

## معیارهای وضوح تعمیم‌یافته و کمینه انحراف تعمیم‌یافته برای مقایسه طرح‌های کسری نامنظم

فهیمه براتی<sup>۱</sup> و احمد نورالله<sup>۲</sup>

چکیده:

یکی از مسائل اساسی که در استفاده از طرح‌های کسری دنبال می‌شود، چگونگی انتخاب طرح بهینه از میان طرح‌های کسری دارای تعداد اجرای برابر است. معیار وضوح، عمومی‌ترین معیار برای مقایسه طرح‌های کسری منظم است. این مقاله به معرفی معیار وضوح تعمیم‌یافته، که تعمیم مفهوم وضوح به حوزه طرح‌های کسری نامنظم است، می‌پردازد. این معیار، ملاک مناسبی برای رتبه‌بندی طرح‌های کسری نامنظم است. هم‌چنین از آن جایی که وضوح تعمیم‌یافته طرح‌های کسری منظم با وضوح این‌گونه طرح‌ها برابر است از معیار وضوح تعمیم‌یافته می‌توان برای مقایسه طرح‌های کسری منظم و نامنظم با تعداد اجرای برابر نیز استفاده نمود. مزیت دیگر معیار وضوح تعمیم‌یافته این است که ایده‌ای را برای معرفی معیار کمینه انحراف تعمیم‌یافته به دست می‌دهد که معیار اخیر، تعمیم معیار کمینه انحراف است. در خلال مباحث مثال‌هایی برای تشریح کاربرد معیارهای معرفی شده، ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** اختلاط، الگوی طول واژه، تصویرسازی، تعامل، کمینه انحراف، وضوح.

### ۱ مقدمه

نامتعامد نیز کاربرد دارند. مقصود از یک طرح کسری متعامد، طرحی است که تعداد عناصر  $+1$  و  $-1$  در هر ستون ماتریس آن یکسان هستند و هم‌چنین در هر زیرماتریس  $2 \times n$  از ماتریس مورد اشاره، چهار ترکیب  $(+1,+1)$ ,  $(+1,-1)$ ,  $(-1,+1)$  و  $(-1,-1)$  به تعداد دفعات برابر در قالب سطرها، ظاهر می‌گردند.

طرح‌های کسری به دو دسته منظم و نامنظم تقسیم می‌شوند. یک طرح کسری را منظم می‌نامند اگر بتوان آن را با استفاده از روابط معرف تعریف کرد. طرح‌های کسری منظم دوستophysی الگوی همان‌ثروی ساده‌ای دارند که

طرح‌های عاملی کسری با عوامل دوستophysی کاربرد وسیعی در آزمایش‌های غربال‌ساز و دیگر بررسی‌های علمی دارند. به منظور نمایش یک طرح کسری  $n$  اجرایی برای مطالعه  $m$  عامل دوستophysی، معمولاً از یک ماتریس  $X_{(n \times m)}$  شامل نشانه‌های  $+1$  و  $-1$  استفاده می‌شود. در این‌گونه ماتریس‌ها هر ستون متناظر با یک عامل، هر نشانه یک سطح عاملی و هر سطر نشان دهنده یک ترکیب از سطوح عاملی است. در این مقاله بیشتر طرح‌های کسری متعامد مد نظر قرار می‌گیرند. لیکن معیارهای معرفی شده برای مقایسه‌ی طرح‌های کسری

<sup>۱</sup>کارشناس ارشد آمار، دانشگاه اصفهان  
<sup>۲</sup>عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه اصفهان

متعددی معرفی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به معیارهای وضوح تعمیم‌یافته<sup>۷</sup> و کمینه انحراف تعمیم‌یافته<sup>۸</sup> [۲]، معیار کمینه انحراف<sup>۹</sup>  $G_2$  [۸] و معیار کمینه انحراف<sup>۱۰</sup>  $MDS$  [۴]، اشاره کرد. این مقاله به معرفی معیارهای بیشینه وضوح تعمیم‌یافته و کمینه انحراف تعمیم‌یافته [۲] می‌پردازد. این دو معیار به ترتیب تعمیم معیارهای بیشینه وضوح و کمینه انحراف هستند.

قسمت‌های مختلف مقاله حاضر به شرح زیر تنظیم شده است. در بخش (۲) به معرفی معیار وضوح تعمیم‌یافته برای طرح‌های کسری نامنظم می‌پردازم و در بخش (۳) توجیه آماری استفاده از این معیار برای مقایسه طرح‌های کسری نامنظم را ارائه می‌نماییم. در بخش (۴) نیز به معرفی معیار کمینه انحراف تعمیم‌یافته خواهیم پرداخت. در خلال مباحث مطرح شده، مثال‌هایی را برای روشن شدن کاربرد معیارهای معرفی شده ارائه خواهیم کرد. برای حل این مثال‌ها از برنامه‌نویسی در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است.

## ۲ اختصاص وضوح به طرح‌های کسری نامنظم

از نقطه نظر تصویری یک طرح منظم دارای وضوح<sup>r</sup> است اگر در تصویر آن بر روی هر  $-1$  عامل همهٔ  $1 - r$  ترکیبات  $(1 - r)$ -تایی از عناصر  $+1$  و  $-1$  به تعداد دفعات مساوی در قالب سطرها ظاهر شوند. مقصود

طبق آن هر دو اثر عاملی یا متعامدند و یا کاملاً هم‌اثر می‌باشند. تعداد اجرایا در این گونه طرح‌ها برابر توانی از ۲ است. در مقابل، طرح‌های کسری نامنظم دارای الگوی هم‌اثری پیچیده هستند به این معنی که در این طرح‌ها اثراتی وجود دارد که نه کاملاً هم‌اثر و نه متعامدند. تعداد اجرایا در طرح‌های کسری نامنظم متعامد مضربی از ۴ است. طرح‌های پلاکت—برمن<sup>۱۱</sup> [۶] و طرح‌هایی که با استفاده از ماتریس‌های هادامارد<sup>۱۲</sup> ساخته می‌شوند (طرح‌های هادامارد) مثال‌هایی از طرح‌های کسری نامنظم هستند.

یکی از مسائل اساسی که در استفاده از طرح‌های کسری دنبال می‌شود چگونگی انتخاب طرح بهینه از میان طرح‌های دارای تعداد اجرای مساوی است. معیار بیشینهٔ وضوح<sup>۵</sup> عمومی ترین معیار برای مقایسهٔ طرح‌های کسری منظم است. وضوح یک طرح کسری منظم برابر طول کوتاهترین واژه در رابطه معرف آن طرح، تعریف می‌شود [۱]. طرح‌های دارای وضوح کمتر، واژه‌های معرف کوتاهتری دارند که به تبع آن اثرات مراتب پایین‌تر در آن‌ها هم‌اثر می‌شوند. از طرفی با توجه به اصل سلسله مراتبی بودن اثرات، اثرات مراتب پایین‌تر شناسی بیشتری برای معنی دار بودن دارند. بنابراین انتخاب طرحی که موجب هم‌اثری اثرات مراتب پایین می‌شود مطلوب نیست.

برای انتخاب طرح‌های نامنظم نیز تاکنون معیارهای

Plackett-Burman designs<sup>۳</sup>

Hadamard matrices<sup>۴</sup>

Resolution<sup>۵</sup>

Generalized resolution<sup>۶</sup>

Generalized minimum aberration<sup>۷</sup>

$G_2$  Minimum aberration<sup>۸</sup>

MDS Minimum aberration<sup>۹</sup>

## تعریف می‌کنیم

$$J_k(S) = |j_k(S)| = \left| \sum_{i=1}^n x_{ih_1} x_{ih_2} \cdots x_{ih_k} \right|, \quad (1)$$

که در آن  $|A|$  نماد قدر مطلق است. واضح است که در طرح‌های متعماد  $J_1(S) = J_2(S) = J_1$  خواهد بود. حال طرح، منظم یا نامنظم،  $D$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $r$  کوچک‌ترین عدد صحیحی باشد که برای آن  $\max_{|S|=r} J_r(S) > 0$  است، که در اینجا  $|S|$  نشان دهنده تعداد اعضای مجموعه  $S$  است. همچنین  $\max_{|S|=r} J_r(S)$  برابر مقدار بیشینه  $J_r(S)$  در بین همه مجموعه‌های شامل  $r$  ستون از  $X$  می‌باشد. وضوح تعمیم‌یافته  $D$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$GR(D) = r + [1 - \frac{\max_{|S|=r} J_r(S)}{n}]. \quad (2)$$

از آنجایی که برای همه مقادیر  $r$   $0 \leq J_r(S) \leq n$  است،  $1 \leq GR(D) \leq r+1$  می‌باشد. همچنین با توجه به این که در طرح‌های متعماد  $J_1(S) = J_2(S) = 0$  است، در این‌گونه طرح‌ها  $GR(D) \geq 3$ . با استفاده از معیار بیشینه وضوح تعمیم‌یافته، طرح‌های دارای وضوح تعمیم‌یافته بالاتر ترجیح داده می‌شوند.

در صورتی که طرح  $D$  یک طرح منظم باشد،  $J_k(S)$  برای  $S = \{x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_k}\}$  هرزبر مجموعه  $k$  عضوی است. همچنین برای  $0 \leq k \leq m$  نشان دهنده ستون متعلق به عامل  $j$  است. همچنین برای  $0 \leq k \leq m$  و هرزبر مجموعه  $k$  عضوی  $J_k(S) = \{x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_k}\}$  از ستون‌های  $X$ ، مقدار  $S = \{x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_k}\}$  را که ابرازی اساسی در تعریف معیارهای وضوح متناظر با  $k$  ستون عضو  $S$  یک واژه معرف به طول  $k$

از تصویر یک طرح عاملی  $m$ -عاملی بر هرزبر مجموعه  $p$ -عضوی از عوامل آن زیر طرحی است که با حذف  $m-p$  عامل دیگر طرح به دست می‌آید.

برای تعمیم مفهوم وضوح در طرح‌های نامنظم از منظر تصویری وضوح طرح‌های منظم استفاده می‌کنیم. به این ترتیب می‌توان گفت که یک طرح عاملی نامنظم دارای وضوح تعمیم‌یافته  $r$  است اگر در تصویر آن بر روی هر  $1-r$  عامل همه  $2^{r-1}$  ترکیبات  $(1-r)^{r-1}$ -تایی از عناصر  $+1$  و  $-1$  به تعداد دفعات مساوی در قالب سطرها ظاهر شوند. بنابراین یک طرح کسری نامنظم با وضوح تعمیم‌یافته  $r$  یک آرایه متعماد  $1^r$  دو سطحی با توان  $1-r$  خواهد بود. (یک آرایه متعماد دو سطحی با توان  $t$  یک ماتریس شامل عناصر  $+1$  و  $-1$  است که در هر زیرماتریس شامل  $t$  ستون از آن، همه  $2^t$  ترکیب  $t$ -تایی از عناصر  $+1$  و  $-1$  به تعداد دفعات مساوی در قالب سطرها، ظاهر می‌شوند).

پیش از معرفی مفهوم وضوح تعمیم‌یافته، به معرفی برخی از نمادهای به کار رفته در این مقاله، می‌پردازیم. یک طرح عاملی  $n \times m$  منظم یا نامنظم، را با نماد  $D$  نمایش می‌دهیم و ماتریس این طرح را به صورت  $[x_1, x_2, \dots, x_m] = X$  در نظر می‌گیریم که در آن  $(x_{ij})^T = x_{ij} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ ،  $i = 1, \dots, m$ ،  $j = 1, \dots, n$  است. نشان دهنده ستون متعلق به عامل  $j$  است. همچنین برای  $0 \leq k \leq m$  و هرزبر مجموعه  $k$  عضوی  $J_k(S) = \{x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_k}\}$  از ستون‌های  $X$ ، مقدار  $S = \{x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_k}\}$  را که ابرازی اساسی در تعریف معیارهای وضوح تعمیم‌یافته و کمینه انحراف تعمیم‌یافته است، به شکل زیر

Orthogonal array<sup>۱۰</sup>

سه طرح تصویر مورد اشاره را به ترتیب می‌توان با تصویر طرح  $PB_{20}$  بر روی ستون‌های  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ ،  $\{1, 2, 3\}$  و  $\{1, 2, 3, 16\}$  به دست آورد. به دلیل این که سه طرح تصویر یادشده متعامد هستند مقادیر  $(J_1(S))$  و  $(J_2(S))$  در آن‌ها برابر صفر است. مقدار  $(max_{|S|=7} J_3(S))$  نیز برای دو طرح  $PB_{20-4.1}$  و  $PB_{20-4.2}$  برابر ۴ و برای طرح  $PB_{20-4.2}$  برابر ۱۲ به دست می‌آید. بنابراین مطابق رابطه (۲) مقدار وضوح تعمیم‌یافته طرح های  $PB_{20-4.1}$  و  $PB_{20-4.2}$  برابر ۳، ۸ و مقدار وضوح تعمیم‌یافته طرح  $PB_{20-4.2}$  نیز برابر ۳، ۴ است. بنابراین از منظر معیار بیشینه وضوح تعمیم‌یافته دو طرح  $PB_{20-4.1}$  و  $PB_{20-4.2}$  برتر از طرح  $PB_{20-4.2}$  هستند.

### ۳ توجیه آماری استفاده از وضوح تعمیم‌یافته

برای ساده شدن بررسی دلیل استفاده از معیار وضوح تعمیم‌یافته بحث زیر را ارائه می‌کنیم. فرض کنید در آزمایشی قصد داریم اثرات اصلی عوامل را برآورد کنیم اما بنابر دلایلی قادر نیستیم از یک طرح دارای وضوح تعمیم‌یافته برابر ۴ یا بالاتر استفاده کنیم. همچنین فرض کنید بنابر اطلاعات قبلی مطمئن هستیم که اثرات متقابل سه‌عاملی و مراتب بالاتر ناچیزند اما گمان می‌کنیم که بعضی از اثرات متقابل دو عاملی معنی دار هستند. سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که نادیده گرفتن اثرات متقابل دو عاملی معنی دار در مدل برآش داده شده

تشکیل می‌دهند. بنابراین در این حالت اثر اصلی متناظر با هر یک از ستون‌های عضو  $S$  با اثر متقابل  $k - 1$ -ستون دیگر کاملاً هم‌اشراست. به این ترتیب در طرح‌های منظم  $max_{|S|=r} J_r(S) > 0$  به معنی این است  $max_{|S|=r} J_r(S) = n$  می‌باشد. در نتیجه اگر در طرح منظم  $D$ ، کوچکترین عدد صحیحی باشد که برای آن  $max_{|S|=r} J_r(S) > 0$  است، آنگاه طول کوتاهترین واژه معرف  $D$  برابر  $r$  خواهد بود ولذا طبق تعریف وضوح  $D$  نیز برابر  $r$  می‌باشد. همچنین با توجه به رابطه (۲)،  $GR(D) = r + [1 - \frac{n}{r}] = r$  نیز برابر  $r$  وضوح تعمیم‌یافته  $D$  خواهد بود. بنابراین وضوح تعمیم‌یافته طرح‌های منظم برابر وضوح این طرح‌ها است.

در مثال زیر معیار وضوح تعمیم‌یافته برای مقایسه زیر طرح‌های ناهم‌ارز  $4 \times 20$  طرح پلاکت-برمن با  $20$  اجرا ( $PB_{20}$ ) به کار رفته است. دو ماتریس  $n \times m$  هم‌ارز می‌نامند اگر بتوان هر یک را با استفاده از جایگشت سطرها، جایگشت ستون‌ها و (یا) تغییر سطوح یک یا چند عامل ماتریس دیگر به دست آورد. طرح‌های  $D_1$  و  $D_2$  به ترتیب با ماتریس‌های طرح  $X_1$  و  $X_2$  نیز در صورتی هم‌ارز هستند که  $X_1$  و  $X_2$  هم‌ارز باشند.

**مثال ۱** ماتریس طرح  $PB_{20}$  به دست آمده از ترتیب چرخشی بردار سطحی زیر را در نظر بگیرید

$$( +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, -1, +1, \\ -1, +1, -1, -1, -1, +1, +1, -1 )$$

طبق یافته‌های لین و دراپر [۵] طرح  $PB_{20}$  دارای سه تصویر ناهم‌ارز  $4 \times 20$  است که آن‌ها را به ترتیب با  $PB_{20-4.1}$ ،  $PB_{20-4.2}$  و  $PB_{20-4.3}$  نمایش می‌دهیم.

که در آن  $\sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik}x_{il} = \sum_{j \in J_3(x_j, x_k, x_l)} x_{ij}$  است. واضح است که  $|J_3(x_j, x_k, x_l)| = \beta_{kl}$ . بنابراین یک راه برای کمینه کردن اربی بی ایجادشده به دلیل وجود  $\beta_{kl}$ -ها در برآورد  $\beta_{jl}$ -ها کمینه کردن مقدار  $\max_{j < k < l} J_3(x_j, x_k, x_l)$  است که این امر با انتخاب طرح دارای بیشینه وضوح تعمیم یافته، معادل است. زیرا مطابق رابطه (۲)،  $GR(D) = r + [1 - \frac{\max_{|S|=J_3(S)}}{n}]$  است و از این رو طرح دارای بیشینه وضوح تعمیم یافته در بین طرح های  $D$  با  $4 < GR(D) \leq 3$ ، طرحی است که مقدار  $\max_{j < k < l} J_3(x_j, x_k, x_l)$  در آن کمینه باشد. بنابراین طرح دارای بیشینه وضوح تعمیم یافته از طریق کمینه کردن مقدار  $\max_{j < k < l} J_3(x_j, x_k, x_l)$  اربی بی  $\max_{j < k < l} J_3(x_j, x_k, x_l)$  برآورده راهی اثرات اصلی که از نادیده گرفتن اثرات متقابل دو عاملی معنی دار ناشی می شود را کمینه خواهد کرد.

بر روی داده ها چه تأثیری بر روی برآورد اثرات اصلی می گذارد؟

برای پاسخ به سؤال فوق طرح متعامد  $D$  را با  $4 < GR(D) \leq 3$  در نظر بگیرید و فرض کنید که  $X_{(n \times m)}$  ماتریس طرح بادشده باشد. مدل شامل اثرات اصلی  $m$  عامل مشمول در طرح  $D$  به صورت زیر نوشته می شود

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

که در آن  $y_i$  مقدار مشاهده شده متغیر پاسخ در اجرای  $i$ -ام بوده،  $\beta_j$  اثر ثابت مدل است و  $\beta_j$ -ها برای  $j = 1, 2, \dots, m$  پارامترهای متناظر با اثرات اصلی  $m$  عامل طرح هستند. با استفاده از روش کمترین مربعات خطأ برآورده هر یک از پارامترهای  $\beta_j$  در مدل رابطه (۳) به شکل زیر به دست می آید

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i. \quad (4)$$

از طرفی با فرض معنی دار بودن بعضی از اثرات متقابل دو عاملی، مدل صحیح به صورت زیر خواهد بود

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij} + \sum_{k < l} \beta_{kl} x_{ik} x_{il} + \varepsilon_i, \quad (5)$$

که در آن  $\beta_{kl}$  در آن نشان دهنده پارامتر متناظر با اثر متقابل بین دو عامل  $k$  و  $l$  است.

تحت مدل صحیح (مدل رابطه (۵))، امید ریاضی  $\hat{\beta}_j$  در رابطه (۴) برای  $j = 1, 2, \dots, m$  به صورت زیر به دست می آید

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j + \frac{1}{n} \sum_{k < l} j_3(x_j, x_k, x_l) \beta_{kl},$$

## ۴ معیار کمینه انحراف تعمیم یافته

فرایزو هانتر [۳] معیار کمینه انحراف را برای تشخیص بهتر طرح های بهینه از میان طرح های کسری منظم پیشنهاد کردند. این معیار با استفاده از الگوی طول واژه طرح های منظم تعریف می شود. فرض کنید  $A_i$  واژه طرح های منظم تعداد واژه های با طول  $i$  در رابطه معرف نشان دهنده  $A_i$  باشد. در این صورت بردار یک طرح کسری منظم  $A = (A_3, \dots, A_m)$  را می شود.

تعريف ۱ دو طرح کسری منظم مانند  $D_1$  و  $D_2$ ، را به ترتیب با الگوی طول واژه  $(D_1)$  و  $(D_2)$  در نظر

می‌شوند و این رویه تا زمانی که بتوان طرح بهینه را از بین دو طرح  $D_1$  و  $D_2$  تشخیص داد، ادامه می‌یابد.

ایده مطرح شده فوق را می‌توان با استفاده از بردار فراوانی اختلاط<sup>۱۱</sup>، که در حقیقت تعمیم الگوی طول و اره طرح‌های منظم است، گسترش داد. پیش از ارائه تعریف بردار فراوانی اختلاط، مایلیم از مقادیر معنکن ( $S_{jk}(S)$ ) اطلاع پیدا کنیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که مقادیر  $J_k(S)$  در طرح‌های متعامد الزاماً مضربی از  $\frac{r}{4}$  است.

قضیه ۱ برای هر  $k$  ستون از ماتریس یک طرح عاملی متعامد شامل  $n$  اجرا و  $m$  عامل دوسری، مقادیر  $S_{jk}(S)$  برابر مضربی از  $\frac{r}{4}$  هستند [۲].

برای مشاهده اثبات این قضیه می‌توان به دنگ و تانگ [۲] مراجعه نمود.

اکنون طرح متعامد  $D$  را با  $t = n - k$  اجرا و  $m$  عامل دوسری در نظر بگیرید و فرض کنید  $f_{kj}$  برای  $j = 1, 2, \dots, t, t+1$  نشان‌دهنده تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی  $S$  از ستون‌های ماتریس طرح  $D$  باشد که برای آن‌ها  $(j)_{jk}(S) = \frac{r}{4}(t+1-j)$  است. از آن جایی که تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی از ستون‌های ماتریس طرح  $D$  برابر  $\binom{m}{k}$  است،  $\sum_{j=1}^{t+1} f_{kj} = \binom{m}{k}$  خواهد بود و لذا کافی است تنها مقادیر  $f_{kj}$  را برای  $j = 1, 2, \dots, t$  در نظر بگیریم. همچنین به دلیل این که در طرح‌های متعامد  $J_1(S) = J_2(S) = 0$  می‌باشد در این طرح‌ها برای  $t = 1, 2, \dots, t$   $f_{1j} = f_{2j} = 0$  است. بنابراین در طرح‌های متعامد تنها مقادیر  $f_{kj}$  را برای  $k \geq 3$

بگیرید و فرض کنید  $r$  کوچک‌ترین عدد صحیحی باشد که برای آن  $A_r(D_2) < A_r(D_1)$  است. در این صورت گفته می‌شود طرح  $D_1$  دارای انحراف کمتری نسبت به طرح  $D_2$  است اگر  $A_r(D_2) < A_r(D_1)$  باشد. همچنین اگر هیچ طرح  $2^{f-q}$  دیگری با انحراف کمتر از  $D_1$  وجود نداشته باشد،  $D_1$  طرح دارای کمینه انحراف خواهد بود.

برای رتبه‌بندی طرح‌های نامنظم  $D_1$  و  $D_2$  با وضوح تعمیم‌یافته برابر نیز می‌توان از ایده‌ای مشابه با ایده به کاررفته در معیار کمینه انحراف، استفاده نمود. برای این منظور، دو طرح نامنظم  $D_1$  و  $D_2$  را با وضوح تعمیم‌یافته  $1 \leq GR(D_1) < r + 1 \leq GR(D_2)$  در نظر بگیرید. برابری وضوح تعمیم‌یافته دو طرح مورد اشاره متنضم‌ن این مطلب است که میزان  $J_r(S)$  در آن دو طرح برابر است. حال واضح است، در صورتی که فراوانی تعداد زیرمجموعه‌های  $r$ -عضوی  $S$  از ستون‌های ماتریس طرح  $D_1$  که به مقدار  $J_r(S)$  دست پیدا می‌کند کمتر از فراوانی تعداد این زیرمجموعه‌ها در طرح  $D_2$  باشد، طرح  $D_1$  بر طرح  $D_2$  ترجیح داده می‌شود. اگر فراوانی تعداد زیرمجموعه‌های مورد اشاره در دو طرح  $D_1$  و  $D_2$  یکسان باشد، دومین مقدار بزرگ  $J_r(S)$  دو طرح با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در این صورت اگر دومین مقدار بزرگ  $J_r(S)$  در طرح  $D_1$  کوچک‌تر از دومین مقدار بزرگ  $J_r(S)$  در طرح  $D_2$  باشد،  $D_1$  بر طرح  $D_2$  ترجیح داده می‌شود. اگر دومین مقدار  $J_r(S)$  نیز در دو طرح مورد اشاره یکسان باشد، فراوانی تعداد زیرمجموعه‌های  $r$ -عضوی  $S$  از ستون‌های ماتریس آن دو که به دومین مقدار بزرگ  $J_r(S)$  دست پیدا می‌کند با یکدیگر مقایسه

Confounding frequency vector<sup>۱۱</sup>

کنید  $D_1$  و  $D_2$ ، برای  $t = 1, 2, \dots, (m-2)$ ، کنید  $f_l(D_1)$  و  $f_l(D_2)$ ، برای  $t = 1, 2, \dots, (m-2)$ ، به ترتیب نشان دهنده  $l$ -امین عنصر بردار فراوانی اختلاط طرح های  $D_1$  و  $D_2$  باشند. همچنین فرض کنید  $r$  کوچکترین عدد صحیحی باشد که برای آن  $f_r(D_1) \neq f_r(D_2)$  است. به این ترتیب، در صورتی که  $f_r(D_1) < f_r(D_2)$  باشد، گفته می شود طرح  $D_1$  انحراف تعیین یافته کمتری نسبت به طرح  $D_2$  دارد. همچنین اگر هیچ طرحی با انحراف تعیین یافته کمتری نسبت به طرح وجود نداشته باشد،  $D_1$  طرح دارای کمینه انحراف تعیین یافته نامیده می شود.

واضح است که با توجه به یکسانی بردار فراوانی اختلاط و الگوی طول واژه در طرح های منظم، معیار کمینه انحراف تعیین یافته در این طرح ها همان معیار کمینه انحراف خواهد بود.

مثال ۲ همان گونه که در مثال (۱) بیان شد، طرح های  $PB_{20-4.2}$  و  $PB_{20-4.1}$  دارای وضوح تعیین یافته یکسان و برای  $3, 8$  هستند. بنابراین برای مقایسه این دو طرح می توانیم از معیار کمینه انحراف تعیین یافته استفاده کنیم. بردارهای فراوانی اختلاط دو طرح  $PB_{20-4.1}$  و  $PB_{20-4.2}$  به شکل زیر هستند:

$$\mathbf{F}(PB_{20-4.2}) = [[(0, 0, 0, 0, 0, 4), (0, 0, 1, 0, 0, 0)], [(0, 0, 0, 0, 0, 4), (0, 0, 0, 0, 0, 1)]].$$

زیرنویس های  $3$  و  $4$  در دو بردار بالا به ترتیب نشان دهنده گروه های فراوانی  $f_{3j}$  و  $f_{4j}$ ،  $j = 1, 2, \dots, 5$  هستند، که گروه فراوانی  $k$  نشان دهنده گروهی از فراوانی هایی است که توسط زیرمجموعه های  $k$ -عضوی از ستون های

مدنظر قرار می دهیم. اکنون با توجه به مطالب فوق، بردار فراوانی اختلاط طرح  $D$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۲ بردار فراوانی اختلاط برای طرح متعامد  $D$  با  $n = 4t$  اجرا و  $m$  عامل دو سطحی، یک بردار سطری با  $(m-2)t$  است که به شکل زیر نوشته می شود:

$$F = [(f_{31}, \dots, f_{3t}), (f_{41}, \dots, f_{4t}), \dots, (f_{m1}, \dots, f_{mt})].$$

بردار فراوانی اختلاط نیز همانند الگوی طول واژه طرح های منظم، اطلاعات مهمی در ارتباط با نحوه اختلاط اثرات ارائه می کند. در حقیقت بردار فراوانی اختلاط، تعیین الگوی طول واژه طرح های منظم به کل طرح های عاملی است. شایان توجه است که بردار فراوانی اختلاط طرح های منظم دقیقاً همان الگوی طول واژه آن ها خواهد بود. زیرا همان گونه که پیش از این اشاره کردیم، مقدار  $J_k(S)$  برای هر زیرمجموعه  $k$ -عضوی از ستون های ماتریس یک طرح منظم برابر صفر یا  $n$  است ولذا در این طرح ها برای  $t = 2, 3, \dots, r$ ،  $f_{kj} = 0$  می باشد و  $f_{k1}$  نشان دهنده تعداد واژه های معرف به طول  $k$  است. به این ترتیب بردار فراوانی اختلاط یک طرح منظم یک بردار  $(m-2)$ -بعدی به صورت  $(f_{31}, f_{41}, \dots, f_{m1})$  است که عیناً همان الگوی طول واژه طرح مذکور می باشد.

حال ایده مطرح شده برای مقایسه طرح های دارای وضوح تعیین یافته یکسان که در ابتدای این قسمت به آن اشاره شد را با استفاده از بردار فراوانی اختلاط و به عنوان معیار کمینه انحراف تعیین یافته، گسترش می دهیم.

تعریف ۳ طرح های متعامد  $D_1$  و  $D_2$  را با  $n = 4t$  اجرا و  $m$  عامل دو سطحی در نظر بگیرید و فرض

مورد اشاره با فرض ناچیز بودن اثرات شامل  $\frac{(r+2)}{3}$  عامل و اثرات مراتب بالاتر از آن، قادر است همه اثرات شامل  $\frac{(r-2)}{3}$  عامل و اثرات مراتب پایین تر از آن را برآورد نماید. برای مثال جدول (۱) نشان دهنده ترانهاده ماتریس طرح نامتعادم  $D_1$  است که توسط طالبی و اسماعیل زاده [۷] معرفی شده است. میزان وضوح تعمیم یافته  $D_1$  برابر  $GR(D_1) = 1,833$  به دست می‌آید. بنابراین انتظار داریم این طرح با فرض ناچیز بودن اثرات متقابل، حداکثر قادر به برآورد تعدادی از اثرات اصلی چهار عامل دخیل در طرح، باشد. لیکن با فرض ناچیز بودن اثرات متقابل سه عاملی و مراتب بالاتر،  $D_1$  امکان برآورد کلیه شش اثر متقابل دو عاملی بین چهار عامل را در کنار اثرات اصلی  $\frac{(r+1)}{3}$  عامل و اثرات مراتب بالاتر، توانایی برآورد همه اثرات شامل  $\frac{(r-1)}{3}$  عامل و اثرات مراتب پایین تر از آن را دارا است. همچنین در صورتی که وضوح یک طرح منظم برابر عدد صحیح زوجی مانند ۲ باشد، طرح

ماتریس طرح ایجاد می‌شود. بنابراین با استفاده از معیار کمینه انحراف تعمیم یافته، طرح ۴.۱  $PB_{20-4.1}$  برتر از طرح ۴.۳  $PB_{20-4.3}$  تشخیص داده می‌شود.

## ۵ بحث

برخلاف معیار وضوح در طرح‌های کسری منظم، معیار وضوح تعمیم یافته در طرح‌های کسری نامنظم قادر به آشکار ساختن میزان توانایی این طرح‌ها در برآورد اثرات عاملی نیست. از نقطه نظر توانایی برآورد اثرات، اگر وضوح یک طرح منظم برابر یک عدد صحیح فرد مانند ۱ باشد، آن‌گاه این طرح تحت فرض ناچیز بودن اثرات شامل  $\frac{(r+1)}{3}$  عامل و اثرات مراتب بالاتر، توانایی برآورد همه اثرات شامل  $\frac{(r-1)}{3}$  عامل و اثرات مراتب پایین تر از آن را دارا است. همچنین در صورتی که وضوح یک طرح منظم برابر عدد صحیح زوجی مانند ۲ باشد، طرح

جدول ۱. ترانهاده ماتریس طرح  $D_1$ .

اجراها													عامل‌ها
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۱	۱
-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	2	2
-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	3	3
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	4	4

اریبی برآورد گرهای اثرات اصلی که از نادیده گرفتن اثرات متقابل دو عاملی معنی‌دار ناشی می‌شود را کمینه خواهد کرد. بنابراین معیار بیشینه وضوح تعمیم یافته معیار مناسبی برای مقایسه طرح‌های کسری نامنظم است. با ارائه مثالی نشان داده شد که ممکن است این

## ۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله با معرفی معیارهای وضوح تعمیم یافته و کمینه انحراف تعمیم یافته، با ارائه مثال‌هایی از طرح‌های کسری نامنظم آن‌ها را مقایسه و رتبه‌بندی کردیم. از نقطه نظر آماری، طرح دارای بیشینه وضوح تعمیم یافته،

برای مقایسه طرح‌های کسری منظم و نامنظم با تعداد اجرای برابر نیز به کار برد. در پایان این مقاله ارائه طرحی که ضمن برخورداری از ظرفیت بالا برای برآورد اثرات اصلی و متقابل دوعلاملی، دارای میزان وضوح تعیین‌یافته‌ای کمتر از ۲ است، روش می‌سازد که این معیار هنوز کامل نیست. از این روبرای ساختن و اصلاح معیاری که بتواند ظرفیت برآورده این طرح‌ها را واقعی تر بیان کند نیاز به تحقیق بیشتری وجود دارد.

معیار قادر به تمایز بین دو طرح نیاشد. از این رو ضرورت استفاده از معیار دقیق‌تری احساس می‌شود. ملاک کمینه انحراف تعیین‌یافته می‌تواند این خلأ را پر نماید. در اینجا نشان داد شد که ملاک اخیر در تشخیص طرح برتر، کارساز است. لازم به ذکر است، از آن جایی که وضوح تعیین‌یافته و الگوی فراوانی اختلاط طرح‌های کسری منظم به ترتیب با وضوح و الگوی طول واژه این گونه طرح‌ها معادل هستند، معیارهای معرفی شده را می‌توان

## مراجع

- [1] Box, G. E. P and Hunter, J. S. (1961). The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs. *Thechnometrics*, 3, 311-351; 449-458.
- [2] Deng, L. Y and Tang, B. (1999). Generalized and minimum aberration criteria for Plackett-Burman and other nonregular factorial designs. *Statistica sinica*, 9, 1071-1082.
- [3] Fries, A. and Hunter, W. G. (1980). Minimum aberration  $2^{k-p}$  designs. *Thechnometrics*, 22, 601-608.
- [4] Lin, C. D., Miller, A. and Sitter, R. R. (2008). Folded Over Non-orthogonal designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, Issue 10, 3107-3124.
- [5] Lin, D. K. J. and draper, N. R. (1992). projection properties of Plackett and Burman designs. *Thechnometrics*, 34, 423-428.
- [6] Plackett, R. L. and Burman, J. P. (1946). The design of optimum multi-factorial experiments. *Biometrika*, 33, 305-325.

- [7] Talebi, H. and Esmaeilzadeh, N. (2009). Weighted Search Probability for Classes of Equivalent Search Designs Comparison. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 40(4), 635-647.
- [8] Tang, B. and Deng, L. Y. (1999). Minimum  $G_Y$ -aberration for nonregular fractional factorial designs. *The Annals of Statistics*, 27, 1914-1926.