مقایسه پنج فاصله اطمینان معرفی شده برای پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای

علی رضا شیروانی [۱] مینا توحیدی [۲]

چکیده:

تا به حال فاصله‌های اطمینان متعددی برای پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای معرفی شده‌اند. در این مقاله به مقایسه پنج فاصله اطمینان معروف براساس مقدار دقیق ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش آن‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع دوجمله‌ای، فاصله اطمینان، احتمال پوشش، ضریب اطمینان، میانگین احتمال پوشش.

۱ مقدمه

همان طور که می‌دانید مسائل بسیاری در زندگی روزمره ما وجود دارند که فقط می‌توانند منجر به پیروزی یا شکست شوند. مثلاً بازی شیر و خط، آزمایشهای طبی که نتیجه مثبت یا منفی دارند، قبولی در یک آزمون، ضربه پنالتی در مسابقات فوتبال و تمامی پرسش‌هایی که پاسخ آنها بله یا خیر می‌باشد. به همین دلیل برآورد احتمال پیروزی این آزمایش‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این احتمال پیروزی همان پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای است. در این مقاله سه فاصله اطمینان معرفی شده برای پارامتر نسبت توسط براون و همکارانش (۲۰۰۲) و همچنین فاصله اطمینانهای والد [۳] و کلاپر- پیرسون (۱۹۳٤) را در نظر می‌گیریم و با استفاده از نتایج به دست آمده توسط وانگ (۲۰۰۹) ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش آنها را به صورت دقیق محاسبه می‌کنیم. در انتها این فواصل را با توجه به محاسبات انجام شده مقایسه می‌کنیم.

۲ روش محاسبه دقیق ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته یک بعدی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)$ باشد، جایی‌که θ یک پارامتر مجهول و $x \in S = \{0, 1, ..., n\}$ است. Ω را به عنوان فضای پارامتری در نظر بگیرید. فرض کنید l و u به ترتیب کران پایین و کران بالای فضای پارامتری باشند. اگر $(L(X), U(X))$ یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ باشد، احتمال پوشش آن برابر است با احتمال این‌که این فاصله تصادفی مقدار درست θ را در بر داشته باشد. ضریب اطمینان فاصله فوق برابر با اینفیمم احتمالهای پوشش روی فضای پارامتری است، یعنی داریم:

$$inf_{\theta\in\Omega} P_\theta(\theta \in (L(X), U(X))).$$

فرض کنید $\eta(\theta)$ یک تابع چگالی پیشین روی Ω باشد، آن‌گاه تحت این تابع چگالی پیشین میانگین احتمال پوشش فاصله $(L(X), U(X))$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_\Omega P_\theta(\theta \in (L(X), U(X)))\eta(\theta)d\theta$$

ممکن است در توزیعهای پیوسته تابع احتمال پوشش برای همه نقاط فضای پارامتری یکسان باشد، اما در توزیعهای گسسته تابع احتمال پوشش با تغییر مقدار درست پارامتر مجهول در فضای پارامتری، تغییر می‌کند. به همین دلیل یافتن ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش دقیق در این توزیعها مشکل است. وانگ (۲۰۰۹) روش محاسبه دقیق این دو معیار را برای فواصل اطمینانی که دارای چند شرط معین هستند، در توزیعهای گسسته‌ای که شرط فرض ۱.۲ را دارند، ارائه داده است. در این بخش روش وانگ [٤] را مرور میکنیم. در مقاله وانگ توزیعهایی در نظر گرفته شده که فرض ۱.۲ در مورد آنها صادق است.

[۱] مربی گروه آمار دانشگاه ولایت

[۲] دانشیار گروه آمار دانشگاه شیراز

[۳] بلیث و استیل (۱۹۸۳)

[٤] بدون اثبات

فرض ۱.۲. اگر $f_\theta(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع مورد نظر باشد، آنگاه $\sum_{x=h_1}^{h_2} f_\theta(x)$ یک تابع تک مدی، نزولی و یا صعودی از θ است.(برای هر h_1 و h_2 که $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq n$)

گزاره ۲.۲. خانواده‌های نمایی که دارای خاصیت *MLR* در x باشند، شرایط فرض ۱.۲ را دارند.

گزاره ۲.۲ نشان می‌دهد روشی که در این‌جا ارائه می‌شود را می‌توان برای خانواده‌های نمایی، از جمله توزیع دوجمله‌ای به کار گرفت. برای محاسبه ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش باید فاصله اطمینان مورد نظر شرایطی داشته باشد. ابتدا شرایط مورد نیاز را در قالب چند فرض بیان می‌کنیم و سپس روش محاسبه ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش دقیق را بدون اثبات ارائه می‌دهیم.

فرض ۳.۲. برای فاصله اطمینان $(L(X),U(X))$ داشته باشیم:

۱) اگر $X_1 < X_2$ ، آنگاه: $L(X_1) < L(X_2)$ و $U(X_1) < U(X_2)$.

۲) $L(0) \leq l \leq U(0)$ و $L(n) \leq u \leq U(n)$.

فرض ۴.۲. برای فاصله اطمینان $(L(X),U(X))$ داشته باشیم:

۱) برای $X_1 > 0$ و $X_2 < n$ ، هر گاه $X_1 < X_2$ ، آنگاه: $L(X_1) < L(X_2)$ و $U(X_1) < U(X_2)$.

۲) $L(0) = U(0) = l$ و $L(n) = U(n) = u$.

فرض ۵.۲. برای فاصله اطمینان $(L(X),U(X))$ داشته باشیم: برای هر نقطه θ که درون فضای پارامتری قرار دارد، یک x_0 در فضای نمونه موجود باشد به طوری که: $\theta \in (L(x_0),U(x_0))$ و $P_\theta(X = x_0) > 0$.

تذکر ۶.۲. توجه کنید که باید این فرض را قرار دهیم که برای هر‌x، اشتراک $(L(x),U(x))$ و فضای پارامتری تهی نیست. این شرط برای اکثر فاصله اطمینان‌ها برقرار است. به همین خاطر آن را در فرض‌های ۱.۲ ، ۳.۲ ، ۴.۲ و ۵.۲ ذکر نکرده‌ایم.

قبل از بیان نتیجه اصلی علامتگذاری‌ها را معرفی می‌کنیم: برای یک فاصله اطمینان $(L(X),U(X))$، $2(n+1)$ نقطه انتهائی متناظر با $X = 0,1,...,n$ وجود دارند که عبارت از مقادیر ذیر هستند:

$$L(0), L(1), ..., L(n)$$

$$U(0), U(1), ..., U(n)$$

فرض کنید g نقطه از این نقاط انتهایی بین l و u قرار داشته باشند. این g نقطه را به ترتیب صعودی مرتب میکنیم و آنها را $v_1, ..., v_g$ نام‌گذاری می‌کنیم. با نقاط $v_1, ..., v_g$ می‌توانیم فضای پارامتری را به $(g+1)$ زیرفاصله تقسیم کنیم. Ω^o را مجموعه نقاط درونی Ω در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم:

$$W = \{w : w = l, w = u, w = L(X),$$

$$, w = U(X); X = 0,1,...,n, w \in \Omega^o\}.$$

یعنی W مجموعه‌ای است که کران پایین و بالای فضای پارامتری و نقاط انتهایی (متعلق به Ω^o) فواصل اطمینان را در بر دارد.

قضیه ۷.۲. فرض کنید $f_\theta(x)$ شرط فرض ۱.۲ را دارد. ضریب اطمینان فاصله $(L(X),U(X))$ برای θ که در شرط فرض ۵.۲ صدق میکند و شرایط یکی از فرضهای ۳.۲ یا ۴.۲ را دارد برابر است با مینیمم احتمالات پوشش به ازای نقاط W.

قضیه ۸.۲. با در نظر گرفتن فرضیات قضیه ۷.۲ داریم:

۱) احتمال پوشش در یک نقطه انتهایی پایینی $L(x)$ برابر با $\sum_{i=w_1(x)}^{x-1} f_\theta(i)$ است، جایی که:
$$w_1(x) = max([U^{-1}(L(X))] + 1, 0).$$

۲) احتمال پوشش در یک نقطه انتهایی بالایی $U(x)$ برابر با $\sum_{i=x+1}^{w_2(x)} f_\theta(i)$ است، جایی که:
$$w_2(x) = min([L^{-1}(U(X))], n).$$

۳) احتمال پوشش در کران پایین فضای پارامتری (l) برابر است با $\sum_{i=0}^{L^{-1}(l)} f_\theta(i)$ ، اگر فاصله اطمینان شرایط فرض ۳.۲ را داشته باشد و برابر است با $\sum_{i=1}^{L^{-1}(l)} f_\theta(i)$، اگر فاصله اطمینان شرایط فرض ۴.۲ را داشته باشد.

۴) احتمال پوشش در کران بالای فضای پارامتری (u) برابر است با $\sum_{i=U^{-1}(u)+1}^{n} f_\theta(i)$ اگر فاصله اطمینان شرایط فرض ۳.۲ را داشته باشد و برابر است با $\sum_{i=U^{-1}(u)+1}^{n-1} f_\theta(i)$ اگر فاصله اطمینان شرایط فرض ۴.۲ را داشته باشد.

قضیه ۹.۲. متغیر تصادفی گسسته X با تابع جرم احتمال $f_\theta(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید یک فاصله اطمینان $(L(X), U(X))$ برای θ در اختیار داریم که در شرط فرض ۵.۲ صدق می‌کند و شرایط یکی از فرض‌های ۳.۲ یا ۴.۲ را دارد و از بین $2(n+1)$ نقطه انتهایی این فاصله اطمینان، g نقطه متعلق به Ω^o هستند. این g نقطه v_1 و...و v_g، فضای پارامتری را به $(g+1)$ زیرفاصله تقسیم می‌کنند. جز زیرفاصله اول (l, v_1)، کران پایین g زیر فاصله دیگر، یک نقطه انتهایی پایینی یا یک نقطه انتهایی بالایی فاصله اطمینان است. کران پایین زیرفاصله اول، کران پایین فضای پارامتری(l) است. برای θ-های متعلق به زیرفاصله اول، وقتی فاصله اطمینان شرایط فرض ۳.۲ یا ۴.۲ را داشته باشد، تابع احتمال پوشش به ترتیب برابر است با $\sum_{i=0}^{L^{-1}(l)} f_\theta(i)$ یا $\sum_{i=1}^{L^{-1}(l)} f_\theta(i)$. برای θ-های متعلق به g زیرفاصله دیگر (این فواصل را به صورت (v_i, v_{i+1}) در نظر بگیرید، به طوری که $v_{g+1} = u$ باشد.):

۱) اگر کران پایین زیرفاصله (v_i) یک نقطه انتهایی پایینی فاصله اطمینان $(L(x))$ باشد، آن‌گاه تابع احتمال پوشش برای θ-های متعلق به زیرفاصله، برابر مقدار $\sum_{i=w_1(x)}^{x} f_\theta(i)$است. زمانی که $w_1(x)$ و $w_2(x)$ همان توابع به کار رفته در قضیه ۸.۲ هستند.

ii. اگر کران پایین زیرفاصله (v_i) یک نقطه انتهایی بالایی فاصله اطمینان $(U(x))$ باشد، آن‌گاه تابع احتمال پوشش برای θ-های متعلق به زیرفاصله، برابر مقدار $\sum_{i=x+1}^{w_2(x)} f_\theta(i)$ است.

با توجه به قضایای فوق می‌توان ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش را به صورت دقیق محاسبه کرد.

۱.۲ محاسبه دقیق ضریب اطمینان

گام ۱: فاصله اطمینان مورد نظر در فرض ۵.۲ را بررسی می‌کنیم که آیا صدق میکند یا خیر. اگر این فرض برقرار نباشد، ضریب اطمینان صفر است. اگر فرض ۵.۲ برقرار بود، باید مطمئن شویم که یکی از دو فرض ۳.۲ و ۴.۲ نیز برقرار باشد، در غیر این‌صورت به گام ۲ نمی‌رویم.

گام ۲: نقاط انتهایی فواصل اطمینان متناظر با$X = 0, 1, ..., n$، که درون فضای پارامتری قرار دارند را در نظر می‌گیریم. احتمالات پوشش متناظر با نقاط به دست آمده و کرانهای پایین و بالای فضای پارامتری را محاسبه میکنیم. مینیمم این احتمالات پوشش، همان ضریب اطمینان دقیق است.

۲.۲ محاسبه دقیق میانگین احتمال پوشش

فرض کنید $\eta(\theta)$ یک تابع چگالی پیشین روی Ω باشد، با این چگالی پیشین میانگین احتمال پوشش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

گام ۱: ابتدا بررسی می‌کنیم که فاصله اطمینان مورد نظر، شرایط یکی از فرضهای ۳.۲ یا ۴.۲ را داشته باشد.

گام ۲: اگر شرایط یکی از فرضهای ۳.۲ یا ۴.۲ برقرار باشد و g نقطه انتهایی متعلق به Ω^o موجود باشد، این نقاط را به ترتیب صعودی مرتب میکنیم و آنها را به ترتیب v_1 و...و v_g می‌نامیم.

گام ۳: با استفاده از قضیه ۹.۲ تابع احتمال پوشش را برای $g + 1$ زیر فاصله فضای پارامتری محاسبه می‌کنیم. تابع احتمال پوشش برای هر زیرفاصله (v_i, v_{i+1}) ، $i = 1, 2, ...g$ را با e_i نشان می‌دهیم. همچنین تابع احتمال پوشش در فاصله (l, v_1) را با e_0 نشان می‌دهیم.

گام ۴: مقدار دقیق میانگین احتمال پوشش با در نظر گرفتن تابع چگالی پیشین $\eta(\theta)$ برابر مقدار زیر است:

$$\int_l^{v_1} e_0(\theta)\eta(\theta)\, d\theta + \int_{v_1}^{v_2} e_1(\theta)\eta(\theta)\, d\theta$$

$$+ ... + \int_{v_i}^{v_{i+1}} e_i(\theta)\eta(\theta)\, d\theta +$$

$$... + \int_{v_g}^{u} e_g(\theta)\eta(\theta)\, d\theta$$

۳ فواصل اطمینان معروف پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید k چندک $\frac{\alpha}{2}$ بالایی توزیع نرمال استاندارد باشد و $\widetilde{X}=X+\frac{k^2}{2}$ و $\widetilde{n}=n+k^2$ و $\widetilde{p}=\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{n}}$ و $\widetilde{q}=1-\widetilde{p}$ و $\widehat{p}=\frac{X}{n}$ و $\widehat{q}=1-\widehat{p}$. پنج فاصله اطمینان در زیر معرفی شده‌اند:

۱.۳ فاصله اطمینان $Wilson$

فاصله ویلسون $100(1-\alpha)$ درصد برای پارامتر نسبت p توسط براون و همکارانش (۲۰۰۲) به شکل زیر ارائه شد:

$$CI_W(X):\widetilde{p}\mp\frac{kn^{\frac{1}{2}}}{n+k^2}(\widehat{p}\widehat{q}+\frac{k^2}{4n})^{\frac{1}{2}}$$

این فاصله اطمینان شرایط فرضهای ۳.۲ و ۵.۲ را دارد (برای دیدن چگونگی از باندهای پایین و بالای این فاصله اطمینان نسبت به x مشتق بگیرید). بنابراین میتوانیم ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش دقیق آن را محاسبه کنیم.

۲.۳ فاصله اطمینان $Wald$

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد والد برای p که توسط بلیث و استیل (۱۹۸۳) معرفی شد، عبارت از:

$$\widehat{p}\mp z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

است. این فاصله اطمینان شرایط فرضهای ۴.۲ و ۵.۲ را دارد و ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش آن به صورت دقیق قابل محاسبه است.

۳.۳ فاصله اطمینان $Agresti-Coull$

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد اگرستی-کول برای p عبارت از:

$$CI_{Ag}(X):\widetilde{p}\mp k(\widetilde{p}\widetilde{q})^{\frac{1}{2}}\widetilde{n}^{\frac{-1}{2}}$$

است. این فاصله اطمینان توسط براون و همکارانش (۲۰۰۲) ارائه شد و شرایط فرضهای ۳.۲ و ۵.۲ را دارد (برای دیدن چگونگی از باندهای پایین و بالای این فاصله اطمینان نسبت به x مشتق بگیرید).

۴.۳ فاصله اطمینان نسبت درستنمایی

فاصله $100(1-\alpha)$ درصد $Likelihoodratio$ برای p عبارت از:

$$CI_{\Lambda_n}(X)=\{p:\ \frac{p^X(1-p)^{n-X}}{(\frac{X}{n})^X(1-\frac{X}{n})^(n-X)}>e^{\frac{-k^2}{2}}\}$$

است. این فاصله اطمینان نیز توسط براون و همکارانش ارائه شد و شرایط فرضهای ۳.۲ و ۵.۲ را دارد.

۵.۳ فاصله اطمینان دقیق

فاصله اطمینان دقیق را برای اولین بار کلاپر و پیرسون در سال ۱۹۳۴ میلادی معرفی کردند.

به همین خاطر این فاصله اطمینان را فاصله اطمینان $ClopperPearson$ نیز می‌نامند. فرم صریح این فاصله اطمینان توسط بلیث (۱۹۸۶) به صورت زیر ارائه شد:

$$CI_{CP}(x)=((1+(n-x+1)\times\frac{F(1-\frac{\alpha}{2};2n-2x+2,2x)}{x})^{-1},(1+\frac{1}{x+1}\times\frac{n-x}{F(\frac{\alpha}{2};2x+2,2n-2x)})^{-1}),$$

جایی که $F(\alpha;r_1,r_2)$ چندک α ام بالایی توزیع F با درجات آزادی r_1 و r_2 است. این فاصله اطمینان نیز شرایط فرض ۳.۲ و ۵.۲ را دارد.

۴ مقایسه فواصل اطمینان پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای

در این بخش فواصل اطمینان معرفی شده برای پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای در بخش ۳ را به طور هم‌زمان از نظر ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش مقایسه می‌کنیم. برای محسوس‌تر شدن این مقایسه‌ها ابتدا توابع احتمال پوشش این فواصل اطمینان ۹۵ درصد را برای اندازه نمونه ۵ در شکل ۱ ترسیم کرده‌ایم.

جداول ۱ تا ۳ نیز ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش و میانگین طول فواصل مذکور را برای اندازه نمونه‌های مختلف نشان

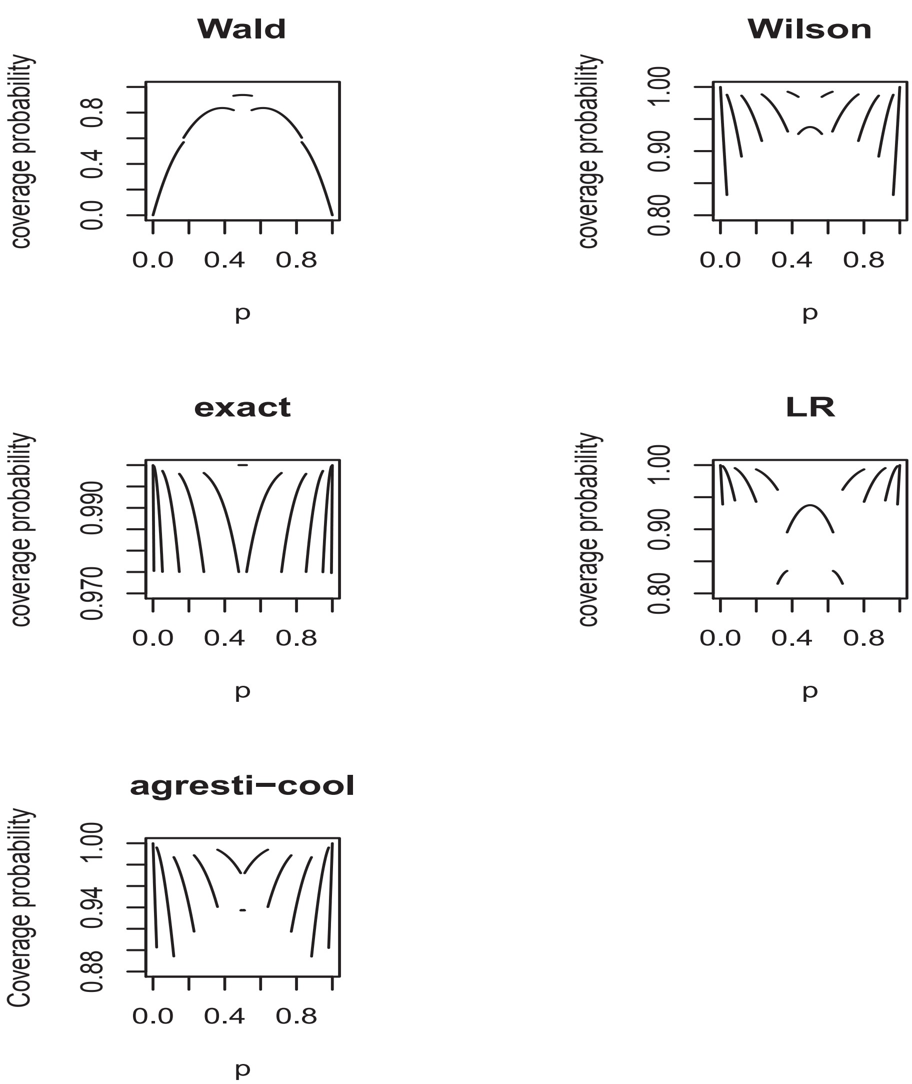
می‌دهند. همچنین در شکل‌های ۲ و ۳ و ٤ به ترتیب ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش و میانگین طول همه این فواصل در کنار هم نشان داده شده است.

همان طور که شکل شماره ۲ نشان می‌دهد، ضریب اطمینان فاصله اطمینان دقیق به طرز قابل توجهی بیشتر از سه فاصله دیگر است. ضریب اطمینان فاصله اگرستی-کول نیز نسبت به ضرائب اطمینان فواصل ویلسون و نسبت درستنمایی بیشتر است. جالب است بدانید که ضرائب اطمینان فاصله‌های ویلسون و اگرستی-کول یک روند صعودی نسبت به n دارند، هرچند که همیشه با افزایش n افزایش نمی‌یابند.

این موضوع در مورد فاصله نسبت درستنمایی صحت ندارد. ضریب اطمینان فاصله اطمینان دقیق نیز یک روند نزولی نسبت به n دارد.

شکل شماره ٤ نشان می‌دهد که طول فواصل اطمینان معرفی شده جز برای n-های کوچک تفاوت چندانی ندارد.

حال فواصل را از نظر میانگین احتمال پوشش مقایسه می‌کنیم. با توجه به شکل شماره ۳، از نظر میانگین احتمال پوشش به ترتیب فواصل اطمینان دقیق، اگرستی-کول، ویلسون، ماکزیمم درستنمایی و والد ارجحیت دارند. میانگین احتمال پوشش فواصل اگرستی-کول، دقیق و ویلسون نسبت به افزایش اندازه نمونه یک روند نزولی دارند. میانگین احتمال پوشش فاصله والد نیز روندی صعودی را با افزایش اندازه نمونه طی می‌کند. اما میانگین احتمال پوشش فاصله نسبت درستنمایی نوسانات بسیار ناچیزی با افزایش اندازه نمونه دارد و تقریباً ثابت است.



شکل ۱: توابع احتمال پوشش فواصل اطمینان ۹۵ درصد برای $n = 5$

جدول ۱

ضریب اطمینان دقیق فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای اندازه نمونه‌های مختلف

n	$exact$	Lr	$A-cool$	$Wilson$	$Wald$
۵	۰/۹۷۵۰	۰/۸۱۵۰	۰/۸۹۴۱	۰/۸۳۱۵	۰
۲۰	۰/۹۵۸۰	۰/۸۲۲۵	۰/۹۲۹۲	۰/۸۳۶۶	۰
۳۰	۰/۹۵۰۵	۰/۸۱۷۸	۰/۹۳۳۸	۰/۸۳۷۱	۰
۵۰	۰/۹۵۰۸	۰/۸۴۲۶	۰/۹۳۴۵	۰/۸۳۷۶	۰
۷۰	۰/۹۵۰۷	۰/۸۴۲۰	۰/۹۳۶۸	۰/۸۳۷۷	۰
۹۰	۰/۹۵۰۲	۰/۸۴۱۱	۰/۹۳۷۷	۰/۸۳۷۸	۰
۱۰۰	۰/۹۵۰۳	۰/۸۴۰۸	۰/۹۳۸۰	۰/۸۳۷۹	۰
۳۰۰	۰/۹۵۰۱	۰/۸۴۰۸	۰/۹۴۱۶	۰/۸۳۸۱	۰
۶۰۰	۰/۹۵۰۰	۰/۸۴۰۲	۰/۹۴۲۷	۰/۸۳۸۱	۰
۹۰۰	۰/۹۵۰۰	۰/۸۳۶۴	۰/۹۴۳۳	۰/۸۳۸۱	۰

جدول ۲

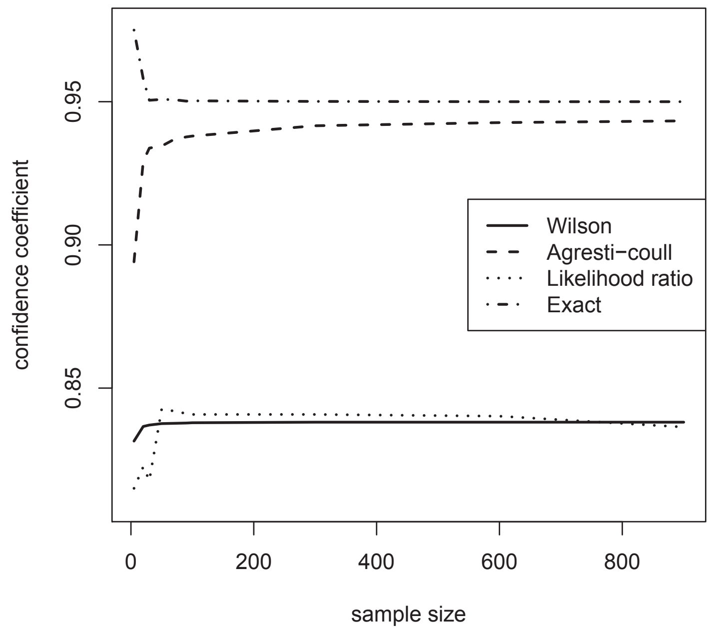
میانگین احتمال پوشش فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای اندازه نمونه‌های مختلف

n	$exact$	Lr	$A-cool$	$Wilson$	$Wald$
۵	۰/۹۹۰۴	۰/۹۴۷۷	۰/۹۶۶۶	۰/۹۵۵۲	۰/۶۴۰۶
۲۰	۰/۹۷۷۰	۰/۹۴۶۵	۰/۹۶۱۸	۰/۹۵۳۰	۰/۸۴۵۸
۳۰	۰/۹۷۳۴	۰/۹۴۷۱	۰/۹۶۰۱	۰/۹۵۲۴	۰/۸۷۴۹
۵۰	۰/۹۶۹۳	۰/۹۴۷۸	۰/۹۵۸۰	۰/۹۵۱۸	۰/۹۰۰۶
۷۰	۰/۹۶۶۹	۰/۹۴۸۳	۰/۹۵۶۷	۰/۹۵۱۴	۰/۹۱۲۶
۹۰	۰/۹۶۵۲	۰/۹۴۸۵	۰/۹۵۵۹	۰/۹۵۱۲	۰/۹۱۹۷
۱۰۰	۰/۹۶۴۶	۰/۹۴۸۶	۰/۹۵۵۵	۰/۹۵۱۱	۰/۹۲۲۳
۳۰۰	۰/۹۵۹۱	۰/۹۴۹۴	۰/۹۵۲۷	۰/۹۵۰۵	۰/۹۳۹۱
۶۰۰	۰/۹۵۶۷	۰/۹۴۹۷	۰/۹۵۱۶	۰/۹۵۰۳	۰/۹۴۴۰
۹۰۰	۰/۹۵۵۵	۰/۹۴۹۷	۰/۹۵۱۲	۰/۹۵۰۲	۰/۹۴۵۸

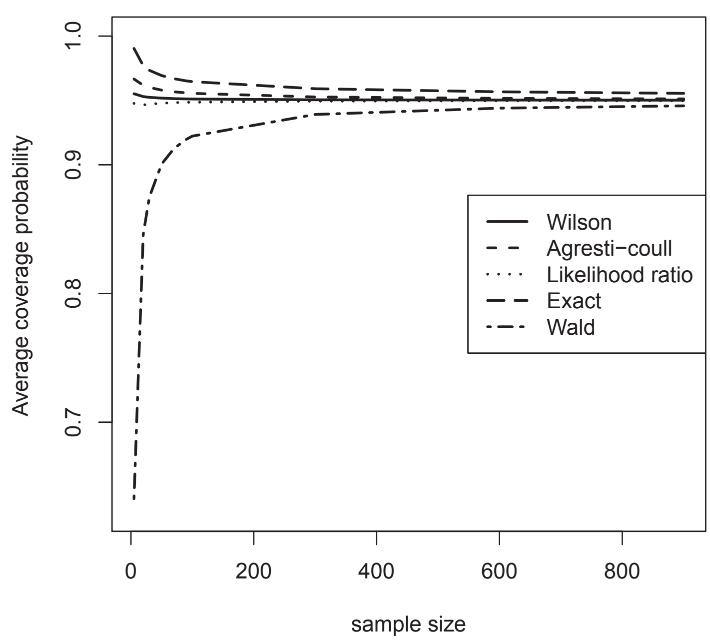
جدول ۳

میانگین طول فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای اندازه نمونه‌های مختلف

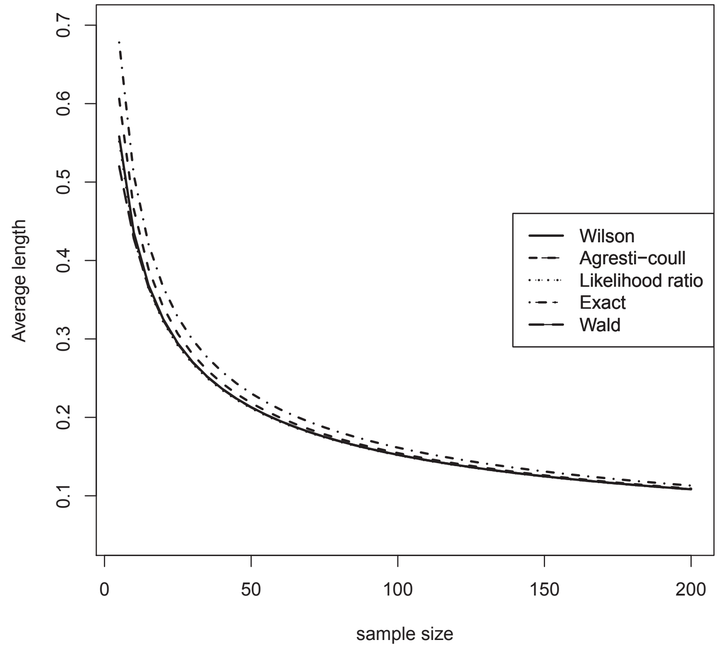
n	$exact$	Lr	$A-cool$	$Wilson$	$Wald$
۵	۰/۶۷۷۹۳۸	۰/۵۵۱۶۰۰	۰/۶۰۶۲۰۸	۰/۵۵۸۱۳۴	۰/۵۲۰۰۲۰
۲۰	۰/۳۶۶۰۷۰	۰/۳۲۱۸۰۰	۰/۳۴۰۸۱۳	۰/۳۲۵۳۶۵	۰/۳۲۳۹۵۶
۳۰	۰/۲۹۹۰۴۷	۰/۲۶۸۳۵۵	۰/۲۸۰۶۶۵	۰/۲۷۰۷۵۸	۰/۲۷۰۲۳۶
۵۰	۰/۲۳۰۵۹۳	۰/۲۱۱۵۸۸	۰/۲۱۸۳۲۹	۰/۲۱۲۹۵۰	۰/۲۱۲۷۹۴
۷۰	۰/۱۹۳۹۹۹	۰/۱۸۰۲۴۲	۰/۱۸۴۶۵۷	۰/۱۸۱۱۴۱	۰/۱۸۱۰۷۲
۹۰	۰/۱۷۰۴۵۰	۰/۱۵۹۶۶۴	۰/۱۶۲۸۵۵	۰/۱۶۰۳۲۲	۰/۱۶۰۲۸۳
۱۰۰	۰/۱۶۱۴۴۲	۰/۱۵۱۷۲۳	۰/۱۵۴۴۸۶	۰/۱۵۲۲۸۳	۰/۱۵۲۲۵۳
۳۰۰	۰/۰۹۱۷۳۴	۰/۰۸۸۴۳۸	۰/۰۸۹۰۵۱	۰/۰۸۸۵۶۶	۰/۰۸۸۵۶۳
۶۰۰	۰/۰۶۴۳۴۴	۰/۰۶۲۶۸۶	۰/۰۶۲۹۱۷	۰/۰۶۲۷۳۷	۰/۰۶۲۷۳۶
۹۰۰	۰/۰۵۲۳۳۲	۰/۰۵۱۲۲۲	۰/۰۵۱۳۵۴	۰/۰۵۱۲۵۴	۰/۰۵۱۲۵۴



شکل ۲: ضریب اطمینان دقیق در برابر اندازه نمونه



شکل ۳: میانگین احتمال پوشش در برابر اندازه نمونه



شکل ٤: میانگین طول در برابر اندازه نمونه

مراجع

[1] Blyth, C.R.(1986)."Approximate Binomial Confidence Limits." Journal of the American Statistical Association.,Vol.81,pp.843-855 .

[2] Blyth,C.R. , Still ,H.A. (1983) ." Binomial confidence intervals."J. Amer. Statist. Assoc.,Vol.78,pp.108–116.

[3] Brown, L. D., Cai, T. and DasGupta, A. (2002)."Confidence intervals for a binomial and asymptotic expansions." Ann. Statist. ,Vol.30, pp.160-201.

[4] Clopper, C.J., Pearson, E.S. (1934)." The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial." Biometrika .,Vol.26,pp.404–413.

[5] Wang, H. (2009)."Exact average coverage probabilities and confidence coefficients of confidence intervals for discrete distributions." Stat Comput.,Vol.19,pp. 139–148.