

توزیع توانی دو طرفه

هژیر حومئی^۱، مهناز غیور^۲، لیلا حسن زاده^۳

چکیده:

در این مقاله خانواده‌ای جدید از توزیع‌ها با کاربرد فراوان در مهندسی مالی، معرفی شده است. این توزیع شامل توزیع‌های مهم آماری مانند توزیع مثلی، توانی و یکنواخت است. ابتدا حالت خاصی از این توزیع در نظر گرفته شده و سپس ویژگی‌های مهم آن را بررسی نموده‌ایم. در پایان برآورد بیشینه درستنمایی را برای پارامترها به همراه مثال عددی ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع توانی، برآورد ماکسیمم تابع راستنمایی، آنتروپی.

۱ مقدمه

که در آن F_1, F_2, κ_i به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$F_2 = F(k_2 - n, k_1, k_2; -\frac{x(1-\theta)}{\theta-x})$$

$$F_1 = F(1 - k_1, n - k_2 + 1, n - k_1 + 1; -\frac{\theta(1-x)}{x-\theta}),$$

$$F(a, b, c; z) = K \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt,$$

$$k_1 = 1 \text{ اگر } \kappa_i = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k_i)\Gamma(n-k_i+1)}, \quad k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

و $k_2 = n$ باشد تابع چگالی $f(x|\theta, n)$ ، که در مهندسی مالی کاربرد

فراوان دارد به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n(\frac{1-x}{1-\theta})^{n-1} & \theta \leq x < 1. \end{cases}$$

در این مقاله قصد داریم برخی خواص این تابع چگالی را بررسی کنیم.

در بخش ۲، توزیع توانی دو طرفه استاندارد $STSP$ معرفی شده و

برخی از خواص مقدماتی این توزیع به طور خلاصه بررسی شده است. در

بخش ۳ در مورد برآورد MLE برای دو پارامتر توزیع $STSP$ بحث

شده است.

تحقیقات وسیع روی توزیع‌های چند ضابطه‌ای با تکیه‌گاه $(0, 1)$ از کار ناداراجا (۲۰۰۵) آغاز گردید. در بین تمام کارهای بسیاری که در این باره انجام شده است به وان دورپ (۲۰۰۲) و پریر (۲۰۰۵) اشاره می‌کنیم. در این سری مقالات، کاربرد، انعطاف پذیری و کارایی این توزیع‌ها به‌طور کامل بررسی گردیده است.

اخیراً به دنبال چنین توزیع‌هایی، توزیع جدیدی با نام $GTSP$ توسط سلطانی و حومئی (۲۰۰۹) معرفی گردیده است. شکل توزیع $GTSP$ اگرچه پیچیده است ولی حالت‌های خاص آن شامل توزیع‌های مهم آماری دیگر است.

تابع چگالی $GTSP$ ، $f(x|\theta, n, k_1, k_2)$ ، به شکل زیر تعریف شده است

$$\begin{cases} \kappa_2 \theta^{k_1-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{k_2-1} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-k_2} F_2, & 0 < x < \theta \\ \kappa_1 (1-\theta)^{n-k_2} \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-k_1} \left(\frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^{k_1-1} F_1, & \theta < x < 1 \end{cases}$$

^۱ گروه آمار دانشگاه تبریز

^۲ گروه آمار دانشگاه تبریز

^۳ گروه آمار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲ توزیع های توانی دوطرفه استاندارد

فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n(\frac{1-x}{1-\theta})^{n-1} & \theta \leq x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

آنگاه X را توزیع توانی دوطرفه استاندارد $STSP(\theta, n)$ ، $0 \leq \theta \leq 1$ و $n > 0$ می نامیم که در آن n لزوماً عدد صحیح نیست. برای $0 \leq \theta \leq 1$ و $n > 0$ ، چگالی (۱) تک مدی و مد آن برابر θ است. برای $0 < \theta < 1$ و $0 < n < 1$ ، شکل تابع چگالی، $-U$ شکل و مد آن برابر صفر یا یک است. به ازای $n = 1$ چگالی داده شده متناظر با توزیع یکنواخت $[0, 1]$ ، به ازای $n = 2$ متناظر با چگالی مثلثی در بازه $[0, 1]$ و به ازای $\theta = 1$ متناظر با توزیع توانی خواهد بود. با استفاده از (۱) تابع توزیع تجمعی توزیع $STSP(\theta, n)$ به شکل زیر به دست آمده است.

$$F(x|\theta, n) = \begin{cases} \theta(\frac{x}{\theta})^n & 0 < x \leq \theta \\ 1 - (1 - \theta)(\frac{1-x}{1-\theta})^n & \theta \leq x < 1. \end{cases} \quad (2)$$

۱.۲ گشتاورها

k امین گشتاور متغیر تصادفی $STSP(\theta, n)$ به شکل ساده زیر به دست

آمده است

$$E(X^k) = \frac{n\theta^{k+1}}{n+k} + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{k-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1} \quad (3)$$

بنابراین

$$E(X) = \frac{(n-1)\theta + 1}{n+1}. \quad (4)$$

با استفاده از (۳) و (۴) نتیجه می شود که

$$Var(X) = \frac{n-2(n-1)\theta(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2}. \quad (5)$$

میانگین توزیع $STSP$ ، معدل وزنی از کران پایین 0 و پارامتر مکانی θ و کران بالای 1 می باشد که در آن وزن ها فقط تابعی از n هستند. به ازای $n = 1$ ، (۴) برابر $\frac{1}{2}$ می شود که این همان میانگین توزیع یکنواخت $[0, 1]$ می باشد و به ازای $n > 1$ ، وزن بیشتر به مد θ و با افزایش n وزن های کمتری به کران های پایین صفر و بالای یک اختصاص داده می شود. زمانی که $n \rightarrow \infty$ میل می کند هیچ وزنی به کران ها اختصاص

داده نمی شود و میانگین برابر θ می شود و برای $n < 1$ ، با کم شدن n میانگین با دخالت θ کاهش می یابد. در حالت های حدی، $n \downarrow 0$ ، میانگین به $1 - \theta$ میل می کند.

توضیحات بالا را می توان با قضیه زیر دنبال کرد. سلطانی و حومئی [۲۰۰۹] ثابت کردند که

قضیه ۱.۲. برای عدد صحیح $n \geq 1$ ، $X \sim STSP(\theta, n)$ است اگر و تنها اگر

$$X \stackrel{d}{=} U_{(1)} + \theta(U_{(n)} - U_{(1)}), \quad 0 < \theta < 1.$$

که در آن $U_1, \dots, U_n$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ توزیع یکنواخت $[0, 1]$ ، $U_{(n)} = \max(U_1, \dots, U_n)$ و $U_{(1)} = \min(U_1, \dots, U_n)$ ، می باشد.

۲.۲ ویژگی های تابع توزیع تجمعی

مشابه توزیع بتا، توزیع $STSP$ نیز دارای ویژگی های به طور تصادفی صعودی و نزولی^۴ است.

قضیه ۲.۲. الف) تابع توزیع تجمعی (۲) به ازای $n > 1$ ، به طور تصادفی صعودی می باشد یعنی

$$\theta_1 < \theta_2, x \in (0, 1) \Rightarrow F(x | \theta_1, n) > F(x | \theta_2, n).$$

ب) تابع توزیع تجمعی (۲) به ازای $0 < n < 1$ ، به طور تصادفی نزولی می باشد یعنی

$$\theta_1 < \theta_2, x \in (0, 1) \Rightarrow F(x | \theta_1, n) < F(x | \theta_2, n).$$

اثبات. الف. فرض کنید $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ و $n > 1$ و $x \in (0, 1)$. آنگاه سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

$$0 < x < \theta_1. 1$$

$$\theta_2 < x < 1. 2$$

$$\theta_1 < x < \theta_2. 3$$

دو حالت اول به آسانی اثبات می شود، بنابراین فقط حالت ۳ را بحث می کنیم. از (۲) نتیجه می شود که

$$F(x | \theta_1, n) = 1 - \frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}}, F(x | \theta_2, n) = \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}}.$$

⁴Increasing and Decreasing Stochastically

اینکه $0 < \theta < 1$ و $n \rightarrow \infty$ میل کند، توزیع X به توزیع تباهیده در θ همگرا می‌شود. زمانی که $n \downarrow 0$ و $0 < \theta < 1$ باشد از (۳) نتیجه می‌شود که به ازای تمامی k ها $\lim_{n \downarrow 0} E(X^k) = (1 - \theta)$. در نتیجه زمانی که $n \downarrow 0$ ، $E(X^k)$ به گشتاورهای یک توزیع برنولی با جرم $1 - \theta$ در یک همگرا می‌شود. هر دوی X و متغیر تصادفی برنولی تکیه گاه متناهی دارند، بنابراین با استفاده از قضیه یکتایی برای توزیع‌های با تکیه گاه متناهی نتیجه می‌شود که توزیع برنولی با جرم $1 - \theta$ در یک، زمانی که $n \downarrow 0$ و $0 < \theta < 1$ ، توزیع حدی X است. این توزیع‌های حدی منطبق با توزیع‌های حدی توزیع بتا است و به عبارت دیگر انعطاف پذیری کلاس $STSP(\theta, n)$ قابل مقایسه با خانواده بتا می‌باشد. توزیع حدی جالب دیگری می‌تواند با استفاده از ویژگی خطی زیر به دست آید.

$$Y = (n - 1)A\left(\frac{X - \theta}{\theta}\right), \quad (8)$$

که در آن $A > 0$ یک ثابت مثبت دلخواه می‌باشد. از (۱) و (۸) نتیجه می‌شود که به ازای $n > 1$ ، $f(y | \theta, n, A)$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} \frac{n\theta}{(n-1)A} \left(1 + \frac{1}{(n-1)} \frac{Y}{A}\right)^{n-1} - (n-1)A < Y \leq 0 \\ \frac{n\theta}{(n-1)A} \left(1 - \frac{1}{(n-1)} \frac{\theta Y}{(1-\theta)A}\right)^{n-1} & 0 \leq Y < \frac{(1-\theta)(n-1)A}{\theta} \end{cases}$$

با فرض اینکه $n \rightarrow \infty$ میل می‌کند، داریم:

$$f(y | \theta, n, A) \rightarrow f(y | \theta, A) \quad \text{و} \quad f(y | \theta, n, A) \rightarrow f(y | \theta, A)$$

$$f(y | \theta, A) = \begin{cases} \frac{\theta}{A} \exp\left(\frac{Y}{A}\right) & Y \leq 0 \\ \frac{\theta}{A} \exp\left(-\frac{\theta}{1-\theta} \frac{Y}{A}\right) & Y \geq 0. \end{cases}$$

در نتیجه $f(y | \theta, n, A)$ به چگالی لاپلاس نامتقارن^۶ همگرا می‌شود که در آن جرم احتمالش صرف نظر از مقدار پارامتر A ، در 0 به θ و $1 - \theta$ جدا می‌شود.

۵.۲ رابطه آنتروپی

رابطه آنتروپی^۷ تابع چگالی احتمال پیوسته مطلق^۸ نسبت به تابع جرم احتمال $g(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$E(f : g | \Theta) = \int \log \frac{f(x | \Theta)}{g(x)} dF(y | \Theta), \quad (9)$$

^۵Distribution Degenerate

^۶Laplace Asymmetric

^۷Entropy Relative

^۸Continuous Absolute

برای $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ ، داریم

$$\theta_1 < x < \theta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta_1}{\theta_2} < \frac{x}{\theta_2} < 1, \\ 1 > \frac{1-x}{1-\theta_1} > \frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}. \end{cases} \quad (6)$$

با استفاده از (۶) به ازای $x \in (0, 1)$ ، $n > 1$ ، داریم

$$\begin{cases} 1 - x < 1 - x\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{n-1}, \\ (1-x)\left(\frac{1-x}{1-\theta_1}\right)^{n-1} < (1-x). \end{cases} \quad (7)$$

بنابراین،

$$\frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}} < 1 - \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}} \Leftrightarrow 1 - \frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}} > \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}},$$

بنابراین اثبات قسمت الف کامل می‌شود. □

۳.۲ ویژگی‌های صدک

فرض کنید x_p صدک $1-p$ باشد و $F(x_p | \theta, n) = p$. ویژگی‌های زیر می‌تواند برای برآورد پارامتر θ مورد استفاده قرار گیرد. ویژگی‌های ۳ و ۴ شامل دو رابطه جالب بین x_{1-p} و x_p می‌باشد.

ویژگی ۱: از تابع توزیع (۲) نتیجه می‌شود که: $x_p < p \Leftrightarrow p < \theta$

ویژگی ۲: به طور مشابه، با صرف نظر از مقدار n ، $x_p = \theta \Leftrightarrow p = \theta$

در نتیجه برای همه توزیع‌های $STSP$ جرم احتمال در θ به θ و $1 - \theta$ جدا می‌شود. ویژگی ۳: مقداری از p را در نظر بگیرید که در آن

$p < \min(\theta, 1 - \theta)$ باشد. با استفاده از (۲) و ویژگی ۱ داریم،

$$\frac{x_p^n}{\theta^{n-1}} = \frac{(1 - x_{1-p})^n}{(1 - \theta)^{n-1}} \Leftrightarrow \frac{x_p}{1 - x_{1-p}} = \left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

در نتیجه نسبت $\frac{x_p}{1 - x_{1-p}}$ برای $p < \min(\theta, 1 - \theta)$ ، به p وابسته نیست.

ویژگی ۴: به طور مشابه، برای $p > \max(\theta, 1 - \theta)$

$$\frac{x_{1-p}}{1 - x_p} = \left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

مستقل از p است.

۴.۲ توزیع‌های حدی

اگر $X \sim STSP(\theta, n)$ باشد با فرض اینکه $\theta = 0$ و $n \rightarrow \infty$ میل کند، از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که توزیع X به توزیع تباهیده^۵ در صفر همگرا می‌شود. به طور مشابه، با فرض اینکه $\theta = 1$ و $n \rightarrow \infty$ میل کند، توزیع X به توزیع تباهیده در یک همگرا و بالاخره با فرض

آماره‌های ترتیبی $X_{(1)} < \dots < X_{(s)}$ باشند. با استفاده از تعریف، تابع ماکسیمم درستمایی برای X به صورت زیر خواهد بود

$$L(X; \theta, n) = n^s \left\{ \frac{\prod_{i=1}^r X_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1 - X_{(i)})}{\theta^r (1 - \theta)^{s-r}} \right\}^{n-1}, \quad (12)$$

که در آن $X_{(s+1)} \equiv 1$ و $X_{(0)} \equiv 0$ و $X_r \leq \theta < X_{(r+1)}$ می‌باشد.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_s)$ یک نمونه تصادفی *i.i.d* از توزیع $STSP(\theta, n)$ باشد. برآوردگرهای MLE ، θ و n در (۱۲) به شکل زیر هستند

$$\begin{cases} \hat{\theta} = X_{(\hat{r})} \\ \hat{n} = -\frac{s}{\log \hat{M}(\hat{r})}, \end{cases} \quad (13)$$

که در آن $\hat{r} = \arg \max_{r \in \{1, \dots, s\}} M(r)$ و

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r)}}. \quad (14)$$

اثبات. با استفاده از (۱۲) داریم،

$$\max_{n > 0, 0 \leq \theta \leq 1} L(X; \theta, n) = \max_{n > 0} [n^s \cdot \hat{M}^{n-1}], \quad (15)$$

که در آن $\hat{M}$ به شکل زیر است.

$$\hat{M} = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left[\frac{\prod_{i=1}^r X_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1 - X_{(i)})}{\theta^r (1 - \theta)^{s-r}} \right], \quad (16)$$

و $X_{(s+1)} \equiv 1$ و $X_{(0)} \equiv 0$ و $X_r \leq \theta < X_{(r+1)}$ و در ادامه

$$\log[n^s \hat{M}^{n-1}] = (n-1) \log \hat{M} + s \log n, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dn} \log[n^s \hat{M}^{n-1}] = \log \hat{M} + \frac{s}{n}. \quad (18)$$

با برابر صفر قرار دادن معادله (۱۸)، $\hat{n} = -(\frac{s}{\log \hat{M}})$ می‌باشد. از

(۱۸) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dn} \log[n^s \hat{M}^{n-1}] > 0 \Leftrightarrow \hat{n} < -\frac{s}{\log \hat{M}}. \quad (19)$$

توجه کنید که به ازای $i < r$ ، $0 < \frac{X_{(i)}}{\theta} < 1$ و به ازای $i > r$ ، $0 < \frac{(1-X_{(i)})}{(1-\theta)} < 1$ است. در نتیجه، $0 < \hat{M} < 1$

⁹Where Almost Every

¹⁰and Retzer Soofi

این رابطه یک معیار اندازه گیری برای مقایسه اطلاع واقع در توزیع‌ها است.

از روی عبارت بالا به آسانی دیده می‌شود که $E(f : g|\Theta) \geq 0$ است و برابری برقرار می‌باشد اگر و تنها اگر در همه جا، $f(x|\Theta) = g(x)$ باشد.

ما اطلاعات واقع در توزیع‌های $STSP$ در بازه $[0, 1]$ را با اطلاعات واقع در توزیع یکنواخت $[0, 1]$ مقایسه می‌کنیم. رابطه آنتروپی توزیع‌های بتا نسبت به توزیع یکنواخت $[0, 1]$ قبلاً به وسیله سوفی و ورتزر^۹ [۴] مطالعه و بررسی شده و به نتایج زیر دست یافتند.

$$E(f : g|\alpha, \beta) = \log(B(\alpha, \beta)) - (\alpha - 1)(\psi(\alpha) - \psi(\alpha + \beta)) - (\beta - 1)(\psi(\beta) - \psi(\alpha + \beta))$$

که در آن

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad (10)$$

و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ و $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ و تابع چگالی احتمال یکنواخت $[0, 1]$ و $\psi(\cdot) = \Gamma'(\cdot)$ می‌باشد.

رابطه آنتروپی توزیع‌های $STSP$ نسبت به توزیع یکنواخت $[0, 1]$ با استفاده از (۱) و (۹) به صورت زیر خواهد بود

$$E(f : g|\theta, n) = \log n - \frac{n-1}{n}, \quad (11)$$

که در آن f چگالی $STSP$ داده شده با (۱) است. زمانی که $n = 1$ است به حداقل مقدار صفر می‌رسد و به ازای n ثابت صرف نظر از مقدار θ ثابت است یعنی هیچ اطلاعی از اطلاع واقع در توزیع $STSP$ با تغییر مقدار θ اضافه یا کم نشده است. در نتیجه رابطه آنتروپی توزیع مثلثی در بازه $[0, 1]$ صرف نظر از موقعیت θ برابر با $\log(2) - \frac{1}{n}$ می‌باشد. این موضوع خیلی ارزشمند است با توجه به اینکه توزیع $STSP$ به θ وابسته می‌باشد.

۳ روش MLE برای پارامترهای توزیع $STSP$

در این بخش روش MLE را برای برآورد پارامترهای $STSP$ بحث می‌کنیم. فرض کنید برای یک نمونه تصادفی $X = (X_1, \dots, X_s)$

$$0/420, 0/423, 0/413, 0/395, 0/340)$$

$$(0/588, 0/564, 0/513, 0/465, 0/429)$$

ماتریس $A = [a_{i,r}]$ را در نظر بگیرید که در آن

$$a_{i,r} = \begin{cases} \frac{x(i)}{x(r)} & i < r \\ \frac{1-x(i)}{1-x(r)} & i \geq r. \end{cases}$$

جدول ۱ خلاصه‌ای از محاسبه ماتریس A را برای آماره‌های ترتیبی $(X_{(1)}, \dots, X_{(s)})$ ارائه می‌دهد. ردیف آخر جدول شامل حاصلضرب عناصر واقع در r امین ستون ماتریس می‌باشد که برابر مقادیر $M(r)$ داده شده بوسیله (۲۷) می‌باشند. محاسبات عددی نتیجه می‌دهد که

$$\hat{\mu} = 0/304, \hat{r} = 5$$

$$\hat{\theta} = X_{(\hat{r})} = 0/423$$

$$\hat{n} = \frac{-10}{\log(\hat{M})} = 8/399$$

برآورد ماکسیمم درستمائی برای توزیع $X \sim STSP(\theta, n)$ می‌تواند به برآورد ماکسیمم درستمائی دو پارامتر برای $Z \sim TSP(a, m, b, n)$ که در آن $Z = (b-a)X + a$ می‌باشد، تبدیل شود. در اینجا پارامترهای a و b ثابت هستند و پارامتر $m = (b-a)\theta + a$ است.

تابع چگالی احتمال z را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z|a, m, b, n) = \begin{cases} \frac{n}{(b-a)} \left(\frac{z-a}{m-a}\right)^{n-1} & a < z \leq m \\ \frac{n}{(b-a)} \left(\frac{b-z}{b-m}\right)^{n-1} & m \leq z \leq b. \end{cases} \quad (28)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستمائی برای پارامترهای m و n در (۲۸) با استفاده از آماره‌های ترتیبی $(Z_{(1)}, \dots, Z_{(s)})$ به شکل زیر به دست آمده است

$$\begin{cases} \hat{m}(a, b) = Z_{(\hat{r}(a, b))} \\ \hat{n}(a, b) = -\frac{s}{\log M(a, b, \hat{r}(a, b))}, \end{cases} \quad (29)$$

که در آن همانند بالا

$$\hat{r}(a, b) = \arg \max_{r \in \{1, \dots, s\}} M(a, b, r), \quad (30)$$

و

$$M(a, b, r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{Z_{(i)} - a}{Z_{(r)} - a} \prod_{i=r+1}^s \frac{b - Z_{(i)}}{b - Z_{(r)}}. \quad (31)$$

و بنابراین $\hat{n} > 0$ می‌باشد. با استفاده از (۱۶) می‌توانیم بنویسیم

$$H(r) = \max_{X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}} \left[\frac{\prod_{i=1}^r X_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1 - X_{(i)})}{\theta^r (1 - \theta)^{s-r}} \right]. \quad (20)$$

ما به طور مجزا روی سه حالت زیر بحث می‌کنیم: $r \in \{1, \dots, s-1\}$ و $r = s$ و $r = 0$.

حالت $r \in \{1, \dots, s-1\}$: اینجا $X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}$ است. تابع $g(\theta) = \theta^r (1 - \theta)^{s-r}$ متناسب با چگالی بتای تک مدی^{۱۱} می‌باشد. بنابراین

$$\min_{X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}} g(\theta) = \min_{\theta \in \{X_{(r)}, X_{(r+1)}\}} g(\theta) \quad (21)$$

و از (۲۰) داریم،

$$H(r) = \max_{r' \in \{r, r+1\}} \prod_{i=1}^{r'-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r')}} \prod_{i=r'+1}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r')}}. \quad (22)$$

حالت $r = 0$: اینجا $0 \leq \theta \leq X_{(1)}$ است. از (۲۰) داریم،

$$H(0) = \max_{0 \leq \theta \leq X_{(1)}} \left[\prod_{i=1}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - \theta} \right]. \quad (23)$$

بنابراین

$$H(0) = \prod_{i=1}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(1)}} = \prod_{i=2}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(1)}}. \quad (24)$$

حالت $r = s$: اینجا $X_{(s)} \leq \theta \leq 1$ است. از (۲۰) داریم،

$$H(s) = \max_{X_{(s)} \leq \theta \leq 1} \left[\prod_{i=1}^s \frac{X_{(i)}}{\theta} \right]. \quad (25)$$

بنابراین

$$H(s) = \prod_{i=1}^s \frac{X_{(i)}}{X_{(s)}} = \prod_{i=1}^{s-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(s)}}. \quad (26)$$

از (۲۲)، (۲۴)، (۲۶) و (۲۶) نتیجه می‌شود که $\hat{M} = \max_{r \in \{1, \dots, s\}} M(r)$ است، که در آن

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r)}}. \quad (27)$$

باید به این نکته اشاره کنیم زمانی که $\hat{\theta} = X_{(\hat{r})}$ به $\hat{M}$ می‌رسد.

□

حال روش برآورد MLE برای توزیع $STSP(\theta, n)$ را با استفاده از آماره‌های ترتیبی ساختگی $(X_{(1)}, \dots, X_{(s)})$ زیر توضیح می‌دهیم.

جدول ۱. مثالی از برآورد MLE برای $STSP(\theta, n)$

r		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_{(r)}$		0.340	0.395	0.413	0.420	0.423	0.429	0.465	0.513	0.564	0.588
i	$X_{(i)}$										
1	0.340	1.000	0.861	0.823	0.810	0.804	0.793	0.731	0.663	0.603	0.578
2	0.395	0.917	1.000	0.956	0.940	0.934	0.921	0.849	0.770	0.700	0.672
3	0.413	0.889	0.970	1.000	0.983	0.976	0.963	0.888	0.805	0.732	0.702
4	0.420	0.879	0.959	0.988	1.000	0.993	0.979	0.903	0.819	0.745	0.714
5	0.423	0.874	0.954	0.983	0.995	1.000	0.986	0.910	0.825	0.750	0.719
6	0.429	0.865	0.944	0.973	0.984	0.990	1.000	0.923	0.836	0.761	0.730
7	0.465	0.811	0.884	0.911	0.922	0.927	0.937	1.000	0.906	0.824	0.791
8	0.513	0.738	0.805	0.830	0.840	0.844	0.853	0.910	1.000	0.910	0.872
9	0.564	0.661	0.721	0.743	0.752	0.756	0.764	0.815	0.895	1.000	0.959
10	0.588	0.624	0.681	0.702	0.710	0.714	0.722	0.770	0.846	0.945	1.000
$M_{(r)}$		0.134	0.252	0.293	0.303	0.304	0.299	0.239	0.159	0.093	0.068

مراجع

- [1] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N.(1994). *Continuous univariate distribution- 1* (2nd ed.), New York: Wiley.
- [2] Nadarajah, S.(2005). On the two-sided power distribution, *Metrika*, **61**, 309-321.
- [3] Perez, J.G., Rambaud, S.C., Garcia, L.G.(2005). The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT, *Stat. Methods Appl.*, **14**, 209-222.
- [4] Soofi, E.S. and Retzer, J.J.(2002). "Information indices: unification and applications," *Journal of Econometrics*, **107**, 17-40.
- [5] Soltani, A.R. and Homei, H.(2009). A generalization for two-sided power distributions and adjusted method of moments, *Statistics*, **43**, 611-620.
- [6] Van Dorp, J.R. and Kotz, S.(2002). The standard two-sided power distribution and its properties:with applications in financial engineering, *The Amer. Statist.*, **56**, 9099.
- [7] Van Dorp, J.R. and Kotz, S.(2002). A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation, *The Statistician*, **51**, 63-79.
- [8] Williams, T.M.(1992). "Practical use of distribution in network analysis, Practical use of distribution in network analysis," *Journal of Operations Research Society*, **43**, 265-270.