

اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱، شماره پیاپی ۳۳

سال هفدهم شماره اول، ص ۱۵-۲۸

پیش‌بینی بیزی مشاهده آینده بر اساس نمونه سانسور شده دوطرفه در مدل نمایی

جعفر احمدی^۱، منصور کرم زاده^۲

چکیده:

در بسیاری تحقیقات مربوط به آزمونهای طول عمر، با محدودیتهایی مانند زمان و تعداد واحد نمونه مواجه هستیم، که این عوامل باعث می شود پژوهشگر دسترسی به کل داده‌ها نداشته باشد. بنابراین پیش‌بینی مقادیر آینده بر اساس اطلاعات واحدهایی از نمونه که در دسترس می‌باشند، ارزش مطالعه دارد. در این مقاله با فرض اینکه مشاهدات اصلی از مدل نمایی پیروی می‌کنند و محدودیت اعمال شده بر داده‌ها سانسور دوطرفه است، پیش‌بینی مقادیر آینده را از دیدگاه آمار بیز در دو حالت یک نمونه ای و دو نمونه ای مورد بررسی قرار داده ایم. در هر حالت پیش‌بینی فاصله ای با احتمال پوشش داده شده به دست می‌آید. در پایان نتایج روی یک مثال عددی اعمال شده است.

واژه‌های کلیدی: آماره های ترتیبی، پیش‌بینی بیزی، توزیع پیشین مزدوج، مدل نمایی، سانسور دوطرفه.

^۱گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج

۱ مقدمه

یا آزمایش تا به نتیجه رسیدن همه واحدهای نمونه جریان نداشته است. این محدودیت ممکن است به صورت اختیاری توسط محقق اعمال شود یا ماهیت آزمایشها طوری باشند که خود بخود محدودیتی را

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، هرگاه تابع توزیع آن به صورت زیر باشد.

$$F_X(t; \theta) = 1 - \exp(-\theta t), t > 0 \quad (۱)$$

در مشاهدات به وجود آورند. بعضی از این محدودیتها عبارتند از: فرصت کم برای اعلام نتایج، طولانی شدن مدت آزمایش، عدم دسترسی به همه واحدها و یا مایوس شدن از نتیجه دادن همه واحدهای نمونه.

که در آن θ پارامتر مقیاس می‌باشد. بنابراین تابع چگالی احتمال X عبارت است از:

$$f_X(t; \theta) = \theta \exp(-\theta t), t > 0. \quad (۲)$$

به این محدودیتها در متون آماری سانسور مشاهدات گویند که به صورتهای مختلف اعمال می‌شوند. برای بررسی جزئیات بیشتر در مورد انواع سانسور، نظریه و کاربرد آنها می‌توان به لاوولس (۲۰۰۳) ^۴، نلسن (۲۰۰۴) ^۵ و همچنین بالاکریشنان (۲۰۰۷) مراجعه نمود.

این توزیع یکی از مدلهای مهم در زمینه مطالعات مربوط به طول عمر سیستمها می‌باشد. از جمله کاربردهای معروف آن فاصله زمانی بین رویدادها در فرآیند پواسن می‌باشد، بطوری که برای مدل بندی این فرآیند می‌توان از آزمون نیکویی برازش توزیع

نمایی استفاده کرد. معروف ترین ویژگی این توزیع، خاصیت فقدان حافظه است که عامل تشخیص و توصیف مدل نمایی می‌باشد. بالاکریشنان و باسو در سال (۱۹۹۵) ^۳ مجموعه تحقیقات انجام شده در خصوص این توزیع را تا آن زمان جمع آوری نموده‌اند که می‌تواند منبع مفیدی برای علاقمندان به تحقیق درباره خواص توزیع نمایی باشد. در بسیاری اوقات درآزمونهای طول عمر، آزمایشهای کلینیکی، تحلیل بقا و دیگر زمینه های کاربردی علم آمار با نمونه‌هایی مواجه هستیم که نمونه مورد مطالعه محدود شده و همه مشاهدات ثبت نشده‌اند

وقتی صحبت از داده های سانسور شده می‌شود سوال مهم چگونگی به دست آوردن اطلاعات در مورد مقادیر مشاهده نشده از این داده‌ها است. یکی از راه حل‌های مفید، می‌تواند پیش بینی این مقادیر باشد. امروزه پیش بینی در اکثر زمینه ها از جمله پدیده های طبیعی مانند زلزله و سیل، فعال شدن آتشفشان، تغییرات جوی و حوادثی نظیر سونامی (که در دی ماه سال ۱۳۸۳ خسارت جانی و مالی زیادی در آسیای جنوب شرقی وارد نمود) نقش مهمی ایفا می‌کند. از دیگر موارد استفاده از نظریه

^۴Lawless

^۵Nelson

^۳Balakrishnan and Basu

پیش بینی، مطالعه طول عمر در سیستمهای مهندسی بالا و پایین را برای مشاهده آینده بر اساس مقادیر می باشد. برای مثال در یک سیستم مهندسی مو مشاهده شده از توزیع پارتو نوع ۲ با استفاده از لفه های سیستم به نحوی نصب شده اند که در صورت خراب شدن یک مولفه، مولفه یدک به جای آن قرار می گیرد. بنابراین پیش بینی طول عمر مولفه یدک تا زمان تعمیر مولفه اول ارزش مطالعه دارد. با توجه به اینکه پارامتر جامعه ممکن است تحت تاثیر عوامل آزمایش تغییر کند لذا همیشه نمی توان آنرا مقداری ثابت تلقی کرد. بنابراین در چنین شرایطی استفاده از اطلاعات پیشین پارامتر در این کار و در نتیجه پیش بینی بیزی اهمیت پیدا می کند. محققین زیادی مسئله پیش بینی را از دیدگاه آمار بیز مطالعه نموده اند. از جمله گیسر (۱۹۸۵؛ ۱۹۸۴) ^۶ نیگم و همدی (۱۹۸۷) ^۷، آرنولد و پرس (۱۹۸۹) ^۸، دنسمر و امین (۱۹۹۸) ^۹، در حالت های مختلف پیش بینی بیزی را در مدل پارتو انجام داده اند. الحسینی و جاهین (۱۹۹۵) ^{۱۰} و نیگم (۱۹۸۸) حدود پیش بینی را برای مشاهداتی از مدل بر نوع ۱۲ بر اساس چگالیهای پیشین مختلف به دست آورده اند. نیگم و همکاران (۲۰۰۳) ^{۱۱}، کران

بالا و پایین را برای مشاهده آینده بر اساس مقادیر مشاهده شده از توزیع پارتو نوع ۲ با استفاده از تکنیکهای بیزی به دست آورده اند. در این مقاله فرض می کنیم مشاهدات اصلی از مدل نمایی تبعیت می کنند و یک نوع سانسور روی داده ها اعمال شده است. با استفاده از روشهای بیزی سعی داریم مقادیر آینده را پیش بینی نمائیم. بخشهای بعدی مقاله بدین شرح است که بخش دو شامل تعریفها و مقدمات لازم از آمارهای ترتیبی، سانسور دوطرفه، پیش بینی بیزی و طرحهای نمونه گیری است. در بخش سه حدود پیش بینی بیزی را تحت مدل نمایی در دو حالت یک نمونه ای و دو نمونه ای برای مقادیر آینده محاسبه می کنیم. در بخش چهار نتایج به دست آمده تشریح شده است.

۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش، آمارهای ترتیبی، سانسور دوطرفه، روش پیش بینی بیزی و طرحهای نمونه گیری بطور مختصر معرفی میشوند که در قسمتهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند.

۱.۲ آمارهای ترتیبی

فرض کنید $T_1, T_2, \dots, T_n$ یک نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع از جامعه ای با تابع توزیع $F(t; \theta)$ و تابع چگالی احتمال $f(t; \theta)$ باشد و متغیرهای

^۶ Geisser

^۷ Nigm and Hamdy

^۸ Arnold and Press

^۹ Dunsmore and Amin

^{۱۰} Al-Hussaini and Jaheen

^{۱۱} Nigm et.al.

۲.۲ سانسور دوطرفه $T_{-n}, \dots, T_{-2}, T_{-1}$ آماره‌های ترتیبی حاصل از این

نمونه باشد که در آن T_{-i} ، i - امین آماره ترتیبی در نمونه ای به حجم n می‌باشد، در این صورت تابع چگالی احتمال حاشیه ای i - امین آماره (T_{-i}) عبارتست از

$$f_{i:n}(t) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \times [F(t)]^{i-1} [1 - F(t)]^{n-i} f(t) \quad (۳)$$

همچنین تابع چگالی احتمال شرطی j - امین آماره ترتیبی به شرط i - امین آماره ترتیبی به صورت

$$\begin{aligned} f_{-j:n|i:n}(t_j|t_i) &= \frac{(n-i)!}{(j-i-1)!(n-j)!} \\ &\times [(F(t_j) - F(t_i))/(1 - F(t_i))]^{j-i-1} \\ &\times [(1 - F(t_j))/(1 - F(t_i))]^{n-j} \\ &\times [f(t_j)/(1 - F(t_i))], \end{aligned} \quad (۴)$$

$$t_i \leq t_j < \infty, \quad i < j \leq n$$

می‌توان نشان داد که تابع درستنمایی سانسور دوطرفه به صورت زیر است.

$$L(\underline{t}) = \frac{n!}{(s-1)!(n-r)!} \prod_{i=s}^r f(t_i) \times \{1 - F(t_r)\}^{n-r} \{F(t_s)\}^{s-1} \quad (۵)$$

که در آن $\underline{t} = (t_{-s}, \dots, t_{-r})$.

برای مطالعه جزئیات بیشتر در خصوص نظریه و

است. برای بررسی جزئیات بیشتر در خصوص ویژگی آماره‌های ترتیبی می‌توان به کتابهای آرنولد و همکاران (۱۹۹۲) ^{۱۲} یا دیوید و ناگاراچا (۲۰۰۳) ^{۱۳} مراجعه نمود.

^{۱۲} Arnold et.al.

^{۱۳} David and Nagaraja

کاربرد سانسورها می توان به لاوولس (۲۰۰۳) مراجعه نمود.

۳.۲ پیش بینی بیزی

فرض کنید $T_1, T_2, \dots, T_n$ نمونه تصادفی مشاهده شده از جامعه $f(t; \theta)$ باشد و همچنین فرض کنید داده های حاصل از سانسور دو طرفه را در اختیار داریم، هدف پیش بینی $n-r$ مشاهده آینده می باشد. در مباحث بیزی θ یک متغیر تصادفی تلقی می شود، با فرض اینکه $\pi(\theta)$ توزیع پیشین و $\pi(\theta|t)$ توزیع پسین باشد، اطلاعات درباره مقدار آینده $\{Y = y\}$ را می توان از طریق تابع چگالی احتمال زیر به دست آورد.

$$f(y|T = \underline{t}) = \int_{\Theta} f(y|\underline{t}, \theta) \pi(\theta|\underline{t}) d\theta, \quad (6)$$

$$\underline{T} = (T_s, \dots, T_r), \quad \underline{t} = (t_s, \dots, t_r)$$

این تابع به تابع چگالی پیش بینی بیزی معروف است. برای مطالعه بیشتر در این خصوص به بالا کریشان و باسو (۱۹۹۵) فصل ۹ مراجعه شود.

۴.۲ طرحهای نمونه گیری

الف. طرح یک نمونه ای: اگر یک نمونه تصادفی از جامعه $f(t; \theta)$ در یک آزمون بقا قرار گیرد، آن گاه نمونه سانسور شده دوطرفه شامل s - آمین تا r - آمین زمان خرابی می باشد ($1 \leq$

$s < r \leq n$). زمان خرابی j - آمین مولفه را با t_j نشان می دهیم. هدف ما پیش بینی زمان های خرابی $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$ بر اساس نمونه سانسور شده دوطرفه می باشد. گیسر (۱۹۹۳) جزئیات بیشتر را در مورد این طرح مورد بررسی قرار داده است.

ب. طرح دو نمونه ای: فرض کنید یک نمونه سانسور شده دوطرفه از جامعه $f(t; \theta)$ داشته باشیم، بر اساس این سانسور علاقمند به پیش بینی b - آمین زمان خرابی، $m, \dots, 2, 1$ از نمونه $z_1, z_2, \dots, z_m$ می باشیم که مستقل و هم توزیع نمونه اول است. ایتچیسون و دنسمر (۱۹۷۵) ۱۴ از روش فوق استفاده نموده اند.

۵.۲ لم تکنیکی

در این بخش یک لم را بیان و اثبات می کنیم، که به عنوان ابزار پایه ای در اثبات نتایج مقاله مورد استفاده قرار می گیرد.

لم ۱.۰۲. فرض کنید ε و N اعداد طبیعی باشند، آن گاه

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} (i + \varepsilon)^{-1} = [(N + 1) \times \binom{N + \varepsilon}{N + 1}]^{-1}.$$

^{۱۴} Aitchison and Dunsmore

۳ پیش‌بینی بیزی بر اساس مشاهدات سانسور دو طرفه تحت مدل نمایی

در این قسمت سعی می‌کنیم با توجه به مطالب ارائه شده در بخش‌های قبل، برای مقادیر آینده از مدل نمایی بر اساس مقادیر مشاهده شده سانسور دو طرفه فاصله پیش‌بینی به دست آوریم. این کار را در دو حالت یک نمونه ای و دو نمونه ای انجام می‌دهیم.

۱.۳ طرح یک نمونه ای

فرض کنید $t_{-1}, t_{-2}, \dots, t_{-n}$ مقادیر مشاهده شده زمان خرابی از یک نمونه شامل n مولفه در یک آزمون بقا باشد. بر اساس نمونه سانسور شده دو طرفه از یک جامعه با تابع توزیع و تابع چگالی به ترتیب (۱) و (۲)، تابع درستنمایی عبارتست از:

$$L(\theta; \underline{t}) \propto \theta^{r-s+1} \sum_{k=0}^{s-1} Q_k(s) \exp[-\theta T_k(\underline{t})]$$

که در آن

$$\begin{aligned} \underline{t} &= (t_{-s}, \dots, t_{-r}), \\ Q_k(s) &= (-1)^k \binom{s-1}{k}, \\ T_k(\underline{t}) &= \sum_{i=s}^r t_i + (n-r)t_{-r} + kt_{-s}. \end{aligned}$$

اثبات. به بسط دو جمله‌ای خیام داریم

$$(1-t)^N = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} t^i.$$

طرفین تساوی بالا را در $t^{\varepsilon-1}$ ضرب می‌کنیم و از طرفین نسبت به t با فرض $0 \leq t \leq 1$ ، انتگرال می‌گیریم، یعنی

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1-t)^N t^{\varepsilon-1} dt \\ &= \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} \int_0^1 t^{i+\varepsilon-1} dt. \end{aligned}$$

با محاسبه انتگرال در دو طرف تساوی بالا در نهایت داریم

$$\frac{N!(\varepsilon-1)!}{(N+\varepsilon)!} = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} (1/i + \varepsilon).$$

از طرفی می‌دانیم

$$\frac{N!(\varepsilon-1)!}{(N+\varepsilon)!} = [(N+1) \binom{N+\varepsilon}{N+1}]^{-1}.$$

با مقایسه دو رابطه اخیر اثبات کامل می‌شود. $\square$

۶.۲ احتمال پوشش

اگر A یک فاصله پیش‌بینی باشد آن‌گاه ϑ احتمال پوشش این فاصله است اگر و فقط اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$\int_A f(y|\underline{t}) dy = \vartheta$$

که در آن $f(y|\underline{t})$ تابع چگالی پیش‌بینی است. برای کسب اطلاعات بیشتر در این خصوص به کتاب ایچچیسن و دنسمر (۱۹۷۵) مراجعه شود.

در آمار بیز پارامتر θ در حکم یافته متغیر تصادفی با جایگذاری روابط (۱) و (۲) در رابطه (۸) θ تلقی می شود لذا از یک توزیع مشخص پیروی داریم

$$h(y_a|\theta, t) \propto \theta \sum_{j=0}^{a-1} Q_j(a) \quad (9)$$

می کند که به توزیع پیشین معروف است. در این بخش برای پارامتر θ توزیع پیشین مزدوج گاما را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$, y_a > t_r$$

$$g(\theta|\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta)$$

که در آن $c_j = n - r - a + j + 1$

هدف از انجام محاسبات فوق به دست آوردن

تابع چگالی احتمال پیش بینی بیزی است که با استفاده از روابط (۷) و (۹) به صورت زیر به دست می آید

$$f(y_a|t) = \int_0^\infty h(y_a|\theta, t) \pi^*(\theta|t) d\theta \quad (10)$$

$$= K^* \sum_{j=0}^{a-1} \sum_{k=0}^{s-1} Q_j(a) Q_k(s)$$

$$\times [T_k(t) + \beta + c_j(y_a - t_r)]^{-(d_0+1)}$$

$$, y_a > t$$

که در آن α و β مقادیر حقیقی مثبت، پارامترهای توزیع پیشین می باشند. با ضرب توزیع پیشین و تابع درستنمایی سانسور دوطرفه تابع چگالی احتمال پسین به صورت زیر به دست می آید.

$$\pi^*(\theta|t) \propto \theta^{r-s+\alpha} \sum_{k=0}^{s-1} Q_k(s) \quad (7)$$

$$\times \exp\{-\theta[T_k(t) + \beta]\},$$

فرض کنید $y_a = t_{r+a}$ مقادیر آینده نمونه باشند

که در آن $a = 1, \dots, n-r$ تابع چگالی احتمال y_a با شرط θ و مشاهدات قبلی با توجه به رابطه (۴) به صورت زیر نوشته می شود:

به محاسبه مقدار احتمال $P(y_a \geq b_1|t)$ داریم که

بر حسب b_1 به صورت زیر به دست می آید.

$$P(y_a \geq b_1|t) = \int_{b_1}^\infty f(y_a|t) dy_a$$

این انتگرال با استفاده از رابطه (۱۰)، لم ۱.۲ و

با فرض $N = a - 1$ و $\varepsilon = n - r - a + 1$

$$h(y_a|\theta, t) \propto [F(y_a) - F(t_r)]^{a-1}$$

$$\times [1 - F(y_a)]^{n-r-a}$$

$$\times [1 - F(t_r)]^{-(n-r)}$$

$$\times f(y_a), \quad y_a > t. \quad (8)$$

۲.۳ طرح دو نمونه‌ای

صورت زیر نوشته می‌شود.

فرض کنید $t_{-s}, t_{-s+1}, \dots, t_{-r}$ مقادیر مشاهده شده $r - s + 1$ زمان خرابی نمونه سانسور شده دوطرفه از یک نمونه n تایی از توزیع نمایی باشد. اگر $(b = 1, 2, \dots, m)$ z_b b -امین زمان خرابی مرتب شده در یک نمونه m تایی (مستقل و هم توزیع نمونه اول) باشد که در آینده اتفاق خواهد افتاد، می‌خواهیم با استفاده از اطلاعات نمونه سانسور شده دوطرفه، برای z_b فاصله پیش بینی به دست آوریم. برای این کار روندی مشابه بخش قبل را انجام می‌دهیم. ابتدا تابع چگالی احتمال z_b به شرط θ ، که عبارتست از:

$$h(z_b|\theta) \propto [1 - F(z_b)]^{m-b} [F(z_b)]^{b-1} \times f(z_b), \quad z_b > 0. \quad (13)$$

که با جایگذاری روابط (۱) و (۲) در آن به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$h(z_b|\theta) \propto \theta \sum_{i=0}^{b-1} Q_i(b) \exp(-\theta z_b e_i), \quad (14)$$

که در آن $e_i = m - b + i + 1$

از طرفی تابع چگالی احتمال پیش بینی بیزی به

$$P(y_a \geq b_1|\underline{t}) = A^{-1} a \binom{n-r}{a} \times \sum_{j=0}^{a-1} \sum_{k=0}^{s-1} Q_j(a) Q_k(s) \times \frac{[T_k(\underline{t}) + \beta + c_j(b_1 - t_{-r})]^{-d_0}}{c_j}$$

که در آن

$$A = \sum_{k=0}^{s-1} Q_k(s) [T_k(\underline{t}) + \beta]^{-d_0}$$

با توجه به احتمال $P(y_a \geq b_1|\underline{t})$ ، کافی است برای محاسبه کران‌های پیش بینی فاصله (L, U) که در آن U کران بالای پیش بینی و L کران پایین پیش بینی است، معادلات زیر به طور توأم حل شوند.

$$(1 - \vartheta)/2 = P(y_a > U|\underline{t}), \quad (11)$$

$$(1 + \vartheta)/2 = P(y_a > L|\underline{t}). \quad (12)$$

که در آن ϑ احتمال پوشش فاصله (L, U) می‌باشد و در بخش ۶-۲ توضیح داده شده است. جواب معادلات (۱۱) و (۱۲) به صورت بسته به دست نمی‌آید، اما با استفاده از روشهای عددی و نرم‌افزارهای ریاضی قابل حل می‌باشند. فاصله (L, U) که به این طریق به دست می‌آید را فاصله پیش بینی بیزی با احتمال پوشش ϑ برای y_a می‌گویند.

کمک روابط (۷) و (۱۴) عبارتست از:

$$\begin{aligned} f(z_b|\underline{t}) &= K^* \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{s-1} Q_i(b) Q_k(s) \\ &\times (T_k(\underline{t}) + \beta + e_i z_b)^{-(d_0+1)} \end{aligned} \quad (15)$$

$z_b > 0.$

بسته ای ندارند و تنها راه حل آن‌ها استفاده از روشهای عددی است. فاصله (L, U) که با حل معادلات (۱۶) و (۱۷) به دست می آید کرانهای بالا و پایین پیش بینی بیزی با احتمال پوشش ϑ را برای z_b می دهد.

۴ مثال عددی برای محاسبه فاصله پیش بینی لازم است مقدار احتمال

۱.۴ پیش بینی در توزیع نمایی بر اساس طرح یک نمونه ای

مشاهدات زیر نشان دهنده اندازه سنگ‌هایی است که تحت یک عملیات خاص شکسته می شوند. این داده‌ها از توزیع نمایی (۱) پیروی می کنند (داده‌ها از دنسمر (۱۹۸۳) گرفته شده‌اند).

0.6, 2.4, 5.6, 6.6, 6.6, 9, 9.3,

13, 14.3, 18.1, 24.4, 33.8

برای تولید یک نمونه سانسور شده دوطرفه، فرض

کنید دو مشاهده مرتب شده اول و دوم به دلایلی

در دسترس نباشند ($s = 3$) با انتخاب دو حالت

($r = 6$) و ($r = 9$) دو نمونه سانسور شده دوطرفه

از مشاهده s ام تا r ام در اختیار داریم. معادلات

(۱۱) و (۱۲) را با استفاده از نرم افزار MAPLE

و با فرض اینکه $\vartheta = 0.95$ و $s = 3$ باشد حل

نموده و فاصله پیش بینی را برای $t_{.7} (r = 6)$

و $t_{.10} (r = 9)$ در حالت‌های مختلف پارامترهای

$P(z_b > b_2|\underline{t})$ را بر حسب b_2 حل کنیم که

با استفاده از تابع چگالی احتمال پیش بینی بیزی

در (۱۵)، لم ۱.۲ و با فرض $N = b - 1$ و

$\varepsilon = m - b + 1$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} P(z_b > b_2|\underline{t}) &= B^{-1} b \binom{m}{b} \\ &\times \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{s-1} Q_i(b) Q_k(s) \\ &\times \frac{[T_k(\underline{t}) + \beta + b_2 e_i]^{-d_0}}{e_i}. \end{aligned}$$

و در آن

$$B = \sum_{k=0}^{s-1} Q_k(s) [T_k(\underline{t}) + \beta]^{-d_0}$$

اکنون برای محاسبه فاصله پیش بینی (L, U) مانند

حالت قبل باید معادلات زیر بطور توأم حل شوند.

$$(1 - \vartheta)/2 = P(z_b \geq U|\underline{t}), \quad (16)$$

$$(1 - \vartheta)/2 = P(z_b \geq U|\underline{t}), \quad (17)$$

که در آن ϑ احتمال پوشش فاصله (L, U) می باشد.

اما مانند طرح یک نمونه ای این معادلات نیز جواب

توزیع پیشین در جدول ۱ آورده ایم. با نگاهی به جدول ۱ ملاحظه می‌شود که به عنوان مثال در حالت $r = 6$ وقتی پارامترهای توزیع پیشین $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ باشد، فاصله پیش‌بینی برای t_{-7} ، به صورت $(9/054, 19/3)$ است که مقدار واقعی آن یعنی $9/3$ را شامل می‌شود. به طور مشابه با تغییر پارامترهای توزیع پیشین، بقیه فاصله‌های پیش‌بینی به دست آمده نیز شامل t_{-7} می‌باشند. این نتیجه برای مشاهده آینده t_{10} وقتی $r = 9$ باشد نیز برقرار است. در این مثال ملاحظه می‌شود که:

۱. طول فاصله با افزایش β (α ثابت) افزایش می‌یابد.
۲. طول فاصله با افزایش α (β ثابت) کاهش می‌یابد.
۳. با افزایش r ، طول فاصله افزایش پیدا کرده است.

۱. در حالت دو نمونه ای نیز مانند بخش قبل طول فاصله با افزایش α (β ثابت) کاهش می‌یابد.

۲. واضح است که طول فاصله با افزایش β (α ثابت) افزایش می‌یابد.
۳. در حالت دو نمونه ای با افزایش r ، طول فاصله کاهش پیدا کرده است.

۲۰۴ پیش‌بینی در توزیع نمایی بر اساس طرح دو نمونه ای

همان‌طور که در بخش ۲-۴ اشاره شد در طرح دو نمونه‌ای فرض می‌کنیم یک نمونه سانسور شده دوطرفه در دسترس می‌باشد و می‌خواهیم بر اساس این نمونه برای b -امین زمان خرابی ($b = 1, 2, \dots, m$) از نمونه دوم فاصله پیش‌بینی به دست آوریم. ابتدا

جدول ۱: فاصله پیش بینی برای $t_{.7}$ و $t_{.10}$ در حالت یک نمونه ای

پارامترهای توزیع پیشین		$r = 6$			$r = 9$		
α	β	کران پایین $t_{.7}$	کران بالای $t_{.7}$	طول فاصله	کران پایین $t_{.10}$	کران بالای $t_{.10}$	طول فاصله
۱	۲	9/054	19/3	10/25	14/366	31/4	17/034
۱	۵	9/056	19/6	10/54	14/369	31/8	17/43
۳	۱	9/04	16/4	7/36	14/38	27/9	13/52
۵	۱	9/03	14/8	5/77	14/38	25/7	11/32

جدول ۲: فاصله پیش بینی برای z_1 در حالت دو نمونه ای

پارامترهای توزیع پیشین		$r = 6$			$r = 7$		
α	β	کران پایین	کران بالا	طول فاصله	کران پایین	کران بالا	طول فاصله
۱	۲	0/095	18/22	18/125	0/083	15/38	15/297
۱	۵	0/098	18/75	18/652	0/086	15/82	15/734
۳	۱	0/073	13/16	13/09	0/066	11/58	11/514
۵	۱	0/06	10/34	10/28	0/055	9/33	9/275

پیوست

برای حل معادلات به روش عددی از نرم افزار MAPLE استفاده شده است که در هر یک از حالت‌های یک نمونه ای و دو نمونه ای برنامه مربوطه بعد از جایگذاری مقادیر عددی معلوم در زیر آورده شده است.

الف. یک نمونه ای

$$\begin{aligned}
 & t := \frac{6}{(83.8)^{-5} - 2 \cdot (89.4)^{-5} + (95)^{-5}} \\
 & \cdot \left(\left(\frac{1}{(6 \cdot (83.8 + 6 \cdot (x - 9))^5)} \right) - \left(\frac{2}{(6 \cdot (89.4 + 6 \cdot (x - 9))^5)} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{(6 \cdot (95 + 6 \cdot (x - 9))^5)} \right) \right) - .975 = 0 : \\
 & \text{fsolve}(t, x) \\
 & 9.053706397 \\
 & t := \frac{6}{(83.8)^{-5} - 2 \cdot (89.4)^{-5} + (95)^{-5}} \\
 & \cdot \left(\left(\frac{1}{(6 \cdot (83.8 + 6 \cdot (x - 9))^5)} \right) - \left(\frac{2}{(6 \cdot (89.4 + 6 \cdot (x - 9))^5)} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{(6 \cdot (95 + 6 \cdot (x - 9))^5)} \right) \right) - .025 = 0 : \\
 & \text{fsolve}(t, x) \\
 & 19.29478466
 \end{aligned}$$

ب. دو نمونه ای

$$\begin{aligned}
 & t := \frac{4}{(97.9)^{-10} - 2 \cdot (104.5)^{-10} + (111.1)^{-10}} \\
 & \cdot \left(\left(\frac{1}{(4 \cdot (97.9 + 4 \cdot x)^{10})} \right) - \left(\frac{2}{(4 \cdot (104.5 + 4 \cdot x)^{10})} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{(4 \cdot (111.1 + 4 \cdot x)^{10})} \right) \right) - .975 = 0 : \\
 & \text{fsolve}(t, x) \\
 & 0.05470300826 \\
 & t := \frac{4}{(97.9)^{-10} - 2 \cdot (104.5)^{-10} + (111.1)^{-10}} \\
 & \cdot \left(\left(\frac{1}{(4 \cdot (97.9 + 4 \cdot x)^{10})} \right) - \left(\frac{2}{(4 \cdot (104.5 + 4 \cdot x)^{10})} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{(4 \cdot (111.1 + 4 \cdot x)^{10})} \right) \right) - .025 = 0 : \\
 & \text{fsolve}(t, x) \\
 & 9.331903149
 \end{aligned}$$

مراجع

- [1] Aitchison, J. and Dunsmore, . R. (1975). Statistical Prediction Analysis, Cambridge University Press.
- [2] AL-Hussaini, E. K., Jaheen, Z. F. (1995). *Bayesian prediction bounds for the Burr type XII failure model*, Comm. Statist. (Theory & Meth). **24** , 1829- 1842.
- [3] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order statistics* , John wiley New York.
- [4] Arnold, B. C., and Press, S. J. (1989). *Bayesian estimation and prediction for Pareto data*. J. Amer. Statist. Assoc. **84** ,1079-1084.
- [5] Balakrishnan, N. (2007), *Progressive censoring methodology: an appraisal*. Test **16**(2), 211-259
- [6] Balakrishnan, N. and Basu, A. P. (1995). *The exponential distribution: Theory and methods and application* . Gordon and Breach publishers, USA.
- [7] Dunsmore, I. R. (1983). *The Future Occurrence of Records*, Ann. Inst. Statist. Math. **35** , 267-277.
- [8] Dunsmore, I. R. and Amin, Z. H. (1998). *Some prediction problems censoring samples from the Pareto distribution*. Comm. Statist. (Theory & Math.). **27**(5), 1221-1238.
- [9] David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2003). Order Statistics, third edition, John Wiley & Sons, New York.
- [10] Geisser, S. (1984). *Predicting Pareto and Exponential observables*. Canadian J. Statist. **12**, 143-152.

- [11] Geisser, S. (1985) *Interval prediction for Pareto and Exponential*. J.Econometrics. **29**, 173-185.
- [12] Geisser, S. (1993). *Predictive Inference: An Introduction*. Chapman & Hall, New York
- [13] Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley New York.
- [14] Nagaraja, H. N. (1995). *Prediction problems*, In: Basu, A. P. and Balakrishnan, N(Eds). *The exponential distribution: Theory and methods and application*. Gordon and Breach publishers, USA.
- [15] Nelson, W. B. (2004). *Applied Life Data Analysis*. John Wiley, New York.
- [16] Nigm, A. M. (1988). *Prediction bounds for the Burr model*. Comm. Statist. **17**, 289-297.
- [17] Nigm, A. M., Al-Hussaini, E. K. and Jaheen, Z. F. (2003). *Bayesian one sample prediction of future observations under Pareto distribution*. Statistics, **37**, 527-536.
- [18] Nigm, A. M. and Hamdy, H. I. (1987). *Bayesian prediction bounds for the Pareto lifetime model*. Comm. Statist. (Theory & Meth.), **16**, 1761-1772.