

تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته

صدیقه امیدوار شلمانی^۱

چکیده:

استنباط آماری به مساله بررسی ویژگی های جامعه براساس نمونه های تصادفی تولید شده از توزیع آن جامعه می پردازد. از این رو تولید نمونه تصادفی از یک توزیع، نقشی مهم در تجزیه و تحلیل های آماری ایفا می کند. تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما یکی از قدیمی ترین و مهم ترین مسائل آماری است. روش های متعددی برای تولید اعداد تصادفی از توزیع گاما وجود دارد. در این مقاله، به چگونگی تولید یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته می پردازیم.

واژه های کلیدی: آزمون کولموگروف - اسمیرنوف، برآوردگر L -گشتاوری، توزیع نمایی تعمیم یافته

۱ مقدمه

این ویژگی توزیع وایبل ممکن است آنچنان مطلوب نباشد. اخیراً گوپتا و کندو (۱۹۹۹)، حالت خاصی از توزیع وایبل نمایی شده را که توسط مودهولکار و همکاران (۱۹۹۵) معرفی شده بود، در نظر گرفتند و آن را توزیع نمایی تعمیم یافته (GE) نامیدند. آن ها نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته می تواند جایگزین مناسبی برای توزیع های گاما و وایبل و حتی لگ نرمال باشد. توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری دارای تابع چگالی احتمال به فرم زیر است:

$$f(x; \alpha, \sigma) = \frac{\alpha}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)\right)^{\alpha-1}. \quad (1)$$

که در آن $\sigma, \alpha > 0$ به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس هستند. توزیع نمایی تعمیم یافته دارای نرخ خطر افزایشی، کاهشی و ثابت است. به ازای هر مقدار σ ، اگر $\alpha > 1$ نرخ خطر افزایشی، اگر $\alpha < 1$ کاهشی و برای $\alpha = 1$ ثابت است. این ویژگی توزیع نمایی تعمیم یافته آن را از توزیع نمایی که تنها دارای نرخ خطر ثابت است متمایز می کند. گوپتا و کندو (۲۰۰۱)، با استفاده از دو مثال عددی نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته می تواند جایگزینی مناسب برای توزیع های گاما و وایبل باشد. علاوه بر این ویژگی های مختلفی از قبیل رفتار دم های

گاما و وایبل از مشهورترین توزیع ها در تحلیل داده های طول عمر هستند. هر دو توزیع وابسته به پارامتر شکل، دارای نرخ خطر افزایشی و یا کاهشی هستند. بنابراین نسبت به توزیع نمایی که دارای نرخ خطر ثابت است، محدوده گسترده تری از داده های طول عمر را تحت پوشش قرار می دهند. اما هر دو توزیع معایبی دارند. در توزیع گاما، اگر پارامتر شکل عددی صحیح نباشد، تابع توزیع یا تابع خطر به راحتی به دست نمی آید و برای به دست آوردن آن نیاز به روش های عددی داریم. در مقابل، توابع توزیع بقا و خطر توزیع وایبل به راحتی به دست می آیند. بنابراین نسبت به توزیع گاما، به خصوص در حضور داده های سانسور شده، در تحلیل داده های طول عمر ترجیح داده می شود. اما توزیع وایبل نیز دارای معایبی است. برای مثال بین و انگلهارد (۱۹۹۱)، به این مطلب اشاره کرده اند که برآوردگرهای ماکسیمم درست نمایی توزیع وایبل ممکن است برای تمامی مقادیر پارامترها به خوبی عمل نکنند. از طرفی وقتی پارامتر شکل بزرگتر از یک باشد، تابع خطر هر دو توزیع گاما و وایبل تابعی افزایشی است. با این وجود در مورد توزیع گاما از صفر به یک عدد متناهی (عکس پارامتر مقیاس) و در توزیع وایبل از صفر به بی نهایت افزایش می یابد که

^۱ کارشناس ارشد آمار، دانشگاه تهران

باشد می‌توان در دو مورد از آن استفاده کرد:

• از آنجا که تولید اعداد تصادفی از توزیع گاما ساده نیست بنابراین می‌توان از مولد اعداد تصادفی GE برای تولید اعداد تصادفی گاما استفاده کرد.

• اگر توزیع گاما را بتوان به خوبی به یک مجموعه از داده‌های چوله مثبت برازش داد، انتظار می‌رود که توزیع نمایی تعمیم یافته را نیز بتوان به خوبی به آن مجموعه از داده‌ها برازش داد. و چون برآورد پارامترهای توزیع GE نسبت به گاما آسان تر است، می‌توانیم از توزیع GE به جای گاما استفاده کنیم.^۹

در این مقاله، ابتدا در بخش دوم، روش تولید نمونه‌های تصادفی گاما را با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته بیان می‌کنیم و سپس در بخش سوم نتایج عددی را ارائه می‌دهیم.

۲ تولید نمونه تصادفی گاما با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته

در این بخش چگونگی تقریب یک توزیع گاما را به وسیله توزیع GE نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۰۲. به ازای $\alpha > 0$ ، قرار دهید

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$$

در آن صورت $\Gamma(\alpha)$ را تابع گاما می‌نامیم. همچنین اگر $\psi(\alpha) = \frac{d \ln(\Gamma(\alpha))}{d\alpha}$ ، آنگاه $\psi(\cdot)$ را تابع دایگاما^{۱۰} یا تابع پسی می‌نامیم.

vspace ۰.۹۵cm

²Greenwood

³Fishman

⁴Ahrens , Dieter

⁵Marsaglia

⁶Cheng

⁷Tadikamalla

⁸Cheng , Feast

¹⁰Digamma

توزیع گاما و توزیع نمایی تعمیم یافته، یکنوایی توابع خطر، رفتار توابع چگالی و رفتار حدی میانگین دو توزیع کاملاً مشابه هستند.

از آنجا که تابع توزیع گاما دارای فرم بسته‌ای نیست، تولید اعداد تصادفی از آن چندان ساده نیست. روش‌های متعددی برای تولید اعداد تصادفی از توزیع گاما وجود دارد. مشهورترین این روش‌ها عبارت است از: گرین وود^۲ (۱۹۷۴)، فیشمن^۳ (۱۹۷۶)، اهرنز و دیتر^۴ (۱۹۷۴)، مارساگلیا^۵ (۱۹۷۷)، آتکینسون (۱۹۷۷)، چنگ^۶ (۱۹۷۷)، تدیکامالا^۷ (۱۹۷۸)، چنگ و فست^۸ (۱۹۸۰) - (۱۹۷۹) و دوروی (۱۹۸۲). این روش‌ها، الگوریتم‌های متفاوتی برای تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما وقتی که پارامتر شکل، (α) ، کمتر از یک و یا بیشتر از یک باشد ارائه می‌دهند و هیچ یک از آن‌ها برای کل مقادیری که پارامتر اختیار می‌کند خوب عمل نمی‌کنند.

نرم افزارهای متعددی برای تولید نمونه‌های تصادفی وجود دارند که به سادگی و در مدت زمانی کوتاه از هر توزیعی از جمله توزیع گاما نمونه تولید می‌کنند. از جمله این نرم افزارها می‌توان به مینیتب، $SPLUSS$ ، $SPSS$ و R اشاره کرد. الگوریتم تولید نمونه تصادفی در اکثر این نرم افزارها براساس روش رد پذیرش و با در نظر گرفتن روش‌های مختلف برای نواحی مختلف از فضای پارامتری است. به عنوان مثال در نرم افزار $SPSS$ ، برای $\alpha < 1$ از روش اهرنز و دیتر (۱۹۷۴) و برای $\alpha > 1$ از روش فیشمن (۱۹۷۶) و در نرم افزار R برای $\alpha < 1$ از روش اهرنز و دیتر (۱۹۷۴) و برای $\alpha > 1$ از روش اهرنز و دیتر (۱۹۸۲) استفاده می‌شود. بنابراین هیچ یک از این نرم افزارها برای نواحی مختلف پارامتری از روش یکسانی استفاده نمی‌کنند.

از آنجا که دو توزیع گاما و GE دارای ویژگی‌های مشترک زیادی هستند، انتظار می‌رود که برای یک توزیع گامای معین و حداقل برای مقادیر خاصی از پارامتر شکل، یک توزیع GE وجود داشته باشد که به توزیع گاما نزدیک باشد. اگر چنین توزیع نمایی تعمیم یافته‌ای وجود داشته

^۹مطالب این قسمت از مراجع [۱۸]، [۱۲]، [۱۳] گرفته شده است.

۳. برآوردگرهای پارامتری به روش L - گشتاوری، در برخی مواقع و برای اندازه نمونه نسبتاً کم، نسبت به برآوردگرهای ML دقیق‌تر هستند.

اهمیت L - گشتاورها نسبت به روش MM در قضیه زیر معلوم می‌شود.

قضیه ۴.۲. (هاس کینگ، ۱۹۹۰)

الف) L - گشتاورهای متغیر تصادفی X وجود دارند، اگر و فقط اگر میانگین X متناهی باشد.

ب) هر توزیع با میانگین متناهی، توسط L - گشتاورهای مشخص می‌شود.

بر اساس قضیه ۲، حتی اگر برآورد پارامترها به روش گشتاوری وجود نداشته باشند، برآوردگرهای L - گشتاوری توزیع وجود دارند. علاوه بر این، L - گشتاورها یکتا هستند.

در این بخش، ابتدا L - گشتاورهای یک توزیع را معرفی و سپس با استفاده از دو مثال L - گشتاورهای توزیع گاما و نمایی تعمیم یافته را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی حقیقی با تابع توزیع $F_X(x)$ و تابع چگالی^{۱۳} $x(F)$ باشد. اگر برآوردگر L - گشتاوری F را با λ_r نشان دهیم، آنگاه برای هر $r = 1, 2, \dots$

$$\lambda_r = \int_0^1 x(F) P_{r-1}^*(F) dF$$

که در آن

$$P_r^*(F) = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* F^k$$

$$p_{r,k}^* = (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k}$$

قضیه ۲.۲. اگر X دارای توزیع $GE(\alpha, \sigma)$ باشد، آنگاه با تعریف $\lambda = \frac{1}{\sigma}$

$$E_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda} (\psi(\alpha+1) - \psi(1))$$

$$Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda^2} (\psi'(1) - \psi'(\alpha+1))$$

تعریف ۳.۲. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x)$$

که در آن $\alpha, \lambda > 0$ ، به ترتیب پارامترهای مقیاس و مکان هستند، گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ یا $X \sim GA(\alpha, \lambda)$ نمایش می‌دهیم. اگر $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ آنگاه

$$E_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

۱.۲ برآوردگرهای L - گشتاوری

اگرچه روش‌های گشتاوری یکی از قدیمی‌ترین روش‌های برآوردیابی است، اما تشخیص شکل توزیع با استفاده از گشتاورهای مرتبه سوم و بالاتر به راحتی امکان پذیر نیست. مقادیر عددی گشتاورهای نمونه، به خصوص برای اندازه نمونه کم، نسبت به گشتاورهای جامعه بسیار متفاوت است. پارامترهای برآورد شده به روش گشتاوری (MM) نسبت به روش‌های دیگر برآوردیابی از قبیل ML از دقت کمتری برخوردار است.

هاس کینگ^{۱۱} در سال ۱۹۹۰ روشی را با عنوان روش L - گشتاوری معرفی کرد. این روش مشابه روش MM است. اما پارامترهای توزیع بر اساس ترکیب خطی از آماره‌های ترتیبی برآورد می‌شوند. از جمله مزایای روش L - گشتاوری نسبت به روش MM عبارت است از:

۱. برآوردگرهای L - گشتاوری نسبت به روش‌های MM استوارتر^{۱۲} هستند.

۲. L - گشتاورها کمتر در معرض اریبی هستند و توزیع مجانبی آن‌ها دقیق‌تر است.

^{۱۱}Hosking

^{۱۲}Robust

^{۱۳}Quantile Function

^{۱۴}برگرفته از مرجع [۱۳]

چند L -گشتاور اولیه توزیع F عبارتند از^{۱۴}

$$\lambda_1 = \int_0^1 x(F) dF \quad (۲)$$

$$\lambda_2 = \int_0^1 x(F)(2F - 1) dF$$

$$\lambda_3 = \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) dF$$

$$\lambda_4 = \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF$$

مثال ۶.۲. فرض کنید X دارای توزیع $GA(\alpha, \lambda)$ باشد، آنگاه با

استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)} \right]$$

مثال ۷.۲. فرض کنید X دارای توزیع $GE(\alpha, \lambda)$ باشد، آنگاه با

استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} (\psi(\alpha + 1) - \psi(1))$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda} (\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1))$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda} [2\psi(3\alpha + 1) - 3\psi(2\alpha + 1) + \psi(\alpha + 1)]$$

۲.۲ تقریب توزیع گاما با استفاده از توزیع نمایی

تعمیم یافته

در این بخش، چگونگی تقریب توزیع گاما را با استفاده از توزیع نمایی تعمیم یافته ارائه می‌دهیم و دقت تقریب مورد نظر را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از مولد GE ، نمونه‌های تصادفی از توزیع گاما تولید می‌کنیم.

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع GE باشد، آنگاه α^* و λ^* را باید طوری پیدا کنیم که توزیع‌های $GA(\alpha, \lambda)$ و $GE(\alpha^*, \lambda^*)$ به هم نزدیک باشند. از آنجا که هر دو توزیع GE دارای دو پارامتر هستند، بنابراین انتظار داریم که حداقل میانگین و واریانس آن‌ها به هم نزدیک باشند. این کار به دو روش انجام می‌شود:

• برابر قرار دادن میانگین و واریانس دو توزیع:

به ازای یک α و λ معین از توزیع گاما، α^* و λ^* را طوری تعیین

می‌کنیم که:

$$\frac{1}{\lambda^*} (\psi(\alpha^* + 1) - \psi(1)) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\lambda^{*2}} (\psi'(1) - \psi'(\alpha^* + 1)) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

از رابطه (۳) داریم:

$$\alpha = \frac{(\psi(\alpha^* + 1) - \psi(1))^2}{(\psi'(1) - \psi'(\alpha^* + 1))} \quad (۴)$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\alpha} (\psi(\alpha^* + 1) - \psi(1))$$

جفت α^* و λ^* که از (۴) به دست می‌آید را با $(\alpha_1^*, \lambda_1^*)$ نشان

می‌دهیم.

• برابر قرار دادن L -گشتاورهای دو توزیع:

به ازای α و λ معین، α^* و λ^* را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\frac{1}{\lambda^*} (\psi(\alpha^* + 1) - \psi(1)) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (۵)$$

$$\frac{1}{\lambda^{*2}} (\psi(2\alpha^* + 1) - \psi(\alpha^* + 1)) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1/2)} \right)$$

جفت α^* و λ^* که از (۵) به دست می‌آید را با $(\alpha_2^*, \lambda_2^*)$ نشان

می‌دهیم.

گوپتا و کندو (۲۰۰۱)، نشان دادند که با توجه به تقریب‌های فوق، اختلاف بین گاما و توزیع نمایی تعمیم یافته زمانی مینیمم می‌شود که $\alpha = 1$ باشد. در این حالت هر دو توزیع برابر توزیع نمایی می‌شوند. هر چه پارامتر α از یک دور شود، فاصله بین دو توزیع افزایش می‌یابد. به ازای $0 < \alpha < 2/5$ می‌توان توزیع GE را به گونه‌ای یافت که توزیع گاما را به خوبی تقریب بزند. همچنین $GE(\alpha_2^*, \lambda_2^*)$ نسبت به $GE(\alpha_1^*, \lambda_1^*)$ به توزیع گاما نزدیک‌تر است.

۳ نتایج عددی

در این بخش ابتدا تولید نمونه تصادفی از توزیع $GA(\alpha, 1)$ را شرح می‌دهیم و سپس نتایج عددی برای آزمون نیکویی برازش ارائه می‌کنیم.

اگر $U_1, U_2, \dots, U_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0, 1)$ باشد، آنگاه $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع

$$GE(\alpha^*, \lambda^*) \text{ است که در آن به ازای } i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_i = -\frac{1}{\lambda^*} \ln(1 - U_i^{1/\alpha^*})$$

جدول ۱. مقادیر $K - S$ و P - مقدار برای آزمون‌های ۱، ۲ و ۳
به ازای $\alpha = 0/4$

آزمون ۳	آزمون ۲	آزمون ۱	آماره‌ها	n
۶۸/۰	۰/۶۷	۶۷/۰	A.P	۱۵
۱۹۵/۰	۱۹۶/۰	۱۹۸/۰	S.D.P	
۷۰۲/۰	۷۰۴/۰	۱۷۰۸/۰	A.K - S	
۱۰۴/۰	۱۰۵/۰	۱۰۶/۰	S.D.K - S	
۶۶/۰	۶۵۸/۰	۶۴۷/۰	A.P	۲۵
۱۶۶/۰	۱۶۶/۰	۱۷۰/۰	S.D.P	
۶۹۵/۰	۶۹۷/۰	۷۰۳/۰	A.K - S	
۰۸۶/۰	۰۸۶/۰	۰۸۸/۰	S.D.K - S	
۶۴/۰	۰/۶۳۸	۶۳۳/۰	A.P	۴۰
۱۴۴/۰	۱۴۵/۰	۱۴۲/۰	S.D.P	
۶۹۵/۰	۰۶۹۷/۰	۷۰۰/۰	A.K - S	
۰۷۴/۰	۰۷۴/۰	۰۷۳/۰	S.D.K - S	
۶۳۷/۰	۶۳۲/۰	۶۲۸/۰	A.P	۵۰
۱۳۰/۰	۱۲۹/۰	۱۲۵/۰	S.D.P	
۶۹۴/۰	۷۰/۰	۶۹۹/۰	A.K - S	
۰۶۶/۰	۰۶۶/۰	۰۶۴/۰	S.D.K - S	

بنابراین برای مقادیر خاصی از α ($0 < \alpha < 2/5$) تولید یک نمونه تصادفی از $GA(\alpha, 1)$ همانند تولید یک نمونه تصادفی از $GE(\alpha^*, \lambda^*)$ و یا $GE(\alpha^*, \lambda^*)$ است. از آنجا که اگر $X \sim GA(\alpha, 1)$ آنگاه $\frac{X}{\lambda} \sim GA(\alpha, \lambda)$ ، بنابر این تولید نمونه تصادفی از توزیع $GA(\alpha, \lambda)$ به راحتی امکان پذیر است. برای بررسی ادعا، آماره کولموگروف - اسمیرونوف را بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع تحت فرض $X_1, X_2, \dots, X_n \sim GA(\alpha, 1)$ ، برای سه آزمون زیر به دست می‌آوریم:

• آزمون ۱: یک نمونه تصادفی n تایی از $GA(\alpha, 1)$ تولید کرده و فرض H_0 را آزمون می‌کنیم.

• آزمون ۲: یک نمونه تصادفی n تایی از $GE(\alpha^*, \lambda^*)$ تولید کرده و فرض H_0 را آزمون می‌کنیم.

جدول ۲. مقادیر $K - S$ و P - مقدار برای آزمون‌های ۱، ۲ و ۳
به ازای $\alpha = 1/2$

آزمون ۳	آزمون ۲	آزمون ۱	آماره‌ها	n
۷۹/۰	۰/۷۹	۸۰۲/۰	A.P	۱۵
۱۷۵/۰	۱۷۵/۰	۱۷۰/۰	S.D.P	
۶۲/۰	۶۴/۰	۶۳۸/۰	A.K - S	
۰۹۳/۰	۰۹۳/۰	۰۹۰/۰	S.D.K - S	
۷۹/۰	۷۹/۰	۷۸۴/۰	A.P	۲۵
۱۵۵/۰	۱۵۵/۰	۱۵۵/۰	S.D.P	
۶۳/۰	۶۲۸/۰	۶۳۲/۰	A.K - S	
۰۸۱/۰	۰۸۰/۰	۰۸۰/۰	S.D.K - S	
۷۸/۰	۰/۷۸۵	۷۸۰/۰	A.P	۴۰
۱۴۰/۰	۱۳۹/۰	۱۳۷/۰	S.D.P	
۶۲/۰	۰۶۲۱/۰	۶۲۴/۰	A.K - S	
۰۷۲/۰	۰۷۲/۰	۰۷۱/۰	S.D.K - S	
۷۸۴/۰	۷۸۴/۰	۷۷۳/۰	A.P	۵۰
۱۲۵/۰	۱۲۵/۰	۱۲۸/۰	S.D.P	
۶۲۰/۰	۶۱۹/۰	۶۲۵/۰	A.K - S	
۰۶۴/۰	۰۶۴/۰	۰۶۵/۰	S.D.K - S	

• آزمون ۳: یک نمونه تصادفی n تایی از $GE(\alpha^*, \lambda^*)$ تولید کرده و فرض H_0 را آزمون می‌کنیم.

در جدول‌های ۱، ۲ و ۳ بر اساس ۱۰۰۰ بار تکرار و به ازای مقادیر $\alpha = 0/4, 1/2, 2/5$ و $n = 15, 25, 40, 50$ ، میانگین و انحراف استاندارد آماره کولموگروف - اسمیرونوف ($S.D.K - S, A.K - s$) مقدار P - مقدار ($S.D.P, A.P$) آورده شده و میانگین و انحراف استاندارد P - مقدار ($S.D.P, A.P$) آورده شده است.

با توجه به جدول مربوطه، مشاهده می‌شود که در همه موارد، نتایج کاملاً مشابه هم هستند. همچنین مقادیر بالای P - مقدار نشان می‌دهد که نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم. از نتایج آزمون‌های ۱-۳ واضح است که اگر یک نمونه تصادفی از توزیع GE تولید کنیم، از دید آماری نمی‌توانیم فرض H_0 را رد کنیم. علاوه بر این نتایج آزمون ۱ و آزمون‌های ۲ و ۳ بیان می‌کند که به ازای $0 < \alpha < 2/5$ تولید نمونه تصادفی از توزیع GE ، همانند تولید نمونه تصادفی از توزیع گاما است.^{۱۵}

۴ بحث و نتیجه گیری

جدول ۳. مقادیر $K - S$ و P - مقدار برای آزمون‌های ۱، ۲ و ۳به ازای $\alpha = 2/5$

n	آماره‌ها	آزمون ۱	آزمون ۲	آزمون ۳
۱۵	$A.P$	۸۲۸/۰	۰/۸۲	۸۲۲/۰
	$S.D.P$	۱۶۵/۰	۱۶۰/۰	۱۶۳/۰
	$A.K - S$	۶۲۴/۰	۶۲۷/۰	۶۲۸/۰
	$S.D.K - S$	۰۸۸/۰	۰۸۵/۰	۰۸۶/۰
۲۵	$A.P$	۸۲۸/۰	۸۲۸/۰	۸۲۷/۰
	$S.D.P$	۱۴۲/۰	۱۴۳/۰	۱۴۳/۰
	$A.K - S$	۶۰۹/۰	۶۰۹/۰	۶۰۹/۰
	$S.D.K - S$	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰
۴۰	$A.P$	۸۲۸/۰	۰/۸۲۸	۸۳۰/۰
	$S.D.P$	۱۴۲/۰	۱۳۱/۰	۱۲۸/۰
	$A.K - S$	۶۰۹/۰	۶۰۹/۰	۵۹۸/۰
	$S.D.K - S$	۰۷۴/۰	۰۷۴/۰	۰۶۷/۰
۵۰	$A.P$	۸۳۸/۰	۸۳۴/۰	۸۳۲/۰
	$S.D.P$	۱۱۶/۰	۱۱۶/۰	۱۱۷/۰
	$A.K - S$	۵۹۱/۰	۵۹۴/۰	۵۹۴/۰
	$S.D.K - S$	۰۶۰/۰	۰۶۰/۰	۰۶۰/۰

مراجع

- [1] Ahrens, J.H. , Dieter, U. (1974). Computer method for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distribution, *Computing*, **12**, 223-246.
- [2] Ahrens, J.H , Dieter, U. (1982). Generating gamma variates by a modified rejection technique, *Communications of the ACM*, **25**, 4754
- [3] Atkinson, A.C. (1977). An easily programmed algorithm for generating gamma random variables, *Applied Statistics*, **26**, 232-234.
- [4] Bain, L.J. , Engelhardt, M. (1991). *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*, 2nd. Edition, Marcel and Dekker, New York.
- [5] Cheng, R. C.H. (1977) The generation of gamma variables with non- integral shape parameter, *Applied Statistics*, **26**, 71-75.
- [6] Cheng, R. C.H., Feast, G.M. (1979). Some simple gamma variate generators, *Applied Statistics*, **28**, 290-295.
- [7] Cheng, R. C.H., Feast, G.M. (1980). Gamma variate generators with increased shape parameter range, *Communications of the ACM*, **23**, 389-394.

- [8] Devroye, L. (1982) A simple algorithm for generating random variates with a log-concave density, *Computing*, **33**, 247-257.
- [9] Fishman, G.S. (1976). Sampling from the gamma distribution on computer, *Communications of the ACM*, **19**, 407-409.
- [10] Greenwood, A.J. (1974). A fast generator for gamma distributed random variables, *COMPSTAT*, 19-27.
- [11] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999). Generalized Exponential Distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41(2)**, 173-188.
- [12] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential family: an alternative to gamma and Weibull, *Biometrical Journal*, **43**, 117-130.
- [13] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2003). Closeness of gamma and generalized exponential distributions, *communications in statistics-theory and methods*, **32**, 4, 705-721.
- [14] Hosking, J. R. M. (1990). L-Moments: Analysis and estimation of distribution using linear combinations of order statistics, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B*, **52(1)**, 105-124
- [15] Marsaglia, G. (1977). The squeeze method for generating gamma variates, *Computers and Mathematics with Applications*, **3**, 321-325.
- [16] Mudholkar, G.S. Srivastava, D.K., Freimes, M.(1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the Bus-Motor-failur data *Technometrics* , **37**, 436-445.
- [17] Tadikamalla, P.R. (1978). Computer generation of gamma random variables ,*Communications of the ACM*, **21**, 419-422.