پیش‌گویی مقادیر رکوردهای آینده در توزیع نمایی

ابراهیم امینی سرشت [۱] ، سعید بگرضایی [۲]

چکیده:

در این مقاله می‌خواهیم بر اساس مشاهدات اولین n رکورد بالایی از توزیع نمایی، برآورد حداکثر درستنمایی پارامتر این توزیع را به دست آوریم. سپس روی مسئله پیش‌گویی نقطه‌ای مقادیر رکوردهای بالایی آینده در توزیع نمایی بر اساس نگرش‌های کلاسیک و بیز و تحت توابع زیان درجه دوم و لاینکس متمرکز می‌شویم. در پایان نیز از طریق شبیه‌سازی مونت کارلو به مقایسه عددی پیشگوهای نقطه‌ای به دست آمده خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: بیز، پیش‌گویی، توزیع پیشین، توزیع گامای معکوس، توزیع نمایی، مقادیر رکورد.

۱ مقدمه

فرض کنید $\{X_i, i \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ و تابع چگالی $f(x;\theta)$ که در آن θ یک پارامتر (ممکن است یک بردار از پارامترها باشد) است، باشد. مشاهده X_j یک مقدار رکورد بالایی است اگر مقدارش از همه مشاهدات قبلی بزرگتر باشد. بنابراین X_j یک رکورد بالایی است اگر $X_j > X_i$ برای هر $j > i$. همچنین دنباله زمان‌های رکوردهای بالایی $\{U(n), n \geq 1\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(1) = 1$$

و برای $n \geq 2$:

$$U(n) = min\{j : j > U(n-1),\ \ X_j > X_{U(n-1)}\}.$$

دنباله مقادیر رکوردهای بالایی به صورت $X_{U(n)},\ \ n = 1, 2, \ldots$ تعریف می‌شود.

فرض کنید مقادیر اولین n رکورد بالایی را به صورت $X_{U(1)} = x_1$، $X_{U(2)} = x_2$،...،$X_{U(n)} = x_n$ از تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ و تابع چگالی $f(x;\theta)$ مشاهده کرده‌ایم. در این صورت چگالی توأم مقادیر اولین n-رکورد بالایی (آرنولد و همکاران ۱۹۹۸) به صورت:

$$f(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n-1} h(x_i;\theta) f(x_n;\theta) \qquad (۱)$$
$$-\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \infty$$

محاسبه می‌گردد که در آن $h(x_i;\theta) = \frac{f(x_i;\theta)}{1-F(x_i;\theta)}$ و $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $\theta \in \Theta$ ممکن است یک بردار باشد که در آن Θ فضای پارامتر است. برای مطالعه بیشتر در مورد آماره‌های رکوردی می‌توانید به احسن‌اللّه [۳](۱۹۹۵) یا آرنولد [٤] ، بالاکریشنان [٥] و ناگاراجا [٦] (۱۹۹۸) مراجعه کنید.

بسیاری از محققین به مطالعه فاصله پیش‌گویی برای مشاهدات آینده از توزیع نمایی پرداخته‌اند. احسن‌اللّه (۱۹۸۰) پیش‌گویی مقادیر رکوردهای آینده از این توزیع را مورد مطالعه قرار داد. دانسمور [۷] (۱۹۸۳) مسئله فاصله پیش‌گویی بیزی برای مقادیر رکوردهای آینده از توزیع نمایی را در نظر گرفت. باساک [۸] و بالاکریشنان(۲۰۰۳) پیشگوهای میانه شرطی (CMP)، میانه نااریبی (MUP) و حداکثر درستنمایی (MLP) را در توزیع

[۱] دانشجوی دکتری-گروه آمار دانشگاه رازی

[۲] کارشناس ارشد-گروه آمار دانشگاه رازی

[۳] Ahsanullah

[٤] Arnold

[٥] Balakrishnan

[٦] Nagaraja

[۷] Dunsmore

[۸] Basak

نمایی به دست آوردند. از مطالعات انجام شده در سال‌های اخیر می‌توان به جاهین [۹] (۲۰۰٤) و احمدی [۱۰] و همکاران (۲۰۰۷) اشاره کرد.

تابع زیان $L(\theta,\delta)$ بیانگر مقدار زیانی است که آماردان متحمل می‌شود وقتی که θ وضعیت درست طبیعت بوده و او عمل δ را اتخاذ می‌کند. رایج‌ترین تابع زیان در مسائل برآورد و پیش‌بینی $L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^2$ که به تابع زیان درجه دوم معروف است. این تابع زیان متقارن است و بیش برآوردی و کم برآوردی را به طور یکسان جریمه می‌کند. با افزایش اندازه بیش برآوردی و کم برآوردی مقدار این تابع به سرعت بزرگ می‌شود. تابع زیان دیگری که در این مقاله با آن سر و کار داریم به فرم:

$$L(\theta,\delta)=b\exp\{c(\delta-\theta)\}-c(\delta-\theta)-1$$

یا

$$L(\theta,\delta)=b\exp\{c\Delta\}-c\Delta-1$$

است که به تابع زیان لاینکس یا خطی نمایی شهرت دارد که در آن $\Delta=\delta-\theta$.

این تابع نسبت به δ اکیداً محدب است. در این تابع $b>0$ پارامتر مقیاس و $c\neq 0$ پارامتر شکل است. بزرگی c بیانگر درجه تقارن تابع مذکور است. در حالتی که $c<0$ باشد، $L(\Delta)$ وقتی که $\Delta<0$ است به صورت نمایی و وقتی که $\Delta>0$ است به صورت خطی افزایش می‌یابد. در حالتی که $c>0$ باشد، $L(\Delta)$ وقتی که $\Delta<0$ است به صورت خطی و وقتی که $\Delta>0$ است به صورت نمایی افزایش می‌یابد. زمانی که c نزدیک صفر باشد این تابع زیان تقریباً با تابع زیان درجه دو برابر است. در این مقاله حالت $b=1$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$L(\theta,\delta)=exp\{c(\delta-\theta)\}-c(\delta-\theta)-1. \qquad (۲)$$

تعریف ۱.۱. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی یک پارامتری با پارامتر مقیاس θ است و آنرا با $X\sim Exp(\theta)$ نمایش می‌دهیم، هرگاه تابع چگالی آن به صورت:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},\qquad x>0,\quad \theta>0 \qquad (۳)$$

باشد. اگر $X\sim Exp(\theta)$ باشد آنگاه تابع توزیع تجمعی آن به فرم زیر است:

$$F(x;\theta)=1-\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},\quad x>0,\quad \theta>0. \qquad (٤)$$

ادامه مقاله به این صورت است که: در بخش ۲، برآوردگر حداکثر درستنمایی پارامتر مجهول θ در ۳ را به دست می‌آوریم. در بخش ۳، مسئله پیش‌گویی نقطه‌ایی مقادیر رکوردهای بالایی آینده از توزیع نمایی با چگالی داده شده در ۳ را بر اساس نگرش‌های کلاسیک و بیز در نظر می‌گیریم. در بخش ٤ به مقایسه عددی پیشگوهای نقطه‌ای به دست آمده در بخش ۳ می‌پردازیم.

۲ برآورد

در این بخش برآورد پارامتر مجهول θ در توزیع نمایی بر اساس مقادیر مشاهده شده از اولین n رکورد بالایی از این توزیع را در نظر می‌گیریم. فرض کنید اولین n رکورد بالایی را به صورت $X_{U(1)}=x_1$، $X_{U(2)}=x_2$،...،$X_{U(n)}=x_n$ مشاهده کرده‌ایم. از (1)، (3) و (4)، تابع چگالی توأم $X_{U(1)}=x_1$، $X_{U(2)}=x_2$،...، $X_{U(n)}$ (مرجع [4] را ببینید) به‌صورت:

$$f(x;\theta)=\theta^{-n}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},\quad x>0,\quad \theta>0 \qquad (۵)$$

خواهد بود که در آن $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ است. برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) برای θ به صورت زیر است:

$$\hat{\theta}=\frac{X_{U(n)}}{n}. \qquad (٦)$$

از آن‌جا که چگالی حاشیه‌ای $X_{U(n)}$ (مرجع [4] را ببینید) به صورت:

$$\begin{aligned} f_n(x;\theta) &= f(x;\theta)\frac{[-\ln(1-F(x;\theta))]^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{\theta^n\Gamma(n)}x^{n-1}\exp\{-\frac{x}{\theta}\},\ x>0 \qquad (۷) \end{aligned}$$

است، یعنی $X_{U(n)}\sim gamma(n,\theta)$، به راحتی می توان ثابت کرد که:

$$E(\hat{\theta})=\theta,$$

[۹] JaheenLTR

[۱۰] Ahmadi

به این ترتیب $\hat{\theta}$ یک برآوردگر ناریب θ است. از (۵) می‌توان نشان داد که $X_{U(n)}$ آماره بسنده کامل است و از این رو $\hat{\theta}$ برآوردگر ناریب به طور یکنواخت دارای کمترین واریانس $(UMVUE)$ برای θ است.

۳ پیش‌گویی مقادیر رکوردهای بالایی

پیش‌گویی نقطه‌ای مقادیر رکوردهای بالایی آینده با استفاده از مقادیر رکوردهای بالایی گذشته مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. برای جزئیات بیشتر می‌توانید مراجع [2]، [7]، [5] و [10] را ببینید.

۱.۳ پیش‌گویی کلاسیک

۱.۱.۳ پیش‌گویی حداکثر درستنمایی

فرض کنید که مقادیر اولین n رکورد بالایی را از تابع چگالی $f(x;\theta)$ به صورت $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ مشاهده کرده‌ایم. می‌خواهیم $Y = X_{U(s)}$، $s > n$ را پیش‌گویی کنیم.

تابع درستنمایی پیش‌گوی Y و θ (فرض کنید θ مجهول است) به وسیله باساک و بالاکریشنان (۲۰۰۳) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(y,\theta;x) = f(y;\theta)\,\frac{[H(y;\theta)-H(x_n;\theta)]^{s-n-1}}{\Gamma(s-n)} \times \prod_{j=1}^{n} h(x_j;\theta), \quad x_n < y$$

که $H(t;\theta) = -\ln(1-F(t;\theta))$ است. لگاریتم تابع درستنمایی پیشگوی Y و θ به شکل زیر:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{j=1}^{n} \ln h(x_j;\theta) - \ln\Gamma(s-n) + \ln f(y;\theta) \\ &+ (s-n-1)\ln[H(y;\theta)-H(x_n;\theta)] \quad , x_n < y \end{aligned} \qquad (۸)$$

است. با استفاده از ۳، ٤ و ۸ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} l &= -s\ln\theta - \ln\Gamma(s-n) \\ &+ (s-n-1)\ln(y-x_n) - \frac{y}{\theta}. \end{aligned} \qquad (۹)$$

بنابراین معادلات لگاریتم درستنمایی به صورت:

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\theta(s-n-1)-(y-x_n)}{\theta(y-x_n)} = 0$$

و

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{y - s\theta}{\theta^2} = 0$$

خواهد بود و از این رو برآوردگر حداکثر درستنمایی پیشگوی θ $(PMLE)$ و پیشگوی حداکثر درستنمایی Y به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{PMLE} &= \frac{1}{n+1} X_{U(n)}, \\ \hat{\theta}_{MLP} &= \frac{s}{n+1} X_{U(n)}. \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

۲.۱.۳ پیش‌گویی میانه شرطی

چگالی شرطی Y به شرط $X_{U(1)}$، $X_{U(2)}$،...، $X_{U(n)}$ (بنابر خاصیت مارکف) به صورت:

$$f(y \mid x;\theta) = \frac{y-x_n}{\theta^{s-n}\Gamma(s-n)} \exp\left\{\frac{y-x_n}{\theta}\right\}, x_n < y \qquad (۱۱)$$

است. میانه Y به شرط $X_{U(n)}$، پیشگوی میانه شرطی (CMP) نامیده می‌شود (مرجع [11] را ببینید).

حالت اول. θ معلوم. در این حالت پیشگوی میانه شرطی به صورت $\hat{Y}_{CMP} = K(X_{U(n)},\theta)$ خواهد بود که در آن $P\big(K(X_{U(n)},\theta) \mid x\big) = \frac{1}{2}$ است. با توجه به عبارت (۱۱):

$$\int_{x_n}^{K(x_n,\theta)} \frac{(y-x_n)^{s-n-1}}{\theta^{s-n}\Gamma(s-n)} \exp\left\{\frac{-(y-x_n)}{\theta}\right\} dy = \frac{1}{2}$$

خواهد بود. با تغییر متغیر $y - x_n = t$ خواهیم داشت :

$$\int_{0}^{K(x_n,\theta)-x_n} \frac{t^{s-n-1}}{\theta^{s-n}\Gamma(s-n)} \exp\left\{\frac{-t}{\theta}\right\} dt = \frac{1}{2}.$$

بنابراین:

$$\hat{Y}_{CMP} = X_{U(n)} + \theta Med[Z(s-n)]$$

که در آن $Z(s-n) \sim gamma(s-n,1)$ و $Med[V]$، میانه‌ی متغیر تصادفی V است. چون $Med[Z(s-n)] = \frac{1}{2}\chi^2_{2(s-n),0.5}$، پیش‌گوی حداکثر درستنمایی Y به صورت:

$$\hat{Y}_{CMP} = X_{U(n)} + \frac{\theta}{2}\chi^2_{2(s-n),0.5}$$

خواهد بود که در آن $\chi^2_{r,p}$، $100p$–امین صدک از توزیع خی دو با r درجه آزادی است.

حالت دوم. θ مجهول. هنگامی که θ مجهول باشد، θ با $\hat{\theta}$ در (۳)جایگزین می‌گردد و پیش‌گوی حداکثر درستنمایی Y به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$$\hat{Y}_{CMP} = X_{U(n)}\left(1 + \frac{1}{2n}\chi^2_{2(s-n),0.5}\right). \qquad (۱۲)$$

۲.۳ پیش‌گویی بیزی

در این بخش مسئله پیش‌گویی نقطه‌ای مقادیر رکوردهای بالایی آینده را بر اساس نگرش بیز در نظر می‌گیریم. با فرض آن که θ مجهول باشد، توزیع پیشین برای θ را گامای معکوس با پارامترهای $\alpha > 2$ و $\beta > 0$ در نظر می‌گیریم ($\theta \sim IG(\alpha, \beta)$) بنابراین داریم:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^{\alpha} \exp\left\{\frac{-\beta}{\theta}\right\}}{\Gamma(\alpha)\, \theta^{\alpha+1}}, \qquad \theta > 0 \qquad (۱۳)$$

در این صورت تابع چگالی پیشین θ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\pi(\theta \mid x) \propto f(x \mid \theta)\pi(\theta). \qquad (۱٤)$$

که در آن $f(x \mid \theta)$ تابع چگالی توام $X_{U(1)}, X_{U(2)}, ..., X_{U(n)}$ در x و در (۵) و $\pi(\theta)$ تابع چگالی پیشین داده شده در (۱۳) است. با جایگذاری (۵) و (۱۳) در (۱٤) و پس از نرمال‌سازی تابع چگالی پیشین θ به صورت

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{(\beta + x_n)^{n+\alpha} \exp\left\{\frac{-(\beta+x_n)}{\theta}\right\}}{\Gamma(n+\alpha)\, \theta^{n+\alpha+1}}, \theta > 0 \qquad (۱۵)$$

به دست خواهد آمد.

فرض کنید مقادیر اولین n رکورد بالایی را به صورت $Exp(\theta)$ از $X_{U(1)} = x_1, X_{U(2)} = x_2, ..., X_{U(n)} = x_n$ مشاهده کرده‌ایم. می‌خواهیم بر اساس چنین نمونه‌ای مقدار $Y = X_{U(s)},\ s > n$ را پیش‌بینی کنیم. تابع چگالی پیش‌گوی بیز Y به شرط x (مرجع [8] را ببینید) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h^{\star}(y \mid x) = \int_{\Theta} f_{Y|x}(y \mid x)\pi(\theta \mid x)d\theta.$$

با ترکیب چگالی پسین داده شده در (15) و چگالی شرطی داده شده در (11) و انتگرال‌گیری نسبت به θ، چگالی پیش‌گوی بیز Y به شرط n رکورد بالایی گذشته به شکل زیر:

$$h^{\star}(y \mid x) = \frac{(y - x_n)^{s-n-1}(\beta + x_n)^{n+\alpha}}{\beta(n+\alpha, s-n)(y+\beta)^{s+\alpha}} \quad , y > x_n \qquad (۱٦)$$

به دست می‌آید که در آن $\beta(.,.)$ تابع بتای کامل است. با استفاده از (۱٦) پیش‌گوی بیز نقطه‌ای Y را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E_{h^{\star}}(Y \mid x) &= \int_{x_n}^{\infty} y h^{\star}(y \mid x)\, dy \\ &= \frac{\beta(n+\alpha-1, s-n+1)}{(x_n+\beta)^{n+\alpha-1}} \\ &+ \frac{\beta(n+\alpha, s-n)}{(x_n+\beta)^{n+\alpha}} x_n. \end{aligned}$$

بنابراین پیش‌گوی بیز نقطه‌ای تحت تابع زیان درجه دوم برابر مقدار زیر است:

$$\hat{Y}_{BS} = \frac{s+\alpha-1}{n+\alpha-1} X_{U(n)} + \frac{\beta(s-n)}{n+\alpha-1}. \qquad (۱۷)$$

همچنین پیش‌گوی بیز نقطه‌ای تحت تابع زیان لاینکس (تابع زیان (۲)) به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{Y}_{BL} = \frac{-1}{c} \ln\left(E_{h^{\star}}(\exp\{-cY\})\right). \qquad (۱۸)$$

۱.۲.۳ پیش‌گوی بیز تجربی

فرض کنید α و β یعنی پارامترهای توزیع پیشین θ هر دو مجهول باشند. فرض کنید در شرایطی که مشاهدات $X_{U(1)}, X_{U(2)}, ..., X_{U(n)}$ را در اختیار داریم از قبل همه مشاهدات m نمونه رکوردی و هر یک به حجم n را به صورت:

$$X_{j,U(1)}, X_{j,U(2)}, ..., X_{j,U(n)} \qquad , j = 1, 2, ..., m$$

در اختیار داشته باشیم. فرض می‌شود نمونه j–ام از توزیع $Exp(\theta_j)$ به دست آمده باشد. با توجه به (٦) برآوردگر حداکثر درستنمایی θ_j به صورت $Z_j = \frac{X_{j,U(n)}}{n}$ است.
چگالی شرطی Z_j به شرط θ_j به صورت :

$$f(z_j \mid \theta_j) = \frac{n^n}{\Gamma(n)\theta_j^n} z_j^{n-1} \exp\left\{\frac{-nz_j}{\theta_j}\right\} \quad , z_j > 0 \quad (۱۹)$$

و توزیع پیشین برای θ_j به شکل زیر:

$$\pi(\theta_j) = \frac{\beta^{\alpha} \exp\left\{\frac{-\beta}{\theta_j}\right\}}{\Gamma(\alpha)\theta_j^{\alpha+1}} \qquad , \alpha > 2,\ \theta_j > 0 \qquad (۲۰)$$

[۱۱] Schafer

[۱۲] Feduccia

است. پیرو چیفر[۱۱] و فیداکشا[۱۲] و با استفاده از (۱۹) و (۲۰)، چگالی حاشیه‌ای Z_j برای $j = 1, 2, ..., m$ برابر مقدار زیر است :

$$\begin{aligned} f(z_j) &= \int_0^\infty f(z_j \mid \theta_j)\pi(\theta_j)\, d\theta_j \\ &= \frac{n^n \beta^\alpha z_j^{n-1}}{\beta(\alpha, n)(nz_j + \beta)^{n+\alpha}} \quad , z_j > 0. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با استفاده از (۲۱) برآورد گشتاوری α و β را به صورت:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2nS_2 - (n+1)S_1^2}{nS_2 - (n+1)S_1^2}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\alpha} - 1)S_1 \tag{۲۲}$$

به دست می‌آوریم که در آن $S_1 = \sum_{i=1}^m \frac{Z_i}{m}$ و $S_2 = \sum_{i=1}^m \frac{Z_i^2}{m}$ است. با جایگذاری $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ در (۱۷) و (۱۸) به ترتیب پیش‌گوهای بیز تجربی تحت تابع زیان درجه دوم خطا و لاینکس (تابع زیان (۲)) به دست خواهند آمد.

۴ محاسبات عددی

پیش‌گوهای حداکثر درستنمایی، میانه شرطی، بیز و بیز تجربی(تحت توابع زیان درجه دوم و لاینکس) برای n و s داده شده، بر اساس شبیه‌سازی مونت کارلو طی مراحل زیر با هم مقایسه می‌شوند:

۱) به ازای n در نظر گرفته شده، برای مقادیر داده شده α و β $(\alpha = 3.5, \beta = 1.1)$، θ_j، $j = 1, 2, ..., m$ را از توزیع پیشین (۲۰) تولید می‌کنیم و سپس به ازای هر j یک نمونه تصادفی از توزیع $gamma\,(n, \theta_j/n)$ تولید کرده و آنرا Z_j می‌نامیم. و سپس بر اساس این نمونه‌ها $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ را از (22) حساب می‌کنیم.

۲) برای مقادیر داده شده‌ی α و β، θ را از توزیع پیشین (۱۵) تولید می‌کنیم.

۳) نمونه تصادفی $v_1, v_2, ..., v_n, ..., v_s$ را از $Exp(\theta)$ تولید می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$x_n = \sum_{j=1}^n v_j, \qquad y = \sum_{j=1}^s v_j.$$

۴) پیشگوهای حداکثر درستنمایی و میانه شرطی (در حالت θ مجهول)، بیز و بیز تجربی، تحت تابع زیان درجه دو را محاسبه می‌کنیم.

۵) یک نمونه‌ی هزارتایی از (۱۶) به روش نمونه‌گیری برشی [۱۳] (برای جزئیات بیشتر به مرجع [6] مراجعه کنید) تولید می‌کنیم و پیشگوهای بیز و بیز تجربی، تحت تابع زیان لاینکس را برای مقادیر داده شده c حساب می‌کنیم.

۶) توان دوم انحرافات $(y^\star - y)^2$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $y^\star$ هر کدام از پیشگوهای محاسبه‌شده در مراحل چهار و پنج است.

۷) مراحل دو تا شش را هزار مرتبه تکرار می‌کنیم و برآورد ریسک را به صورت میانگین مربع انحرافات در هزار تکرار در نظر می‌گیریم.

محاسبات مربوط به شبیه‌سازی فوق در جدول ۱ آمده‌اند. توجه شود که $E(R_m(Y^\star))$ به معنای برآورد ریسک پیش‌گوی بیز تجربی $(Y^\star)$ در حالتی که m نمونه رکوردی و هر یک به حجم n در اختیار داشته باشیم، است.

۵ نتایج شبیه‌سازی

۱) اگر n بزرگ باشد $(n \geq 5)$ برآورد ریسک پیش‌گوی بیز تحت تابع زیان درجه دوم کمتر از برآورد ریسک پیش‌گوی میانه شرطی است و برای nهای کوچک $(n = 2, 3, 4)$ برآورد ریسک پیش‌گوی بیز تحت تابع زیان درجه دوم در پیش‌گویی رکوردهای دورتر کمتر از برآورد ریسک پیش‌گوی میانه شرطی است.

۲) تقریبا همه جا برآورد ریسک پیش‌گوی میانه شرطی کمتر از برآورد ریسک پیش‌گوی حداکثر درستنمایی است.

۳) همواره برآورد ریسک پیش‌گوی بیز تحت تابع زیان درجه دوم کمتر از برآورد ریسک پیش‌گوی حداکثر درستنمایی است.

٤) با دور شدن c از صفر برآورد ریسک پیش‌گوی بیز و بیز تجربی تحت تابع زیان لاینکس بزرگ می‌شود و رشد این افزایش در حالتی که c منفی باشد بسیار بیشتر از حالتی است که c مثبت است.

۵) هنگامی که c به صفر نزدیک می‌شود برآورد ریسک پیش‌گوی بیز و بیز تجربی تحت تابع زیان لاینکس به ترتیب به برآورد ریسک پیش‌گوی بیز و بیز تجربی تحت تابع زیان درجه دوم میل خواهند کرد.

٦) هنگامی که m و n افزایش می‌یابند برآورد ریسک پیش‌گوهای معرفی شده کاهش پیدا می‌کنند..

۷) برای هر مقدار دیگری از $\alpha > 2$ و $\beta > 0$ نتایج شبیه سازی به صورت بالا است.

[۱۳] Slice Sampling

جدول ۱: ریسک برآورد شده (ER) در پیشگویی Y برای مقادیر مختلف m, n, c در هزار تکرار ($\alpha = ۳/۵, \beta = ۱/۱$)

n	s	$ER(\widehat{Y}_{MLP})$	$ER(\widehat{Y}_{CMP})$	$ER(\widehat{Y}_{BS})$	$ER_{m=0}(\widehat{Y}_{EBS})$	$ER_{m=5}(\widehat{Y}_{EBS})$	c	$ER(\widehat{Y}_{BL})$	$ER_{m=0}(\widehat{Y}_{EBL})$	$ER_{m=5}(\widehat{Y}_{EBL})$
۲	۳	۲۹/۶۰۰	۱۹/۷۹۳	۲۰/۳۶۲	۱۷/۶۹۳	۱۷/۷۱۵	−۱	۲۸۳/۸۱۸	۷۲۹/۲۲۸	۷۵۲/۱۰۶
							−۰/۱	۴۴/۱۷۵	۶۵/۰۵۶	۵۴/۳۴۸
							−۰/۰۰۱	۲۰/۳۶۵	۱۷/۵۵۳	۱۷/۷۲۶
							۰/۰۰۱	۲۰/۳۷۷	۱۷/۵۵۶	۱۷/۷۱۸
							۰/۱	۲۱/۰۷۰	۱۸/۱۴۷	۱۸/۰۵۷
							۱	۲۴/۱۸۹	۲۲/۲۹۷	۲۲/۱۰۸
۲	۴	۵۴/۹۲۹	۳۵/۷۲۳	۳۶/۷۵۰	۳۷/۱۱۶	۳۸/۶۹۶	−۱	۴۰۵/۹۱۱	۱۳۶۷/۸۷۰	۳۰۴/۷۲۲
							−۰/۱	۱۰۸/۲۸۹	۱۷۷/۳۳۱	۴۳/۰۵۳
							−۰/۰۰۱	۳۶/۲۸۱	۳۷/۷۸۴	۳۹/۰۶۷
							۰/۰۰۱	۳۶/۳۶۳	۳۷/۶۸۱	۳۹/۰۶۹
							۰/۱	۴۹/۴۹۷	۳۷/۵۴۶	۴۰/۰۶۶
							۱	۶۰/۹۰۸	۵۲/۰۲۰	۵۲/۳۷۴
۲	۵	۸۳/۴۹۱	۸۴/۵۰۳	۷۶/۰۹۹	۶۹/۸۳۳	۵۵/۲۷۹	−۱	۶۶۰/۵۲۱	۲۵۸۹/۶۸۴	۱۵۵۱/۳۷۷
							−۰/۱	۲۱۱/۵۲۰	۵۰۵/۰۵۲	۲۵۲/۴۷۹
							−۰/۰۰۱	۷۷/۵۰۶	۷۲/۳۷۲	۵۸/۸۶۰
							۰/۰۰۱	۷۷/۵۵۱	۷۱/۵۴۲	۵۸/۶۶۷
							۰/۱	۸۴/۴۰۵	۵۹/۱۴۷	۶۰/۱۵۰
							۱	۱۱۲/۶۴۱	۸۸/۷۷۸	۹۵/۰۱۷
۲	۶	۱۲۱/۶۰۲	۱۳۸/۸۹۷	۱۱۵/۰۱۰	۸۴/۵۵۹	۸۱/۸۷۷	−۱	۸۶۵/۶۲۱	۹۱۷/۳۳۷	۴۸۴/۹۸۴
							−۰/۱	۳۳۵/۳۷۲	۲۱۲/۰۲۶	۸۹/۰۸۶
							−۰/۰۰۱	۱۱۷/۰۴۱	۸۷/۸۰۵	۸۳/۶۰۸
							۰/۰۰۱	۱۱۶/۹۵۳	۸۷/۸۹۷	۸۳/۶۷۷
							۰/۱	۱۲۶/۹۹۳	۹۹/۴۲۴	۸۹/۴۵۶
							۱	۱۷۳/۲۹۵	۱۵۶/۲۱۴	۱۴۱/۹۸۳
۲	۷	۱۷۲/۷۵۳	۱۹۵/۶۹۳	۱۶۹/۱۸۶	۱۹۴/۶۵۲	۱۱۱/۲۷۹	−۱	۹۰۶/۸۲۵	۳۵۵/۳۰۵	۱۳۸۷/۰۶۴
							−۰/۱	۳۶۹/۱۲۲	۳۵۵/۳۰۵	۲۸۵/۷۴۸
							−۰/۰۰۱	۱۷۷/۴۱۷	۳۵۵/۳۰۵	۱۲۰/۶۶۳
							۰/۰۰۱	۱۷۷/۶۸۱	۳۵۵/۳۰۵	۱۲۰/۷۲۰
							۰/۱	۱۹۹/۵۲۸	۳۵۵/۳۰۵	۱۳۷/۹۵۷
							۱	۲۷۸/۰۰۹	۳۵۵/۳۰۶	۲۴۴/۱۸۵
۳	۴	۳۱/۷۵۳	۲۰/۵۹۶	۲۱/۰۵۷	۲۱/۱۷۶	۱۹/۰۹۹	−۱	۳۱۵/۸۰۷	۴۰۸/۰۲۴	۶۶۶/۴۴۰
							−۰/۱	۳۵/۷۱۲	۲۵۷/۷۷۸	۵۳/۶۳۰
							−۰/۰۰۱	۲۱/۱۲۵	۲۱/۳۵۰	۱۹/۲۵۹
							۰/۰۰۱	۲۱/۱۴۶	۲۱/۳۱۵	۱۹/۲۶۲
							۰/۱	۲۲/۰۸۷	۲۰/۵۴۴	۱۹/۹۱۰
							۱	۲۵/۷۱۵	۲۳/۳۹۵	۲۴/۳۰۰
۳	۵	۵۴/۷۶۶	۴۲/۹۹۱	۴۴/۵۸۳	۸۵/۰۶۰	۳۸/۰۲۸	−۱	۵۴۱/۰۵۰	۷۵/۱۹۴	۷۶۹/۴۷۳
							−۰/۱	۱۱۸/۵۷۴	۷۵/۲۱۴	۱۰۰/۳۵۱
							−۰/۰۰۱	۴۵/۲۴۰	۷۵/۲۱۶	۳۷/۶۵۷
							۰/۰۰۱	۴۵/۳۰۶	۷۵/۲۱۶	۳۷/۶۹۶
							۰/۱	۴۸/۸۰۴	۷۵/۲۱۸	۴۱/۰۲۲
							۱	۶۳/۴۳۲	۷۵/۲۳۸	۵۸/۳۸۷
۳	۶	۸۰/۵۷۴	۷۷/۴۸۵	۷۲/۶۶۸	۶۰/۲۳۴	۶۱/۶۰۴	−۱	۹۰۸/۰۹۱	۱۵۹۵/۸۰۲	۱۲۸۸/۲۸۹
							−۰/۱	۲۶۷/۲۹۴	۳۳۹/۰۷۱	۱۷۷/۳۰۰
							−۰/۰۰۱	۷۵/۱۸۸	۶۳/۶۴۹	۶۳/۹۱۰
							۰/۰۰۱	۷۵/۲۰۹	۶۳/۴۹۹	۶۳/۷۶۵
							۰/۱	۸۲/۶۸۴	۶۵/۵۶۵	۶۵/۴۳۰
							۱	۱۱۷/۷۵۹	۱۰۵/۰۸۸	۱۰۳/۳۸۹
۳	۷	۱۱۳/۰۸۳	۱۱۳/۸۱۳	۱۰۶/۲۳۷	۷۸/۷۱۷	۸۱/۰۶۰	−۱	۱۲۹۵/۲۰۵	۱۶۴۳/۲۹۵	۶۴۴/۰۲۵
							−۰/۱	۶۳۹/۹۰۱	۳۶۸/۷۷۶	۱۰۹/۸۱۹
							−۰/۰۰۱	۱۱۳/۶۸۲	۸۱/۴۹۶	۸۵/۰۴۴
							۰/۰۰۱	۱۱۱/۹۸۴	۸۱/۰۳۶	۸۵/۲۲۳
							۰/۱	۱۱۸/۴۵۷	۸۵/۰۷۶	۹۶/۱۱۲
							۱	۱۷۳/۱۶۷	۱۵۱/۱۹۰	۱۵۵/۶۳۴

n	s	$ER(\hat{Y}_{MLP})$	$ER(\hat{Y}_{CMP})$	$ER(\hat{Y}_{BS})$	$ER_{m=1}(\hat{Y}_{EBS})$	$ER_{m=5}(\hat{Y}_{EBS})$	c	$ER(\hat{Y}_{BL})$	$ER_{m=1}(\hat{Y}_{EBL})$	$ER_{m=5}(\hat{Y}_{EBL})$
							−۱	۲۸۶/۶۵۶	۱۸/۰۷۰	۳۲۲/۱۵۸
							−/۱	۲۵/۶۹۹	۱۸/۰۷۰	۱۳/۶۱۶
۴	۵	۲۳/۱۷۱	۱۳/۶۷۱	۱۳/۶۱۴	۱۳/۹۲۳	۱۲/۹۱۹	−/۰۰۱	۱۳/۷۸۸	۱۸/۰۷۰	۱۳/۰۳۴
							/۰۰۱	۱۳/۷۸۲	۱۸/۰۷۰	۱۳/۰۳۷
							/۱	۱۴/۱۵۷	۱۸/۰۷۰	۱۳/۳۷۲
							۱	۱۷/۳۷۱	۱۸/۰۷۰	۱۶/۵۴۶
							−۱	۵۱۳/۹۷۶	۱۱۸۹/۶۰۰	۷۰۱/۶۶۱
							−/۱	۱۱۳/۱۱۴	۱۷۶/۳۱۳	۸۲/۵۴۳
۴	۶	۵۵/۴۳۶	۴۴/۱۹۲	۴۴/۹۷۸	۳۸/۶۸۹	۳۸/۲۷۱	−/۰۰۱	۴۶/۱۸۸	۳۸/۷۲۶	۳۸/۷۸۲
							/۰۰۱	۴۶/۱۵۷	۳۸/۶۱۴	۳۸/۷۸۷
							/۱	۴۸/۳۵۴	۳۹/۳۱۹	۴۱/۰۲۰
							۱	۶۲/۹۴۷	۵۶/۸۹۶	۵۷/۸۳۵
							−۱	۶۶۴/۹۶۹	۱۳۷۱/۵۲۴	۹۱۷/۸۶۱
							−/۱	۱۴۸/۱۰۷	۲۹۲/۶۳۷	۱۱۰/۴۲۰
۴	۷	۶۸/۰۳۲	۵۹/۹۳۱	۵۹/۵۸۳	۴۹/۴۹۰	۴۹/۱۹۶	−/۰۰۱	۶۱/۳۹۷	۵۱/۲۸۷	۵۰/۲۳۸
							/۰۰۱	۶۱/۴۲۲	۵۱/۰۶۷	۵۰/۱۹۰
							/۱	۶۶/۹۴۴	۵۲/۰۶۰	۵۲/۷۴۷
							۱	۹۷/۱۴۲	۸۷/۱۹۲	۸۵/۶۸۰

n	s	$ER(\hat{Y}_{MLP})$	$ER(\hat{Y}_{CMP})$	$ER(\hat{Y}_{BS})$	$ER_{m=1}(\hat{Y}_{EBS})$	$ER_{m=5}(\hat{Y}_{EBS})$	c	$ER(\hat{Y}_{BL})$	$ER_{m=1}(\hat{Y}_{EBL})$	$ER_{m=5}(\hat{Y}_{EBL})$
							−۱	۳۲۰/۷۱۷	۴۶۵/۴۱۰	۴۴۳/۵۲۷
							−/۱	۳۱/۰۰۷	۲۷/۷۴۱	۲۸/۸۸۳
۵	۶	۲۵/۱۹۰	۱۵/۵۹۳	۱۵/۳۹۵	۱۴/۳۳۱	۱۴/۳۷۸	−/۰۰۱	۱۵/۳۷۶	۱۴/۲۷۱	۱۴/۳۰۵
							/۰۰۱	۱۵/۳۶۹	۱۴/۲۵۵	۱۴/۲۹۳
							/۱	۱۵/۶۸۳	۱۴/۳۲۶	۱۴/۴۶۸
							۱	۱۹/۰۰۵	۱۸/۰۰۳	۱۸/۱۳۶
							−۱	۴۶۹/۰۰۶	۷۶۳/۶۷۹	۸۷۳/۴۳۰
							−/۱	۶۶/۰۳۶	۱۲۹/۷۹۰	۸۱/۵۱۷
۵	۷	۳۵/۹۸۵	۲۹/۴۷۴	۲۸/۴۹۰	۲۶/۰۲۷	۲۶/۵۴۸	−/۰۰۱	۲۸/۸۰۴	۲۶/۰۶۸	۲۶/۴۲۱
							/۰۰۱	۲۸/۷۷۲	۲۵/۹۷۳	۲۶/۲۷۵
							/۱	۲۹/۷۰۵	۲۶/۱۷۸	۲۴/۳۱۰
							۱	۴۱/۴۱۱	۳۹/۰۶۳	۳۶/۲۵۲
							−۱	۲۸۲/۱۸۰	۲۶۹/۹۳۵	۳۵۷/۸۱۶
							−/۱	۲۷/۳۳۲	۱۸/۵۱۵	۲۰/۶۴۷
۶	۷	۲۴/۴۲۹	۱۴/۸۸۰	۱۴/۵۶۹	۱۳/۹۸۰	۱۳/۵۶۸	−/۰۰۱	۱۴/۶۰۱	۱۴/۰۳۳	۱۳/۶۹۷
							/۰۰۱	۱۴/۶۰۳	۱۴/۰۳۵	۱۳/۶۹۲
							/۱	۱۵/۰۱۲	۱۴/۴۷۱	۱۳/۹۴۵
							۱	۱۸/۲۶۳	۱۷/۹۰۰	۱۷/۲۴۲

مراجع

[1] Ahmadi, J. and Doostparast, M.(2007). Statistical inference based on record data from pareto model,*Appl. Math. Compot*,**41**, 105-118 .

[2] Ahsanullah, M. (1980). Linear prediction of record values for the two parametr exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math* **32** (A), 363-368.

[3] Ahsanullah, M.(1995).*Record Statistics*, Nova science, Hontington, NY.

[4] Arnold, B.C.,Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1998). *Records*, John Wiley, New York.

[5] Basak, P. and Balakrishnan, N.(2003). Maximum likelihood prediction of future record statistic, In *Mathematical and Statistical Method in Reliability, Series on Quality, Reliability and Engineering, Volume 7*.

[6] Dagpunar, J. S.(2007). *Simulation and Monte Carlo*, WILEY, England.

[7] Dunsmore,IR.(1983). The future occurrence of records, *Ann. Inst. Statist. Math* **35**, 267-277.

[8] Dunsmore,IR.(1974). The Bayesian predictive distribution in life testing mod els, *Technometrics* **16**, 455-460.

[9] Jaheen, Z.F.(2004). Empirical Bayes analysis record statistics based on LINEX and Quadratic loss functions.*Computers and Mathematical with Applications*,A7, 947-954.

[10] Raqab, M.Z. and Nagaraja, H.N.(1995). On some predictor of future order statistics, *Metron*, **53**, nos. 1-2, 185-204.

[11] Schafer, R.E. and Feduccia, A.J. .(1972). Prior distributions fitted to observed reliability data, *IEEEE Transactions on Reliability* **R-21**, 148-154.