

آشنایی با فرآیند پواسون کسری

حمزه ترابی^۱، نرگس منتظری همدش^۲

چکیده:

یک فرآیند پواسون کسری بر اساس تعمیم کسری معادله کولموگروف-فلر ساخته شده است. در این مقاله، تغییر حالت از فرآیند پواسون استاندارد به تعمیم کسری آن، یعنی فرآیند پواسون کسری (fPp) مرور می‌شود. در این تعمیم یک پارامتر $\alpha \in (0, 1]$ به عنوان توان کسری فرآیند اضافه می‌شود. ارتباط fPp با توزیع‌های α -پایدار با حل یک معادله انتگرالی اثبات می‌شود. سرانجام الگوریتمی برای شبیه‌سازی fPp و بررسی ویژگی‌های آن ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع دلتای دیراک، تابع دلتای کرونکر، تابع میتگ-لفلر، توزیع‌های α -پایدار، فرآیند پواسون کسری، مشتق کسری ریمان-لیوویل، معادله کولموگروف-فلر.

۱ مقدمه

در این تعمیم‌ها علاوه بر پارامتر μ به عنوان پارامتر نرخ رشد، پارامتر $\alpha \in (0, 1]$ به عنوان توان کسری فرآیند اضافه می‌شود. با قرار دادن $\alpha = 1$ (fPp) به فرآیند پواسون استاندارد (بدون حافظه) تبدیل می‌شود. در واقع انگیزه اصلی معرفی فرآیندهای پواسون کسری تحلیل داده‌های تجربی با حافظه بلندمدت برای ساختن مدل پواسون انعطاف پذیرتر داری زمان‌های بین ورود غیرنمایی و دمه‌های کلفت‌تر است. با این وجود هزینه‌ای که شخص برای چنین انعطاف‌پذیری پرداخت می‌کند، از دست دادن ویژگی مارکوفی فرآیند پواسون است.

در این مقاله ابتدا مروری بر فرآیند پواسون استاندارد داشته سپس ساخت فرآیند پواسون کسری بیان شده است.

در حدود دو قرن، فرآیند پواسون با ویژگی عدم حافظه برای توزیع نمایی متناظر به عنوان ساده‌ترین و یکی از مهم‌ترین مدل‌های تصادفی مورد استفاده قرار گرفته است در حالی که در دنیای اطراف ما فرآیندهای زیادی با حافظه بلند مدت وجود دارند. بنابراین تعمیم فرآیند پواسون به نحوی که این فرآیندها را نیز شامل شود سودمند است. یک تعمیم خاص از فرآیند پواسون استاندارد که این ویژگی را دارد تعمیم کسری آن است. تاکنون انواع گوناگونی از فرآیندهای پواسون کسری^۳ (fPp) توسط چندین نویسنده مطالعه شده است. از آن جمله می‌توان به رپین و سایچف^۴ (۲۰۰۰)، لاسکین^۵ (۲۰۰۳) و مای‌ناردی^۶ (۲۰۰۴) اشاره کرد.

^۱عضو هیات علمی گروه آمار دانشگاه یزد

^۲دانشجوی دکتری آمار دانشگاه یزد

^۳Fractal Poisson process

^۴Repin and Saichev

^۵Laskin

^۶Mainardi

۲ فرآیند پواسون

با مشتق‌گیری نسبت به t از تابع مولد احتمال داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t} &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{\partial P_n(t)}{\partial t} \\ &= -\mu P_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u^n \mu [P_{n-1}(t) - P_n(t)] \\ &= \mu u \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} P_{n-1}(t) - \mu \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(t) \\ &= \mu(u-1)\varphi(u, t).\end{aligned}$$

با حل معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه اول بالا، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi(u, t) = \exp(\mu(u-1)t).$$

با استفاده از ویژگی تابع مولد احتمال داریم:

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \varphi(u, t)}{\partial u^n} \right|_{u=0} = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

اما چنان‌که می‌دانیم زمان انتظار مربوط به فرآیند پواسون نمایی است

چون:

$$F(t) = P(T \leq t) = P(N(t) > 0) = 1 - e^{-\mu t}.$$

بنابراین

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

تابع توزیع n امین زمان انتظار، $F_n(t)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_n(t) = P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^k}{k!},$$

که $S_n = T_1 + \dots + T_n$ زمان رخداد n امین پیشامد است. برای محاسبه چگالی n امین زمان انتظار، $f_n(t)$ ، داریم:

$$\begin{aligned}f_n(t) &= \frac{dF_n(t)}{dt} \\ &= e^{-\mu t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu (\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} - e^{-\mu t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu (\mu t)^k}{k!} \\ &= \frac{\mu e^{-\mu t} (\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}.\end{aligned}\quad (3)$$

تابع $f_n(t)$ ، به تابع چگالی ارلانگ معروف است.

توزیع پواسون و فرآیند پواسون در ارتباط با مطالعه دنباله‌های پیشامدهای تصادفی که در طول زمان رخ می‌دهند ظاهر می‌شوند. در واقع فرآیند پواسون یکی از مهم‌ترین انواع فرآیندهای شمارشی است. فرآیند پواسون به عنوان یک حالت خاص از فرآیند تجدید با توزیع زمان انتظار نمایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۰.۲. فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسون

با نرخ رشد μ ، $\mu > 0$ ، گوئیم، هرگاه

$$N(0) = 0.$$

۲. فرآیند دارای نمونه‌های مستقل باشد،

۳. تعداد پیشامدها در هر فاصله دلخواه به طول t دارای توزیع پواسون

با میانگین μt باشد یعنی، به ازای هر $s, t > 0$ ،

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

برای نمادگذاری ساده‌تر $P_n(t) := P(N(t) = n)$ را تعریف

می‌کنیم. برای $t = 0$ داریم؛ $P_0(0) = 1$ و $P_n(0) = 0$ برای

$n \neq 0$. بنابراین قرار می‌دهیم: $P_n(0) = \delta_{n,0}$ که $\delta_{n,a}$ تابع دلتای

کرونکر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{n,a} := \begin{cases} 0, & n \neq a \\ 1, & n = a \end{cases}$$

برای فرآیند پواسون استاندارد با نرخ رشد μ داریم:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \begin{cases} -\mu P_0(t), & n = 0 \\ \mu[P_{n-1}(t) - P_n(t)], & n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

معادله (۱) را می‌توان به فرم زیر خلاصه کرد:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu[P_{n-1}(t) - P_n(t)] + \delta_{n,0}\delta(t), \quad (2)$$

که $0 \leq t < \infty$ ، $P_{-1}(t) = 0$ و $\delta(t)$ ، تابع دلتای دیراک است که

به صورت $\delta(t) := \frac{t^{-1}}{\Gamma(0)}$ ، $t \geq 0$ تعریف می‌شود.

رابطه (۲) به معادله کولموگروف-فلر^۷ معروف است. برای یافتن

$P_n(t)$ از تابع مولد احتمال استفاده می‌کنیم. می‌دانیم تابع مولد احتمال

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(t).$$

⁷Kolmogorov-Feller

⁸Riemman-Liouville derivative

که $\delta(t)$ به دست آمده تعمیم تابع دلتای دیراک است و با جایگذاری $\alpha = 1$ به تابع دلتای دیراک تبدیل می‌شود. با جایگذاری $\delta(t)$ به دست آمده در معادله کولموگروف-فلر کسری (۴) داریم:

$${}_t D_t^\alpha P_n^\alpha(t) = \mu[P_{n-1}^\alpha(t) - P_n^\alpha(t)] + \delta_{n,0} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (6)$$

برای به دست $P_n^\alpha(t)$ از روش تابع مولد احتمال با ضرب کردن رابطه (۶) در u^n و جمع بستن روی n داریم:

$$\begin{aligned} {}_t D_t^\alpha \varphi_\alpha(u, t) &= {}_t D_t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n^\alpha(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \mu[P_{n-1}^\alpha(t) - P_n^\alpha(t)] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} \frac{u^n t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \mu u \sum_{n=0}^{\infty} u^{n-1} P_{n-1}^\alpha(t) \\ &\quad - \mu \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n^\alpha(t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \mu(u-1)\varphi_\alpha(u, t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

از تساوی‌های بالا یک معادله دیفرانسیل کسری به فرم زیر به دست می‌آید:

$${}_t D_t^\alpha \varphi_\alpha(u, t) = \mu(u-1)\varphi_\alpha(u, t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (7)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل کسری، از طرفین معادله (۷) تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\{{}_t D_t^\alpha \varphi_\alpha(u, t), s\} = L\{\mu(u-1)\varphi_\alpha(u, t) + \delta(t), s\}$$

با توجه به تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیویل و تابع دلتای دیراک تعمیم یافته داریم:

$$s^\alpha \tilde{\varphi}_\alpha(u, s) = \mu(u-1)\tilde{\varphi}_\alpha(u, s) + s^{\alpha-1},$$

که $\tilde{\varphi}_\alpha$ تبدیل لاپلاس تابع φ_α است. رابطه بالا ایجاب می‌کند که:

$$\tilde{\varphi}_\alpha(u, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \mu(u-1)}. \quad (8)$$

از طرفی تبدیل لاپلاس تابع میتگ-لفلر^۹ [۷] که به صورت $E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ تعریف می‌شود در نقطه s برابر است با:

$$L\{E_\alpha(\pm \mu t^\alpha), s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp \mu}, \quad |\mu| < s^\alpha.$$

۳ فرآیند پواسون کسری در مفهوم مشتق کسری ریمان-لیویل

لاسکین (۲۰۰۳) با شروع از معادله کولموگروف-فلر (۲) و با جایگزینی مشتق کسری ریمان-لیویل^۸ به جای مشتق معمولی و با تکرار مراحل ساخت فرآیند پواسون استاندارد، تابع جرم احتمال فرآیند پواسون کسری، $P_n^\alpha(t)$ را به دست آورد.

مشتق کسری ریمان-لیویل تابع $f(t)$ که با نماد ${}_t D_t^\alpha f(t)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_t D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

با جایگزینی مشتق کسری ریمان-لیویل در معادله کولموگروف-فلر (۲)، معادله کولموگروف-فلر کسری به صورت زیر به دست می‌آید:

$${}_t D_t^\alpha P_n^\alpha(t) = \mu[P_{n-1}^\alpha(t) - P_n^\alpha(t)] + \delta_{n,0} \delta(t), \quad (4)$$

که $0 \leq t < \infty$ و $P_{-1}^\alpha(t) = 0$. با توجه به ویژگی $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^\alpha(t) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} {}_t D_t^\alpha 1 &= {}_t D_t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_t D_t^\alpha P_n^\alpha(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\mu[P_{n-1}^\alpha(t) - P_n^\alpha(t)] + \delta_{n,0} \delta(t)\} \\ &= \mu \sum_{n=-1}^{\infty} P_n^\alpha(t) - \mu \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\alpha(t) + \delta(t) \\ &= \delta(t). \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از تعریف مشتق کسری ریمان-لیویل، طرف چپ معادله (۵) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} {}_t D_t^\alpha 1 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (u)^{-\alpha} du \quad (u = t - \tau) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

با مقایسه عبارت‌های ساده شده طرفین رابطه (۵) داریم:

$${}_t D_t^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \delta(t).$$

^۹Mittag-Leffler

بنابراین با توجه به ویژگی یکنمایی تبدیل لاپلاس، جواب معادله (۸) به صورت زیر است:

$$\varphi_\alpha(u, t) = E_\alpha(\mu t^\alpha(u-1)). \quad (9)$$

با استفاده از ویژگی تابع مولد احتمال و با جایگذاری رابطه (۹) داریم:

$$\begin{aligned} P_n^\alpha(t) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi_\alpha(u, t)}{\partial u^n} \Big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n E_\alpha(\mu t^\alpha(u-1))}{\partial u^n} \Big|_{u=0} \\ &= \frac{(\mu t^\alpha)^n}{n!} E_\alpha^{(n)}(-\mu t^\alpha), \end{aligned} \quad (10)$$

که $E_\alpha^{(n)}(z)$ مشتق مرتبه n ام تابع میتگ-لفراست [۷] و به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_\alpha^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)! z^k}{k! \Gamma(\alpha(k+n)+1)}. \quad (11)$$

سرانجام با جایگذاری $z = -\mu t^\alpha$ در رابطه (۱۱)، $P_n^\alpha(t)$ ، تابع جرم احتمال فرآیند پواسون کسری، به صورت زیر به دست می آید:

$$P_n^\alpha(t) = \frac{(\mu t^\alpha)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)! (-\mu t^\alpha)^k}{k! \Gamma(\alpha(k+n)+1)}. \quad (12)$$

برای بررسی کردن شرط نرمال $P_n^\alpha(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} P_n^\alpha(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha(k+n)+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha)^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{(-\mu t^\alpha)^{k-n}}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(\alpha k+1)} \sum_{n=0}^k \frac{(\mu t^\alpha)^n (-\mu t^\alpha)^{k-n}}{n! (k-n)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (\mu t^\alpha)^n (-\mu t^\alpha)^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha - \mu t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha)^k (1-1)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &= 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

برای محاسبه تابع چگالی زمان انتظار نمایی کسری، $f^\alpha(t)$ ، مشابه تابع چگالی نمایی با استفاده از ارتباط تابع توزیع نمایی کسری، $F^\alpha(t)$ ، با

$P_n^\alpha(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} F^\alpha(t) &= P(T \leq t) = P(N_\alpha(t) > 0) \quad (13) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = 1 - E_\alpha(-\mu t^\alpha). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f^\alpha(t) &= \frac{dF^\alpha(t)}{dt} = \mu \alpha t^{\alpha-1} E_\alpha^{(1)}(-\mu t^\alpha), \\ &= \mu t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}, \\ &= \mu t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\mu t^\alpha), \end{aligned}$$

که $E_\alpha^{(1)}(\cdot)$ با جایگذاری $n = 1$ در رابطه (۱۱) به دست آمده است و $E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ تابع میتگ-لفرد دو پارامتری [۷] است که با قرار دادن $\beta = 1$ به تابع میتگ-لفرد یک پارامتری تبدیل می شود.

توجه شود که با جایگذاری $\alpha = 1$ در $f^\alpha(t)$ ، تابع چگالی نمایی به دست می آید. تابع توزیع n امین زمان انتظار کسری، $F_n^\alpha(t)$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_n^\alpha(t) = P(N_\alpha(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu^n t^{\alpha n}}{n!} E_\alpha^{(n)}(-\mu t^\alpha),$$

برای محاسبه تابع چگالی n ام زمان انتظار کسری، $f_n^\alpha(t)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} f_n^\alpha(t) &= \frac{dF_n^\alpha(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu^k t^{\alpha k}}{k!} E_\alpha^{(k)}(-\mu t^\alpha) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha k \mu^k t^{\alpha k-1}}{k!} E_\alpha^{(k)}(-\mu t^\alpha) \\ &\quad - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu^k t^{\alpha k}}{k!} \mu \alpha t^{\alpha-1} E_\alpha^{(k+1)}(-\mu t^\alpha) \\ &= \frac{\alpha \mu^n t^{\alpha n-1}}{(n-1)!} E_\alpha^{(n)}(-\mu t^\alpha). \end{aligned}$$

تابع $f_n^\alpha(t)$ تعمیم تابع چگالی ارلانگ (۳) است.

$$M_{\alpha}(s, t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-sx} P_n^{\alpha}(t) = E_{\alpha}(\mu t^{\alpha}(e^{-s} - 1))$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\mu t^{\alpha}(e^{-s} - 1)]^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

با توجه به ویژگی تابع مولد گشتاور داریم:

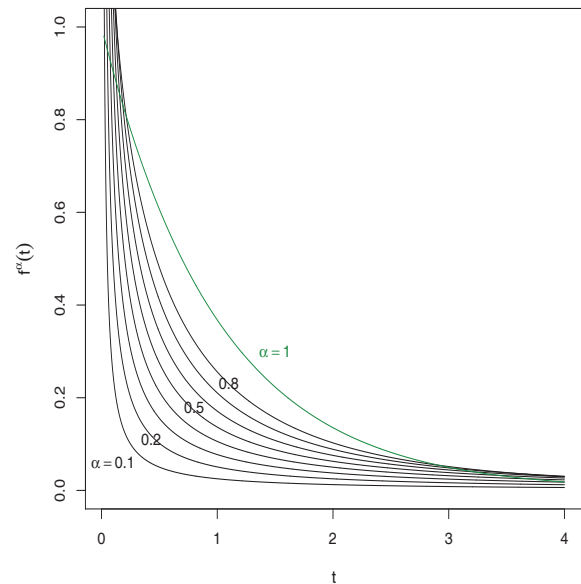
$$E[N_{\alpha}(t)]^n = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} M_{\alpha}(s, t) \Big|_{s=0}.$$

بنابراین امید و واریانس فرآیند پواسون کسری به ترتیب به صورت زیر به دست می آید

$$\mu_{N_{\alpha}(t)} = \frac{\mu t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

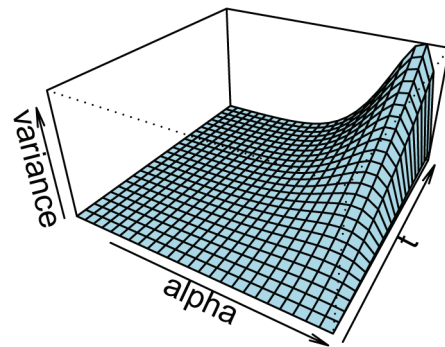
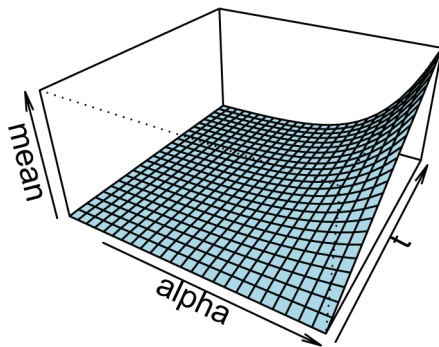
$$\sigma_{N_{\alpha}(t)}^2 = \frac{\mu t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \times \left\{ 1 + \frac{\mu t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \frac{\alpha \text{Beta}(\frac{1}{\alpha}, \alpha)}{2^{\alpha-1}} - 1 \right\} \right\}.$$

نمودار میانگین و واریانس فرآیند پواسون کسری برای $\mu = 1$ و بر حسب α و t های متفاوت در شکل (۲) رسم شده است.



شکل ۱. تابع چگالی نمایی کسری به ازای مقادیر مختلف α .

مشابه تابع مولد احتمال در رابطه (۹) تابع مولد گشتاور فرآیند پواسون کسری به صورت زیر به دست می آید [۴]:



شکل ۲. نمودار میانگین و واریانس فرآیند پواسون کسری به ازای $\mu = 1$

تعریف ۱.۳. تابع چگالی توزیع های α -پایدار یک طرفه، $0 < \alpha \leq 1$ که با نماد $g^{(\alpha)}(t)$ نشان می دهیم [۱۰] به صورت تبدیل لاپلاس زیر تعریف می شوند:

$$L\{g^{(\alpha)}, s\} = \int_0^{\alpha} e^{-st} g^{(\alpha)}(t) dt = e^{-s^{\alpha}}. \quad (14)$$

فرم تابع چگالی توزیع های α -پایدار (به جز چند حالت خاص) به صورت صریح وجود ندارد. برای محاسبات عددی، فرمول انتگرالی

۱.۳ شبیه سازی فرآیند پواسون کسری

برای شبیه سازی فرآیند پواسون کسری ابتدا زمان انتظار کسری را شبیه سازی می کنیم. کاهوی^{۱۰} [۹، ۱] برای شبیه سازی زمان انتظار کسری، از ارتباط تابع بقای زمان انتظار کسری با تابع میتگ-لفلر دو پارامتری و سپس ارتباط مهم تابع میتگ-لفلر با توزیع های α -پایدار استفاده کرده است. در این بخش ابتدا تعریف توزیع های α -پایدار و سپس مبحث شبیه سازی بیان می شود.

¹⁰Cahoy

زیر برای تابع چگالی توزیع‌های α -پایدار مناسب است:

$$g^{(\alpha)}(t) = \frac{\alpha t^{1/(\alpha-1)}}{\pi(1-\alpha)} \times \int_0^\pi \exp\{-t^{\alpha/(\alpha-1)}Q(u)\} Q(u) du, \quad (15)$$

که

$$Q(u) = \left(\frac{\sin(\alpha u)}{\sin u}\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\sin((1-\alpha)u)}{\sin(\alpha u)}\right).$$

گشتاورهای تابع $g^{(\alpha)}(t)$ یا تبدیل ملین تابع $g^{(\alpha)}(t)$ در نقطه s برابر است با:

$$\int_0^\infty t^s g^{(\alpha)}(t) dt = \begin{cases} \frac{\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1-s)}, & -1 < s < \alpha \\ \infty, & s \geq \alpha, \end{cases} \quad (16)$$

کانتر^{۱۱} [۳] با پذیرش تابع چگالی (۱۵)، الگوریتمی برای شبیه‌سازی توزیع‌های α -پایدار به‌دست آورد.

لم ۲.۳. فرض کنید U_1 و U_2 متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ و S_α یک متغیر تصادفی از تابع چگالی α -پایدار (۱۵) باشند، آنگاه برای $\alpha \in (0, 1)$

$$S_\alpha \stackrel{d}{=} \frac{\sin(\alpha\pi U_1) [\sin((1-\alpha)\pi U_1)]^{\frac{1}{\alpha}-1}}{[\sin(\pi U_1)]^{\frac{1}{\alpha}} |\ln U_2|^{\frac{1}{\alpha}-1}}. \quad (17)$$

اثبات. برای اثبات می‌توان به مرجع [۳] مراجعه کرد. برای شبیه‌سازی زمان انتظار کسری، ابتدا در لم زیر ارتباط تابع میتگ-لفلر با توزیع‌های α -پایدار بیان شده است. □

لم ۳.۳. تابع میتگ-لفلر

$$E_\alpha(-\mu t^\alpha) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

می‌تواند به فرم زیر بیان شود:

$$\int_0^\infty e^{-\mu t^\alpha/\tau^\alpha} g^{(\alpha)}(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (18)$$

که $g^{(\alpha)}(t)$ چگالی توزیع α -پایدار رابطه (۱۴) است.

اثبات. با توجه به بسط تابع نمایی داریم:

$$e^{-\mu\tau^\alpha/\tau^\alpha} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} (-\mu t^\alpha/\tau^\alpha)^k, \quad (19)$$

همچنین با توجه به تبدیل ملین توزیع‌های α -پایدار (۱۶) و با قرار دادن $s = -\alpha k$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{-\alpha k} g^{(\alpha)}(\tau) d\tau &= \frac{\Gamma(1-(-\alpha k)/\alpha)}{\Gamma(1+\alpha k)} \\ &= \frac{k!}{\Gamma(1+\alpha k)}, \end{aligned} \quad (20)$$

با جایگذاری (۱۹) در (۱۸) و استفاده از رابطه (۲۰) داریم:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\mu t^\alpha/\tau^\alpha} g^{(\alpha)}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} (-\mu t^\alpha/\tau^\alpha)^k g^{(\alpha)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{k!} \int_0^\infty \tau^{-\alpha k} g^{(\alpha)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(1+\alpha k)} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\mu t^\alpha)^k}{\Gamma(1+\alpha k)} E_\alpha(-\mu t^\alpha). \end{aligned}$$

با استفاده از لم بالا و با توجه به تعریف تابع توزیع زمان انتظار کسری (۱۳)، تابع بقای زمان انتظار کسری به‌فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(T > t) &= 1 - F^\alpha(t) = E_\alpha(-\mu t^\alpha) \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu t^\alpha/\tau^\alpha} g^{(\alpha)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

□

قضیه ۴.۳. فرض کنید متغیر تصادفی T دارای تابع بقای رابطه (۲۱) باشد، در این صورت

$$T \stackrel{d}{=} \frac{|\ln U|^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} S_\alpha,$$

که S_α یک متغیر تصادفی از $g^{(\alpha)}(t)$ و U دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ است و S_α از U مستقل‌اند.

اثبات. فرض می‌کنیم $T' = \frac{|\ln U|^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} S_\alpha$ ، با استفاده از قانون احتمال کل و با تغییر متغیر $\tau = \frac{1}{\mu} |\ln u| = -\frac{1}{\mu} \ln(u)$ و استفاده از رابطه (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} P(T' > t) &= P\left(\frac{|\ln U|^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} S_\alpha > t\right) \\ &= \int_0^1 P\left(S_\alpha > \frac{t\mu^{1/\alpha}}{(-\ln(u))^{1/\alpha}}\right) du \\ &= \int_0^\infty P\left(S_\alpha > \frac{t}{\tau^{1/\alpha}}\right) \mu e^{-\mu\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu\tau} \int_{t/\tau^{1/\alpha}}^\infty g_\alpha(s) ds d\tau \\ &= \int_0^\infty g_\alpha(s) \int_{t/s^\alpha}^\infty \mu e^{-\mu\tau} d\tau ds \\ &= \int_0^\infty g_\alpha(s) e^{-\mu t^\alpha/s^\alpha} ds \\ &= E_\alpha(-\mu t^\alpha) = P(T > t). \end{aligned}$$

¹¹Kanter

یک برآورد طبیعی برای $\sigma_{1,2}$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}_{1,2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{\alpha i}(t_1) N_{\alpha i}(t_2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{\alpha i}(t_1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{\alpha i}(t_2)$$

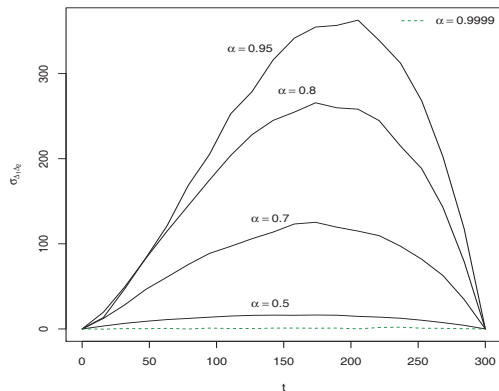
و در نتیجه یک برآورد طبیعی برای $\sigma_{N_{\alpha}(t_1)}^2$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}_{N_{\alpha}(t_1)}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{\alpha i}(t_1)^2 - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{\alpha i}(t_1) \right\}^2$$

با استفاده از برآوردهای $\sigma_{1,2}$ و $\sigma_{N_{\alpha}(t_1)}^2$ یک برآورد برای $\sigma_{\Delta_1, \Delta_2}$ به دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}_{\Delta_1, \Delta_2} = \hat{\sigma}_{1,2} - \hat{\sigma}_{N_{\alpha}(t_1)}^2.$$

با استفاده از شبیه‌سازی $N_{\alpha}(t)$ می‌توان مقدار برآورد کواریانس را به دست آورد. شکل (۳) برآورد کواریانس نمودارهای fPp وقتی $t_1 \rightarrow t_2$ و $t_2 = 300$ را برای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد. با توجه به شکل و مخالف صفر بودن کواریانس نمودار، وابستگی نمودار در فرآیند پواسون کسری نتیجه می‌شود.



شکل ۳. نمودار ساختار وابستگی نمودار در فرآیند پواسون کسری.

برای بررسی نالیستایی نمودارهای fPp باز از تکنیک شبیه‌سازی استفاده شده است. زمان‌های $t_1 = 600$ ، $t_2 = 1200$ ، $t_3 = 1800$ و $t_4 = 2400$ را در نظر گرفته و توزیع نمودار

$$\{N_{\alpha}(t_1) - N_{\alpha}(0)\}, \{N_{\alpha}(t_2) - N_{\alpha}(t_1)\},$$

$$\{N_{\alpha}(t_3) - N_{\alpha}(t_2)\}, \{N_{\alpha}(t_4) - N_{\alpha}(t_3)\},$$

را برآورد می‌کنیم. در هر یک از بازه‌های $(0, 600]$ ، $(600, 1200]$ ،

$(1200, 1800]$ و $(1800, 2400]$ که دارای طول برابر هستند، ۵۰۰۰

□

بنابراین $T' \stackrel{d}{=} T$ است [۲].

گام آخر در شبیه‌سازی زمان انتظار کسری T ، شبیه‌سازی S_{α} است. با جایگذاری شبیه‌سازی S_{α} بر حسب الگوریتم کانتر [۳] از رابطه (۱۷) و با استفاده از قضیه ۳.۴ نتیجه زیر به دست می‌آید:

لم ۵.۳. فرض کنید U_1, U_2 و U_3 متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع

یکنواخت روی $(0, 1)$ هستند. در این صورت

$$T \stackrel{d}{=} \frac{|\ln U_2|^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\alpha \pi U_1) [\sin((1-\alpha)\pi U_1)]^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\mu^{\frac{1}{\alpha}} [\sin(\pi U_1)]^{\frac{1}{\alpha}} |\ln U_2|^{\frac{1}{\alpha}-1}}$$

هنگامی که $\alpha = 1$ ، داریم:

$$T \stackrel{d}{=} \frac{|\ln U|}{\mu},$$

آنگاه T به توزیع نمایی با میانگین $1/\mu$ تبدیل می‌شود.

برای شبیه‌سازی یک مقدار تصادفی از $N_{\alpha}(t)$ ، با توجه به رابطه‌ی

$$N_{\alpha}(t) = \max\{n | S_n \leq t, n = 0, 1, \dots\},$$

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $T_1, T_2, \dots$ تولید می‌کنیم تا جایی که در این صورت $\sum_{i=1}^{n+1} S_n = T_i > t$ و $\sum_{i=1}^n S_n = T_i \leq t$ قرار می‌دهیم:

$$N_{\alpha}(t) = n.$$

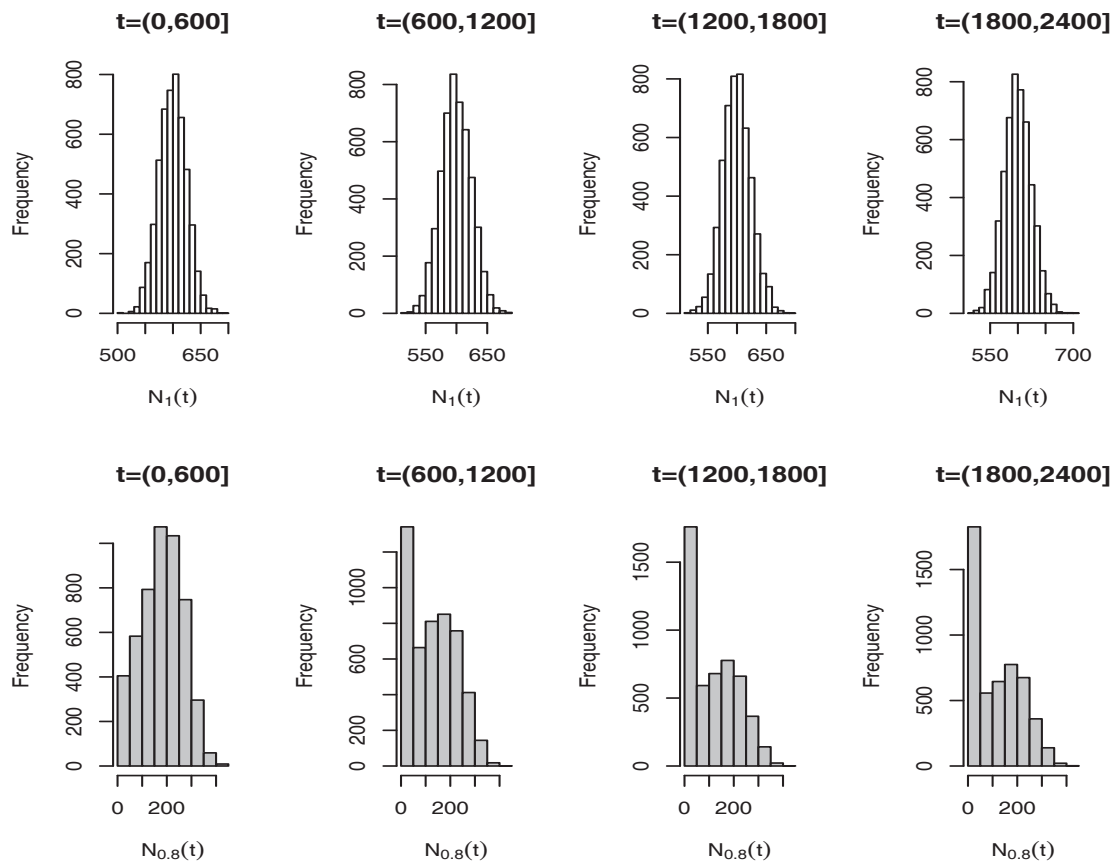
۴ نمودارهای وابسته و نالیستا در فرآیند پواسون کسری

در این بخش ساختار وابستگی و نالیستایی نمودارهای fPp بررسی می‌شود [۱]. در یک فرآیند شمارشی نمودار فاصله (t_1, t_2) به صورت $N(t_2) - N(t_1)$ تعریف می‌شود. کواریانس بین دو بازه $(0, t_1]$ و $(t_1, t_2]$ که $t_1 < t_2$ را که با نماد $\sigma_{\Delta_1, \Delta_2}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_1, \Delta_2} &= \text{Cov}\{N_{\alpha}(t_1) - N_{\alpha}(0), N_{\alpha}(t_2) - N_{\alpha}(t_1)\} \\ &= \text{Cov}\{N_{\alpha}(t_1), N_{\alpha}(t_2) - N_{\alpha}(t_1)\} \\ &= E[N_{\alpha}(t_1)N_{\alpha}(t_2)] - E[N_{\alpha}(t_1)]E[N_{\alpha}(t_2)] \\ &\quad - (E[N_{\alpha}(t_1)^2] - E[N_{\alpha}(t_1)]^2) \\ &= \text{Cov}\{N_{\alpha}(t_1), N_{\alpha}(t_2)\} - \text{Var}(N_{\alpha}(t_1)) \\ &= \sigma_{1,2} - \sigma_{N_{\alpha}(t_1)}^2 \end{aligned}$$

با طول برابر هم توزیع هستند و در نتیجه فرآیند دارای نمونه‌های ایستاست. در مقابل برای $\alpha = 0.8$ نمونه‌های با طول برابر هم توزیع نیستند که نشان از ویژگی نایستایی نموده‌ها در fPp است.

مقدار تصادفی از fPp شبیه‌سازی و هیستوگرام اعداد شبیه‌سازی شده را رسم می‌کنیم. این هیستوگرام‌ها برای چهار بازه زمانی به‌ازای $\alpha = 1, 0.8, 0.6, 0.4$ در شکل (۳) رسم شده است. در سطر اول شکل (۴) برای $\alpha = 1$ (فرآیند پواسون استاندارد) مشاهده می‌شود نمونه‌های



شکل ۴. نمودار توزیع نمونه‌های فرآیند پواسون کسری به‌ازای $\alpha = 1, 0.8$

برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای α و μ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{3(\widehat{\sigma_{\ln T}^2} + \pi^2/6)}}, \quad \hat{\mu} = \exp(-\hat{\alpha} [\widehat{\mu_{\ln T}} + C])$$

که

$$\widehat{\sigma_{\ln T}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln T_i - \widehat{\mu_{\ln T}})^2, \quad \widehat{\mu_{\ln T}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln T_i,$$

و $C = 0.5772$ ثابت اولر است.

۵ برآورد پارامترهای فرآیند پواسون کسری

برای ساختن مدل fPp قابل استفاده در مسائل کاربردی، برآورد دو پارامتر ظاهر شده در مدل الزامی است. کاهوی و همکاران [۲] یک شیوه برآورد ساختاری با استفاده از روش گشتاوری پارامترهای fPp را برآورد کرده‌اند.

همان‌طور که برای دربخش شبیه‌سازی در قضیه (۱) بیان شد برای

شبیه‌سازی زمان انتظار کسری داریم:

$$T = \frac{|\ln(U)|^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} S(\alpha),$$

با گرفتن لگاریتم از رابطه بالا و محاسبه $E[\ln(T)]$ و $E[\ln(T)]^2$

۶ نتیجه گیری

با شبیه سازی این فرآیند نامانایی نموها و همبستگی نموهای این فرآیند نتیجه شد.

در این مقاله به معرفی فرآیند پواسون کسری به عنوان تعمیمی از فرآیند پواسون معمولی پرداخته شد. روشی برای یافتن تابع چگالی زمان انتظار آن و همچنین شبیه سازی خود فرآیند پواسون کسری ارائه شد. در نهایت

مراجع

- [1] Cahoy, D.O. (2007). *Fractional Poisson process in terms of alpha-stable densities*. Ph.D. Dissertation, Case Western Reserve University.
- [2] Cahoy, D.O., Uchaikin, V.V. and Woyczynski, W.A. (2010). Parameter estimation for fractional Poisson processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 3106-3120.
- [3] Kanter, M. (1975). Stable densities under change of scale and total variation inequalities. *The Annals of Probability*, **3**, 697-707.
- [4] Laskin, N. (2003). Fractional Poisson process. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **8**, 201-213.
- [5] Mainardi, F., Gorenflo, R. and Scalas, E. (2004). A fractional generalization of the Poisson processes. *Vietnam Journal of Mathematics*, **32**, 53-64.
- [6] Mainardi, F., Gorenflo, R. and Vivoli, A. (2005). Renewal processes of Mittag-Leffler and Wright type. *Fractional Calculus and Applied Sciences*, **8**, 7-38.
- [7] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego.
- [8] Repin, O.N. and Saichev, A. I. (2000). Fractional Poisson law. *Radiophysics and Quantum Electronics*, **43(9)**, 738-741.
- [9] Uchaikin, V.V., Cahoy, D.O. and Sibatov, R.T. (2008). Fractional processes: from Poisson to branching one. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **18**, 1-9.
- [10] Zolotarev, V. M. (1986). *One-dimensional Stable Distributions: Translations of Mathematical Monographs*, 65, American Mathematical Society, USA.