باسو یکی از نتایج زیبا در آمار کلاسیک است. به طور مختصر این قضیه بیان می کند که اگر آماره T برای یک خانواده از اندازه های احتمال بسنده باشد و V یک آماره کمکی باشد، T و V مستقل هستند. یکی از کاربردهای جدید قضیه باسو در اثبات تقسیم پذیر نامتناهی بودن آماره های مشخص است. علاوه بر این قضیه، برای به کارگیری این کاربرد یک نسخه از قانون گلدی-استیوتل مورد نیاز است. با استفاده از قضیهٔ باسو یک ردهٔ بزرگ توابعی از متغیرهای تصادفی که دو تا از آنها نرمال استاندارد هستند، تقسیم پذیر نامتناهی اند. نتیجهٔ دوم یک نمایش از متغیرهای تصادفی نرمال فراهم می کند که به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل اند که یکی تقسیم پذیر نامتناهی است و دیگری نیست.

واژه های کلیدی: توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی، قانون گلدی-استیوتل، تابع هم وردای مقیاسی، تابع ناوردای مقیاسی.

۱ مقدمه

این توزیع ها را برای مدل های سهام مورد استفاده قرار دادند. گامروفسکی و راجف [۱۲] به کاربردهایی در ارزش دارایی های طویل المدت مالی یا اعتباری اشاره کرده اند. در تحقیقات مالی و اقتصاد، روش هایی برای برآورد کردن پارامترهای توزیع پایدار بیان می شود که برای نمونه می توان به آراد [۲] در زمینه بازگشت سهام، لیو و برورسن [۲۴] در زمینه مدل های مضنهٔ ارز خارجی مراجعه کرد که در این راستا آدلر و همکاران [۱] حاوی اطلاع مفیدی در بارهٔ این کاربردها است. توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی اغلب برای یافتن خانواده ای از توزیع های احتمال که ممکن است یک انتخاب طبیعی برای مدل های حتمی باشند کاربرد دارد.

تعریف ۱.۱. متغیر تصادفی X را تقسیم پذیر نامتناهی گوئیم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $X_1, \dots, X_n$ وجود داشته باشند که $X \stackrel{d}{=} X_1, \dots, X_n$ [۳۱].

وجه تسمیهٔ این متغیر، آن است که X به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ به مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع تقسیم می شود [۷]. می توان نشان داد توزیع های تباهیده،^۳ پایدار (مانند نرمال،

توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی^۲ برای اولین بار توسط دینیتی [۸] در سال ۱۹۲۹ معرفی شدند و پس از آن به طور گسترده تری به وسیله لوی [۲۲، ۲۳]، کولموگوروف [۲۱]، خین چین [۱۹]، فلر [۱۰] و ایتو [۱۸] توسعه یافتند [۳۹]. در مورد تاریخچهٔ این توزیع ها می توان به لوئو [۲۵] و گندنکو [۱۴] مراجعه کرد. مقالات مروری فیسز [۱۱] و استیوتل [۳۷، ۳۸، ۴۰] می توانند مراجع خوبی برای علاقه مندان به این توزیع ها باشند. بوندسون [۶] یک حالت خاص را که حاوی تعمیم های جالبی است، مطرح کرده است. همچنین وارد و کتی [۴۱] توزیع های گسستهٔ تقسیم پذیر نامتناهی را مدل بندی کرده اند، که به عنوان نمونه می توان برای توزیع های زتا به سایتو و تاناکا [۳۰] مراجعه کرد. مک کرودن و والکر [۲۷، ۲۸] و یاسودا [۴۲] توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی را در فضاهای مجرد بررسی کرده اند. توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی و زیر ردهٔ آنها یعنی توزیع های پایدار، در شاخه های مختلف علوم، مخصوصاً اقتصاد و ریاضیات مالی کاربرد دارند. ماندلبروت [۲۶] و آفیسر [۲۹]

^۱ گروه آمار دانشگاه کاشان

^۲ infinite divisible

^۳ degenerate

^۴ extreme value

کوشی و لوی)، مقادیر غائی، γ گاما (و نمایی و خی دو)، پواسون، دوجمله ای منفی (و هندسی)، لگ نرمال، نمایی دوگانه، پارتو، لجستیک، استیودنت و فیشر تقسیم پذیر نامتناهی هستند. توزیع های دوجمله ای، فوق هندسی، یکنواخت، بتا و به طور کلی متغیرهای تصادفی غیر تباهیده کران دار تقسیم پذیر نامتناهی نیستند. همچنین رده توزیع های حدی متغیرهای تصادفی مستقل، با یک خانواده از توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی منطبق است [۱۵]. برای روشن شدن موضوع، گزاره زیر می تواند راه گشا باشد.

گزاره ۲.۱. متغیر تصادفی X تقسیم پذیر نامتناهی است اگر و تنها اگر وقتی $n \rightarrow +\infty$

$$X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n} \xrightarrow{d} X$$

که در آن $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = +\infty$ و برای هر n $\{X_{n,i}\}_{i=1}^{k_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع اند [۱۵].

اگر $\varphi(t)$ تابع مشخصه^۵ یک توزیع تقسیم پذیر نامتناهی باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک تابع مشخصه $\varphi_n(t)$ وجود دارد به قسمی که $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$. در ذیل به برخی خواص تابع مشخصه توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی می پردازیم. اگر $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله ای از توابع مشخصه توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی باشد:

۱. $\varphi_n(t)$ در هیچ نقطه ای صفر نیست.

۲. برای هر $\lambda > 0$ φ_n^λ یک تابع مشخصه است و به علاوه $\overline{\varphi}_n$ (مزدوج مختلط φ_n) و $|\varphi_n|^2$ توابع مشخصه مربوط به توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی اند. همچنین $a, b \in \mathbb{R}$ وجود دارند که برای هر t $|\ln \varphi_n(t)| \leq a + bt^2$.

۳. $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ تابع مشخصه یک توزیع تقسیم پذیر نامتناهی است.

۴. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ آن گاه $\varphi(t)$ تابع مشخصه یک توزیع تقسیم پذیر نامتناهی است.

با استفاده از خاصیت ۳ می توان نشان داد هر ترکیب خطی با ضرایب حقیقی از متغیرهای تصادفی مستقل یک توزیع تقسیم پذیر نامتناهی، خود یک توزیع تقسیم پذیر نامتناهی است

(مثلاً با توجه به خاصیت ۲ و ۳ می توان نتیجه گرفت که اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع تقسیم پذیر نامتناهی باشند، $X_1 - X_2$ نیز تقسیم پذیر نامتناهی است). ولی توزیع آمیخته از توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی لزومی ندارد تقسیم پذیر نامتناهی باشد. همچنین خاصیت ۴ بیان می کند که حد (همگرایی ضعیف) یک دنباله از توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی، خودش تقسیم پذیر نامتناهی است.

مثال ۳.۱. تابع مشخصه یک توزیع تباهیده در نقطه a برابر است با $\varphi(t) = a^{ita}$ و در پی آن $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$ که در آن $\varphi_n(t) = e^{it(a/n)}$ تابع مشخصه یک توزیع تباهیده در نقطه a/n است.

مثال ۴.۱. تابع مشخصه توزیع پواسون با میانگین λ ، یعنی $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ را می توان به صورت $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$ نوشت که در آن $\varphi_n(t) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)}$ تابع مشخصه یک توزیع پواسون با میانگین $\frac{\lambda}{n}$ است.

کولموگوروف [۲۱] قضیه زیر را برای توصیف خانواده توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی با واریانس متناهی ارائه کرد.

قضیه ۵.۱. شرط لازم و کافی برای این که یک تابع توزیع با واریانس متناهی و تابع مشخصه $\varphi(t)$ ، تقسیم پذیر نامتناهی باشد آن است که $\ln \varphi(t) = i\gamma t + \int \{e^{itx} - 1 - itx\} \frac{1}{x^2} dG(x)$ که در آن γ یک عدد حقیقی ثابت و $G(x)$ یک تابع غیر نزولی با تغییرات کران دار است که در آن $G(-\infty) = 0$ است [۱۷].

به راحتی می توان نشان داد که در قضیه ۵.۱، $EX = \gamma$ و $Var X = G(\mathbb{R})$ است [۱۸]. لوی [۲۲، ۲۳]، خین چین [۲۰] و فلر [۹] این قضیه را در حالت کلی برای توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی با واریانس نامتناهی نیز تعمیم دادند که گندنکو و کولموگوروف [۱۶] مرجع مناسبی برای مطالعه در این زمینه است.

مثال ۶.۱. در توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ با قرار دادن $\mu = \gamma$ و $G(x) = \sigma^2 I_{(\cdot, +\infty)}(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} i\gamma t + \int \{e^{itx} - 1 - itx\} \frac{1}{x^2} dG(x) \\ = i\mu t + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{itu} - 1 - itu}{u^2} [G(u^+) - G(u^-)] \\ = i\mu t - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

^۵ characteristic function

هر $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ متغیرهای تصادفی $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}$ مستقل اند.

و از این رو طبق قضیه ۵.۱ توزیع نرمال تقسیم پذیر نامتناهی است.

مثال ۷.۱. توزیع نمایی دوگانه با تابع چگالی احتمال $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ و تابع مشخصه $\frac{1}{1+t^2}$ تقسیم پذیر نامتناهی است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \{e^{itx} - 1 - itx\} \frac{1}{x} |x| e^{-|x|} dx \\ = \int_{-\infty}^+ \{e^{itx} - 1 - itx\} \frac{1}{-x} e^x dx \\ + \int_{-}^{+\infty} \{e^{itx} - 1 - itx\} \frac{1}{x} e^{-x} dx \\ = \int_{-}^{+\infty} \{e^{itx} + e^{-itx} - 2\} \frac{1}{x} e^{-x} dx \\ = \int_{-}^{+\infty} \frac{2(\cos tx - 1)}{x} e^{-x} dx \\ = -\ln(1+t^2). \end{aligned}$$

(د) فرایند به طور تصادفی پیوسته^۹ باشد؛ یعنی برای هر $\lim_{s \rightarrow 0} P(|X_{t+s} - X_t| > \varepsilon) = 0, \varepsilon > 0$.

(ه) فرایند دارای خاصیت مسیر^{۱۰} باشد؛ یعنی مسیرهای نمونه‌ای^{۱۱} X_t از راست پیوسته باشند و تقریباً همه جا دارای حد چپ باشند.

یکی از مباحث مورد علاقه در علم احتمال، ارتباط توزیع‌های تقسیم پذیر نامتناهی با فرایندهای تصادفی^۶ به ویژه فرایند لوی است. فرایند لوی برای اولین بار توسط دینیتی [۸] و لوی [۲۲] معرفی شده است و در مورد ارتباط این فرایند با توزیع‌های تقسیم پذیر نامتناهی، برتوین [۵] و ساتو [۳۲] می‌توانند مفید باشند. بارندورف-نیلسن و همکاران [۳] فرایندهای مانای تقسیم پذیر نامتناهی را بررسی کرده‌اند.

تعریف ۸.۱. فرایند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ که مقادیر خود را در $\mathbb{R}^d$ اختیار می‌کند یک فرایند لوی است هرگاه:

(الف) فرایند از صفر شروع شود؛ یعنی تقریباً همه جا $X_0 = 0$.

(ب) فرایند دارای نمونه‌های مانا^۷ باشد؛ یعنی برای هر $s < t$ ، $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t-s}$.

(ج) فرایند دارای نمونه‌های مستقل^۸ باشد؛ یعنی برای

اگر $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرایند لوی باشد، برای هر $t \geq 0$ متغیر تصادفی X_t تقسیم پذیر نامتناهی است. در نتیجه حرکت براونی،^{۱۲} فرایند پواسون^{۱۳} و همچنین برای هر $s < t$ ، نمو $X_t - X_s$ تقسیم پذیر نامتناهی هستند. برعکس، متناظر با هر توزیع تقسیم پذیر نامتناهی می‌توان یک فرایند لوی ساخت. به عنوان نمونه حرکت براونی، فرایند لوی متناظر با توزیع نرمال و به طور مشابه فرایند پواسون، فرایند لوی متناظر با توزیع پواسون است.

در بخش بعد، خاصیت تقسیم پذیر نامتناهی رده بزرگی از توزیع‌ها بررسی می‌شود. همچنین با استفاده از توابع هم‌وردا و ناوردا توابعی از متغیرهای تصادفی نرمال مورد بررسی قرار خواهند گرفت که تقسیم پذیر نامتناهی هستند یا به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه می‌شوند که یکی از آن‌ها تقسیم پذیر نامتناهی است.

^۶ stochastic processes

^۷ stationary increments

^۸ independent increments

^۹ stochastic continuous

^{۱۰} path property

^{۱۱} sample paths

^{۱۲} brownian motion

^{۱۳} poisson process

^{۱۴} independence

^{۱۵} basu's theorem

۲ مدل سازی توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی با استفاده از توابع هم وردا و ناوردا

قانون گلدی-استیوتل^{۲۰} می تواند برای تشخیص تقسیم پذیر نامتناهی بودن توزیع ها مفید باشد.

گزاره ۳.۲ (قانون گلدی-استیوتل). متغیر تصادفی مثبت X با تابع چگالی f که به طور کامل یکنواست، تقسیم پذیر نامتناهی است [۳۸].

دو نتیجه مهم زیر از پیامدهای این قانون هستند:

لم ۴.۲. فرض می کنیم متغیر تصادفی U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ باشد و متغیر تصادفی W مستقل از U باشد. آن گاه متغیر تصادفی UW تقسیم پذیر نامتناهی است [۳۸].

لم ۵.۲. اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ باشد، V^α که در آن $\alpha > 0$ است، به صورت $V^\alpha = UW$ تجزیه می شود که U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ و مستقل از W است (و از این رو با توجه به لم ۴.۲، V^α تقسیم پذیر نامتناهی است) [۳۸].

مثال ۶.۲. فرض می کنیم X دارای توزیع پارتو با تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{\alpha}{\mu} (\frac{\mu}{x+\mu})^{\alpha+1}$ باشد. از این که f به طور کامل یکنوا است، گزاره ۳.۲ تقسیم پذیر نامتناهی بودن X را تضمین می کند. با استفاده از لم ۴.۲ و انتخاب متغیر تصادفی W با توزیع گاما نیز می توان به این نتیجه رسید. به طور مشابه توابع چگالی احتمال زیر تقسیم پذیر نامتناهی هستند:

$$f(x) = \frac{2 \ln(|x|)}{\pi^2(x^2 - 1)},$$

$$f(x) = \frac{1}{2(1 + |x|)^2},$$

$$f(x) = \frac{|x| - \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{x^2}} \Phi(-\frac{1}{|x|})}{\sqrt{2\pi}|x|^3},$$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{2\pi}|x| e^{\frac{x^2}{2}} \Phi(-|x|)}{\sqrt{2\pi}},$$

که در آن Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

یک تعمیم از قانون گلدی-استیوتل به این صورت است که اگر تابع چگالی متغیر تصادفی X را بتوان به صورت $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt$ نوشت که در آن تابع g یک بار تغییر

در بسیاری از مسائل آماری مثل نظریه برآورد و آزمون فرضیه ها نیاز به وجود اثبات استقلال^{۱۴} دو آماره داریم. با استفاده از قضیه باسو^{۱۵} بدون این که توزیع توأم دو آماره محاسبه شود، با داشتن شرایط لازم، وجود این استقلال ثابت می شود. این قضیه باعث کشف ارتباط بین بسندگی،^{۱۶} آماره های کمکی^{۱۷} و استقلال می شود. چنانچه آماره بسنده ای، کامل^{۱۸} باشد علاوه بر داشتن همه اطلاع لازم در باره پارامتر هیچ اطلاع بیشتری در باره آن ندارد. پس چنین آماره ای نمی تواند ارتباطی با یک آماره کمکی داشته باشد که شامل هیچ اطلاعی درباره پارامتر نیست. از این رو استقلال آماره کمکی از آماره بسنده کامل طبیعی به نظر می رسد.

قضیه ۱.۲ (قضیه باسو). اگر آماره T برای خانواده توزیع های $P = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ بسنده و به طور کران دار کامل باشد و آماره U یک آماره کمکی باشد، T و U به ازای هر $\theta \in \Theta$ مستقل اند [۴].

در این بخش می خواهیم به یکی از کاربردهای قضیه باسو، یعنی اثبات تقسیم پذیری نامتناهی برخی آماره ها توسط این قضیه اشاره کنیم.

تشخیص تقسیم پذیر نامتناهی بودن یک متغیر تصادفی مفروض در برخی مواقع مشکل است. گلدی [۱۳] نشان داد که آمیخته های توزیع نمایی، تقسیم پذیر نامتناهی هستند [۳۱، ۳۶]. شان بهاگ و سریهاری [۳۳، ۳۴] و همچنین شان بهاگ و همکاران [۳۵] نتایج گلدی را به آمیخته توزیع گاما تعمیم دادند.

تعریف ۲.۲. تابع را به طور کامل یکنوا^{۱۹} گوئیم هرگاه پیوسته و نزولی باشد و مشتقات از مرتبه های متوالی آن دارای علامت های متفاوت باشند؛ یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x \in D_f$

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}} < 0.$$

^{۱۶} sufficiency

^{۱۷} ancillary statistics

^{۱۸} complete sufficient statistic

^{۱۹} completely monotone

^{۲۰} Goldie-Steutel Law

اثبات. قرار می‌دهیم $g(Z_1, Z_2) = TW$ ، به‌طوری که

$$T = \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2},$$

$$W = \frac{2g(Z_1, Z_2)}{Z_1^2 + Z_2^2}.$$

برای این که نشان دهیم آماره W کمکی است، تابع مشخصه آن را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\varphi_W(t) &= E(e^{itW}) \\ &= E \left[\exp \left(it \frac{2g(Z_1, Z_2)}{Z_1^2 + Z_2^2} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{it \frac{2g(z_1, z_2)}{z_1^2 + z_2^2}} e^{-\left(\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}\right)} dz_1 dz_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2it}{\sigma^2} \frac{g(\sigma z_1, \sigma z_2)}{(z_1 \cdot \sigma)^2 + (z_2 \cdot \sigma)^2}} \\ &\quad e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{z_1}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sigma} \right)^2 \right]} d \left(\frac{z_1}{\sigma} \right) d \left(\frac{z_2}{\sigma} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2it}{\sigma^2} \frac{g(x, y)}{x^2 + y^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{2it}{\sigma^2} \frac{g(x, y)}{x^2 + y^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy\end{aligned}$$

که در تساوی آخر از هم‌وردای مقیاسی بودن تابع g (یعنی $g(\sigma x, \sigma y) = \sigma^2 g(x, y)$) استفاده کردیم. از این که $\varphi_W(t)$ در پی آن توزیع W به پارامتر σ^2 بستگی ندارد، می‌توان کمکی بودن آماره W را تضمین کرد. بنابراین با به کارگیری قضیه باسو آماره کمکی W از آماره T که برای خانواده توزیع‌های $\{N(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$ یک آماره بسنده کامل است، مستقل است. از این رو برای $\sigma = 1$ ، متغیرهای تصادفی W و T از هم مستقل‌اند. از این که T دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است، لم ۵.۲ نتیجه می‌دهد $T^k = UV$ که در آن U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است و از V مستقل است. با به کارگیری لم ۴.۲،

$$\begin{aligned}g^k(Z_1, Z_2)h(Z_3, \dots, Z_n) &= T^k W^k h(Z_3, \dots, Z_n) \\ &= UVW^k h(Z_3, \dots, Z_n)\end{aligned}$$

(که به‌صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل U و $VW^k h(Z_3, \dots, Z_n)$ تجزیه شده و U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است) تقسیم‌پذیر نامتناهی است. $\square$

علامت می‌دهد، آن‌گاه X تقسیم‌پذیر نامتناهی است. همچنین شرط لازم و کافی برای این که متغیر تصادفی $X > 0$ با تابع چگالی f تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد آن است که تابع غیرصعودی τ روی $[0, +\infty]$ با شرط $\int_1^{+\infty} u^{-1} d\tau(u) < +\infty$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x) = x^{-1} \int_x^{+\infty} f(x-u) d\tau(u)$ [۳۸]. بررسی شرایط برقراری این گزاره مشکل است و از این رو گزاره زیر پیشنهاد می‌شود.

گزاره ۷.۲. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی مثبت X دارای تابع چگالی مثبت اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر مرتبه دوم پیوسته باشد. در این صورت X تقسیم‌پذیر نامتناهی است هرگاه برای هر $0 < y \leq x$

$$\frac{f'(y)}{f(y)} \leq \frac{1}{x} + \frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

به‌عنوان نمونه به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که تابع چگالی توزیع نمایی در نامساوی گزاره ۷.۲ صدق می‌کند. بنابراین این توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

تعریف ۸.۲. تابع n -متغیره g را همگن^{۲۱} یا هم‌وردای مقیاسی^{۲۲} و تابع h را ناوردای مقیاسی^{۲۳} گوئیم هرگاه برای هر $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ و هر $c > 0$

$$g(cx_1, \dots, cx_n) = c^n g(x_1, \dots, x_n),$$

$$h(cx_1, \dots, cx_n) = h(x_1, \dots, x_n).$$

اکنون به دو نتیجه اصلی مقاله می‌پردازیم. در قضیه اول، تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن یک رده بزرگ از آماره‌ها متناظر با متغیرهای تصادفی که دو تا از آن‌ها نرمال استاندارد مستقل هستند مطرح می‌شود.

قضیه ۹.۲. فرض می‌کنیم Z_1 و Z_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $N(0, 1)$ باشند و متغیرهای تصادفی $Z_3, \dots, Z_n$ به‌گونه‌ای انتخاب شوند که بردارهای تصادفی $(Z_1, Z_2)^T$ و $(Z_3, \dots, Z_n)^T$ مستقل باشند و همچنین g یک تابع دومتغیره هم‌وردای مقیاسی باشد. در این صورت برای هر $k \in \mathbb{N}$ و هر تابع دلخواه اندازه‌پذیر h ، $g^k(Z_1, Z_2)h(Z_3, \dots, Z_n)$ تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

^{۲۱} homogeneous

^{۲۲} scale equivariant

^{۲۳} scale invariant

مثال ۱۲.۲. فرض می کنیم X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. اختیار می کنیم:

$$g(a) = a,$$

$$h(a, b) = a \pm b.$$

به طور مشابه، قضیه ۹.۲ برای توابع همگن یک متغیره نیز برقرار است. بنابراین متغیر تصادفی

$$g(X_2)h(X_1, X_3) = X_1 X_2 \pm X_2 X_3$$

تقسیم پذیر نامتناهی است.

نتیجه دوم مقاله در مورد توابعی از متغیرهای تصادفی نرمال است که به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی غیر تبا هیده مستقل نوشته می شوند، که یکی از آنها تقسیم پذیر نامتناهی است و دیگری این خاصیت را ندارد.

قضیه ۱۳.۲. فرض می کنیم $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. تابع n -متغیره هم وردای مقیاسی g و توابع ناوردای مقیاسی h_i را برای هر $i = 1, \dots, n$ در نظر می گیریم. اگر $\|X\|$ نرم اقلیدسی بردار $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ باشد، متغیر تصادفی

$$k(X_1, \dots, X_n) = g(\|X\| h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \|X\| h_n(X_1, \dots, X_n)) \quad (2)$$

به صورت $k(X_1, \dots, X_n) = YZ$ تجزیه می شود، که Y تقسیم پذیر نامتناهی است و Z این خاصیت را ندارد و همچنین Y از Z مستقل است.

اثبات. با توجه به خاصیت هم وردای مقیاسی بودن تابع g ,

$$k(X_1, \dots, X_n) = g(\|X\| h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \|X\| h_n(X_1, \dots, X_n))$$

$$= \|X\|^n g(h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, h_n(X_1, \dots, X_n)).$$

با توجه به این که گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت روی فضای بُرد متغیر تصادفی به صورت انتقالی عمل می کند، آماره ناوردای مقیاسی Z

مثال ۱۰.۲. فرض می کنیم $Z_1, \dots, Z_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. اختیار می کنیم:

$$g(a_1, a_2) = a_1 a_2,$$

$$h_1(a_3, \dots, a_n) = \prod_{i=3}^n a_i,$$

$$h_2(a_3, \dots, a_n) = \frac{a_3 \dots a_k}{a_{k+1} \dots a_n}, \quad n \geq 3, \quad 2 \leq k \leq n-1.$$

در این حالت، طبق قضیه ۹.۲ آماره های

$$g(Z_1, Z_2)h_1(Z_3, \dots, Z_n) = Z_1 Z_2 \dots Z_n,$$

$$g(Z_1, Z_2)h_2(Z_3, \dots, Z_n) = \frac{Z_1 Z_2 \dots Z_k}{Z_{k+1} \dots Z_n}$$

تقسیم پذیر نامتناهی هستند.

مثال ۱۱.۲. فرض می کنیم $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع کوشی استاندارد $C(0, 1)$ باشد. در این صورت متغیرهای تصادفی مستقل $Z_1, \dots, Z_n$ با توزیع نرمال استاندارد وجود دارند به طوری که به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$X_i = \frac{Z_{2i-1}}{Z_{2i}}.$$

حال اگر اختیار کنیم:

$$g(a_1, a_3) = a_1 a_3,$$

$$h_1(a_2, a_4, \dots, a_n) = \frac{a_5 \dots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}},$$

$$h_2(a_3, \dots, a_n) = \frac{a_5 \dots a_{2k-1} a_{2k+2} \dots a_{2n}}{a_2 a_4 \dots a_{2k} a_{2k+1} \dots a_{2n-1}};$$

$$\forall n \geq 3, \quad 2 \leq k \leq n-1$$

طبق قضیه ۹.۲ آماره های

$$g(Z_1, Z_2)h_1(Z_3, Z_4, \dots, Z_{2n}) = \frac{Z_1 Z_3 Z_5 \dots Z_{2n-1}}{Z_2 Z_4 \dots Z_{2n}}$$

$$= \frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4} \dots \frac{Z_{2n-1}}{Z_{2n}}$$

$$= X_1 \dots X_n$$

و

$$g(Z_1, Z_2)h_2(Z_3, Z_4, \dots, Z_{2n})$$

$$= \frac{Z_1 Z_3 \dots Z_{2k-1} Z_{2k+2} \dots Z_{2n}}{Z_2 Z_4 \dots Z_{2k} Z_{2k+1} \dots Z_{2n-1}}$$

$$= \frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4} \dots \frac{Z_{2k-1}}{Z_{2k}} \frac{Z_{2k+2}}{Z_{2k+1}} \dots \frac{Z_{2n}}{Z_{2n-1}}$$

$$= \frac{X_1 \dots X_k}{X_{k+1} \dots X_n}$$

تقسیم پذیر نامتناهی هستند.

(ب) $g(h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, h_n(X_1, \dots, X_n))$ کمکی است.

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i^n}{\|\mathbf{x}\|^n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^n$$

و از این رو

$$\begin{aligned} k(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n (\|\mathbf{X}\| h_i(X_1, \dots, X_n))^n \\ &= \|\mathbf{X}\|^n \sum_{i=1}^n \frac{X_i^n}{\|\mathbf{X}\|^n} = \sum_{i=1}^n X_i^n. \end{aligned}$$

(ج)

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{x_i}{x_{i+1}}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \frac{x_n}{x_1}, & i = n \end{cases}$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} k(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{i=1}^n (\|\mathbf{X}\| h_i(X_1, \dots, X_n)) \\ &= \|\mathbf{X}\|^n \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{X_i}{X_{i+1}} \right) \frac{X_n}{X_1} = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

(د)

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_j^{\frac{n}{2}}}{\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{n}{2}}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

و لذا

$$\begin{aligned} k(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{j=1}^n (\|\mathbf{X}\| h_j(X_1, \dots, X_n)) \\ &= \|\mathbf{X}\|^n \prod_{j=1}^n \frac{X_j^{\frac{n}{2}}}{\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{\prod_{j=1}^n X_j^{\frac{n}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}} \right)^n} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n X_j^{\frac{n}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

(هـ)

$$\begin{aligned} h_j(x_1, \dots, x_n) &= \frac{x_j^{\frac{n}{2}}}{\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{n}{2}}}, \\ g_5(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

آماره $Y = \|\mathbf{X}\|^n$ که توانی از توزیع $\mathcal{X}_{(n)}^2$ است، تقسیم‌پذیر نامتناهی و برای خانواده توزیع‌های

$$N(0, \sigma^2): \sigma^2 > 0.$$

بسنده کامل می‌باشد و از این رو طبق قضیه باسو برای هر σ دلخواه به‌ویژه $\sigma = 1$ ، از آماره کمکی Z مستقل است. از طرف دیگر با توجه به خاصیت ناوردای مقیاسی بودن توابع h_i ، تابع پیوسته g توسط مقادیرش روی کره واحد تعیین می‌شود و در پی آن کران‌دار است و از این رو نمی‌تواند تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد. بنابراین تجزیه YZ شامل حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل است که Y تقسیم‌پذیر نامتناهی و Z فاقد این خاصیت است. $\square$

مثال ۱۴.۲. فرض می‌کنیم $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. آن‌گاه متغیرهای تصادفی زیر دارای یک تجزیه به‌صورت داده‌شده در قضیه ۱۳.۲ هستند:

$$T_1(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i \quad (\text{الف})$$

$$T_2(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^n \quad (\text{ب})$$

$$T_3(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (\text{ج})$$

$$T_4(X_1, \dots, X_n) = \frac{\prod_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{د})$$

$$T_5(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{هـ})$$

برای استفاده از قضیه ۱۳.۲، به‌عنوان نمونه توابع ناوردا و هم‌وردای زیر می‌توانند در هر مورد به کار روند (البته هر یک از این حالت‌ها می‌تواند یکی از انتخاب‌ها برای حل مسئله باشد). (الف)

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}}}, & j = 1 \\ 1, & j = 2, \dots, n \end{cases}$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

و در پی آن

$$\begin{aligned} k(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{i=1}^n (\|\mathbf{X}\| h_i(X_1, \dots, X_n)) \\ &= \|\mathbf{X}\|^n \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{\|\mathbf{X}\|^n} = \prod_{i=1}^n X_i. \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} k(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n (||\mathbf{X}|| h_j(X_1, \dots, X_n))^n \\ &= ||\mathbf{X}||^n \sum_{j=1}^n \frac{X_j^{Yn}}{(\sum_{i=1}^n X_i^Y)^n} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n X_i^Y \right)^{\frac{n}{Y}} \frac{\sum_{j=1}^n X_j^{Yn}}{(\sum_{i=1}^n X_i^Y)^n} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n X_j^{Yn}}{(\sum_{i=1}^n X_i^Y)^{\frac{n}{Y}}}. \end{aligned}$$

نتیجه ۱۵.۲. اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد و g یک تابع n -متغیره هموردای مقیاسی باشد، آن گاه $g(X_1, \dots, X_n) = YZ$ به صورت $g(X_1, \dots, X_n)$ تجزیه می شود، که Y تقسیم پذیر نامتناهی است و Z این خاصیت را ندارد و همچنین Y از Z مستقل است.

اثبات. تابع (۲) داده شده در قضیه ۱۳.۲، خود یک تابع هموردای مقیاسی است؛ زیرا به ازای هر $c > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} k(cx_1, \dots, cx_n) &= g(||c\mathbf{x}|| h_1(cx_1, \dots, cx_n), \\ &\quad \dots, ||c\mathbf{x}|| h_n(cx_1, \dots, cx_n)) \\ &= g(c||\mathbf{x}|| h_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\quad \dots, c||\mathbf{x}|| h_n(x_1, \dots, x_n)) \\ &= c^n g(||\mathbf{x}|| h_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\quad \dots, ||\mathbf{x}|| h_n(x_1, \dots, x_n)) \\ &= c^n k(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

از طرف دیگر، تابع

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{||\mathbf{x}||}, \quad i = 1, \dots, n$$

ناوردای مقیاسی؛ است زیرا به ازای هر $c > 0$ و هر i داریم:

$$h_i(cx_1, \dots, cx_n) = \frac{cx_i}{||c\mathbf{x}||} = \frac{x_i}{||\mathbf{x}||} = h_i(x_1, \dots, x_n).$$

بنابراین طبق قضیه ۱۳.۲ با اختیار کردن تابع ناوردای h_i و انتخاب تابع دلخواه هموردای مقیاسی g ,

$$\begin{aligned} k(X_1, \dots, X_n) &= g(||\mathbf{X}|| h_1(X_1, \dots, X_n), \\ &\quad \dots, ||\mathbf{X}|| h_n(X_1, \dots, X_n)) \\ &= g(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه می شود که یکی تقسیم پذیر نامتناهی است و دیگری این خاصیت را ندارد. □

مثال ۱۶.۲. در مثال ۱۴.۲، اگر اختیار کنیم:

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{||\mathbf{x}||}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = T_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, 5$$

با استفاده از نتیجه ۱۵.۲ از این که همه متغیرهای تصادفی داده شده هموردای مقیاسی هستند، برای $i = 1, \dots, 5$ همه $g_i(X_1, \dots, X_n) = T_i(X_1, \dots, X_n)$ دارای یک تجزیه به صورت داده شده در قضیه ۱۳.۲ هستند.

نتیجه ۱۷.۲. اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد و h یک تابع ناوردای مقیاسی باشد، آن گاه $||\mathbf{X}||^n h(X_1, \dots, X_n)$ به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی Y و Z تجزیه می شود که Y تقسیم پذیر نامتناهی است و Z این خاصیت را ندارد.

اثبات. با توجه به این که گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت روی فضای بُرد متغیر تصادفی به صورت انتقالی عمل می کند، آماره ناوردای مقیاسی $h(X_1, \dots, X_n)$ کمکی است و از این رو مشابه اثبات قضیه ۱۳.۲ از آماره بسنده کامل $Y = ||\mathbf{X}||^n$ مستقل است که در آن تجزیه YZ $||\mathbf{X}||^n h(X_1, \dots, X_n)$ شامل حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل است که Y تقسیم پذیر نامتناهی و Z فاقد این خاصیت است. □

مثال ۱۸.۲. در مثال ۱۴.۲ با در نظر گرفتن توابع ناوردای مقیاسی مناسب زیر می توان متغیرهای تصادفی مفروض را به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه کرد که یکی تقسیم پذیر نامتناهی و دیگری فاقد این خاصیت است:

$$h_1(X_1, \dots, X_n) = \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{||\mathbf{X}||^n} \quad (\text{الف})$$

$$h_2(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^n}{||\mathbf{X}||^n} \quad (\text{ب})$$

$$h_3(X_1, \dots, X_n) = 1 \quad (\text{ج})$$

$$h_4(X_1, \dots, X_n) = \frac{\prod_{i=1}^n X_i^{Yn}}{||\mathbf{X}||^{Yn}} \quad (\text{د})$$

$$h_5(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{Yn}}{||\mathbf{X}||^{Yn}} \quad (\text{هـ})$$

۳ نتیجه گیری

استفاده شد. اکنون این سؤال مطرح می شود که آیا این نتایج را می توان در مورد توابع ناورد و هم وردا برای یک گروه عمومی از تبدیلات نیز تعمیم داد. برای رسیدن به این منظور می توان در حالت کلی، توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی چندمتغیره را در نظر گرفت و نتایج این مقاله را برای هر گروه دلخواه و توابع ناورد و هم وردا نسبت به آن گروه تعمیم داد، که این مهم نیاز به تحقیقات بیشتری دارد و علاقه مندان می توانند به نوآوری های دیگری دست یابند.

در این مقاله پس از معرفی توزیع های تقسیم پذیر نامتناهی، این خاصیت در یک رده بزرگ از آماره ها مطرح شد. همچنین توابعی از متغیرهای تصادفی نرمال مورد بررسی قرار گرفت که این متغیرها به صورت حاصل ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه می شوند که یکی از آنها تقسیم پذیر نامتناهی است. برای رسیدن به دو نتیجه اصلی مقاله از توابع ناورد و هم وردای مقیاسی

مراجع

- [1] Adler, R. J., Feldman, R. E., and Taqqu, M. S. (1998). *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analysing Heavy Tailed Distributions*, Birkhauser, Boston.
- [2] Arad, R. W. (1980). Parameter estimation for symmetric stable distributions, *International Economic Review*, **21**, 209-220.
- [3] Barndorff-Nielsen, O. E., Lunde, A., Shephard, N., and Veraart, A. E. D. (2014). Integer-valued trawl processes: A class of stationary infinitely divisible processes, *Scandinavian Journal of Statistics*, **41**, 693-724.
- [4] Basu, D. (1955). On statistics independent of a complete sufficient statistic, *Sankhya*, **15**, 377-380.
- [5] Bertoin, J. (1998). *Levy processes*, **121**, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Bondesson, L. (1992). Generalized gamma convolutions and related classes of distributions and densities, *Lecture Notes in Statistics*, **76**, Springer, Berlin.
- [7] Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory*, Academic Press.
- [8] De Finetti, B. (1929). Sulle funzioni ad incremento aleatorio, *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, **10**, 163-168.
- [9] Feller, W. (1939). Neuer Beweis fur die Kolmogoroff-P. Levysche Charakterisierung der unbeschränkt teilbaren Verteilungsfunktionen, *Bulletin international de l'Académie Yougoslave des Sciences et des beaux-arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles*, **32**, 1-8.
- [10] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd Edn, Wiley, New York.
- [11] Fisz, M. (1962). Infinitely divisible distributions: recent results and applications, *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 68-84.
- [12] Gamrowski, B. and Rachev, S. T. (1994). *Stable models in testable asset pricing*, In *Approximation, Probability, and Related fields (Santa Barbara, 1993)*, Plenum Press, New York.

- [13] Goldie, C. M. (1967). A Class of Infinitely Divisible Distributions, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **63**, 1141–1143.
- [14] Gnedenko, B. V. (1954). *The theory of probability*, 4th ed, Translated from the Russian by B.D. Seckler. Chelsea Publishing Company, New York.
- [15] Gnedenko, B.V. (1991), *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abteilung 39, Akademie, Berlin.
- [16] Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N. (1968). *Limit distributions for sums of independent random variables*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading.
- [17] Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*, Springer, New York.
- [18] Ito, K. (1942). On stochastic processes I (Infinitely divisible laws of probability), *Japanese Journal of Mathematics*, **18**, 261–301.
- [19] Khintchine, A. Y. (1937a). Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze, *Recueil Mathématique. Matematcheskii Sbornik. Moscow*, **2**, 79–117.
- [20] Khintchine, A. Y. (1937b). Deduction nouvelle d'une formule de M. Paul Levy, *Bulletin of Mathematical University Moscow*, **1**, 6-17.
- [21] Kolmogorov, A. N. (1932). Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, *Rendiconti Accademia Lincei*, **15**, 805–808, 866–869.
- [22] Levy, P. (1934). Sur les integrales dont les elements sont des variables aleatoires independantes, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **3**, 337–366.
- [23] Levy, P. (1937). *Theorie de l'Addition des Variables Aleatoires*, Gauthier Villiers, Paris.
- [24] Liu, S.M. and Brorsen, B.W. (1995). Maximum likelihood estimation in GARCH-stable model, *Journal of Applied Econometrics*, **10**, 273-285.
- [25] Loeve, M. (1973). Paul Levy, 1886–1971, *Annals of Probability*, **1**, 1–18.
- [26] Mandelbrot, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394-419.
- [27] McCrudden, M. and Walker, S. (1999), Infinitely divisible probabilities on linear p-adic groups, *Proceedings Indian Academy of Sciences-Mathematical*, **109**, 299–302.
- [28] McCrudden, M. and Walker, S. (2000). Embedding infinitely divisible probabilities on subsemigroups of Lie groups, *Contemporary Mathematics*, **261**, 43–58.
- [29] Officer, R. R. (1972). The distributin of stock returns, *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 807-812.

- [30] Saito. S. and Tanaka, T. A. (2012). Note on Infinite Divisibility of Zeta Distributions, *Applied Mathematical Sciences*, **30**, 1455 – 1461.
- [31] Satheesh, S.A. (2003). *Supplement to the Bose-DasGupta-Rubin (2002) Review of Infinitely Divisible Laws and Processes*, arXiv preprint math.0305126.
- [32] Sato, K. (1999). Levy processes and infinitely divisible distributions, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 68.
- [33] Shanbhag, D. N. and Sreehari, M. (1977). On certain self-decomposable distributions, *Z. Wahr. Verw. Geb.*, **38**, 217 – 222.
- [34] Shanbhag, D. N. and Sreehari, M. (1979). An extension of Goldie's result and further results in infinite divisibility, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **47(1)**, 19–25.
- [35] Shanbhag, D. N., Pestana, D. and Sreehari, M (1977). Some further results in infinite divisibility, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **82**, 289 – 295.
- [36] Steutel, F. W. (1967). Note on the Infinite Divisibility of Exponential Mixtures, *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1303-1305.
- [37] Steutel, F. W., (1973). Some recent results in infinite divisibility, *Stochastic Processes and their Applications*, **1**, 125–143.
- [38] Steutel, F. W. (1979). Infinite divisibility in theory and practice, *Scandinavian Journal of Statistics*, **6**, 57–64.
- [39] Steutel, F. W. (1983). *Infinite Divisibility*, Encyclopedia of Statistical Sciences.
- [40] Steutel, F. W. and Van Harn, K (2003). *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, CRC Press.
- [41] Warde, W. D. and Katti, S. K. (1967). On the infinite divisibility of discrete distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1306-1308.
- [42] Yasuda, K. (2000). On infinitely divisible distributions on locally compact abelian groups, *Journal of Theoretical Probability*, **13**, 635–657.