

خواص توزیع‌های تک‌مدی و برخی کاربردهای آن

مهدی علیمحمدی^۱ و محمد حسین علامت‌ساز^۲

چکیده:

مفهوم تک‌مدی برای هر دو نوع توزیع‌های گستته و پیوسته تعریف شده است و هر یک تفسیر جداگانه‌ای دارد. با پیشرفت نظریه توزیع‌ها، تک‌مدی به تک‌مدی قوی و نیز^۳—تک‌مدی تعمیم داده شد و از آن پس توجه زیادی را به خود جلب کرد. در این مقاله ابتدا این مفاهیم را به همراه چند مشخصه‌سازی مرور می‌کنیم. به دلیل اهمیت متغیرهای تصادفی مرتب‌شده در بسیاری از شاخه‌های آمار، این خواص را در این نوع متغیرها نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس در راستای تکمیل این نتایج، یک مثال نقض ارائه خواهیم کرد که نشان می‌دهد این نتایج برای تمام مقادیر پارامترهای مدل نمی‌تواند برقرار باشد. در پایان چند کاربرد این مباحث را در آمار و قابلیت اعتماد بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های ترتیبی، آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، تحدب، تک‌مدی، قابلیت اعتماد، قوی^۴ تک‌مدی، مشخصه‌سازی،^۵ تک‌مدی.

۱ مقدمه

یکی از اهداف این مقاله، شناساندن مفهوم تک‌مدی و ارائه برخی از کاربردهای آن است. در اکثر کتاب‌ها، به خاصیت تک‌مدی توزیع‌ها توجه زیادی نمی‌شود. امیدواریم این مقاله نشان دهد که مفهوم تک‌مدی فراتر از آن است که بگوئیم منحنی ابتدا بالا رفته و سپس پایین می‌آید. شکل توزیع‌ها در مسائل آماری با توجه به ماهیت ساختاری آن‌ها متفاوت است. واضح است که یک آماردان برای مقایسه دو توزیع که از یک نوع نیستند، ممکن است با مشکل مواجه شود، اما اگر هر دو ساختار یکسانی داشته باشند، به عنوان مثال هر دو تک‌مدی باشند، بُعد این مشکل کاهش می‌یابد. همچنین مانند

بررسی توزیع‌های تک‌مدی^۶ از اواخر قرن نوزدهم در ارتباط با تقریب چگالی تک‌مدی با توابع تک‌مدی مشابه در نظریه بهینه‌سازی آغاز شد. سپس با پیشرفت نظریه توزیع‌ها، انواع تعمیم‌یافته این توزیع‌ها مانند توزیع‌های تک‌مدی قوی^۷ و^۸—تک‌مدی و مشتقات آن‌ها مورد توجه آماردانان قرار گرفت. در چند دهه اخیر، مفهوم تک‌مدی چند متغیره نیز مورد توجه زیادی قرار گرفته است که از بیان آن در این مقاله صرف نظر می‌کنیم (برای مطالعه در این زمینه خواننده را به دارمادیکاری وجودف^۹ [۱۹] ارجاع می‌دهیم).

^۱موسسه آموزش عالی نقش جهان

^۲گروه آمار دانشگاه اصفهان

^۳Unimodal

^۴Strongly Unimodal

^۵Dharmadhikari and Joag-dev^{۱۰}

(۷) نزولی باشد، آنگاه آن توزیع تک‌مدی حول ν خوانده می‌شود. این خاصیت به طور کلی تر بر اساستابع توزیع تعریف می‌شود. اولین تعریف رسمی و دقیق این خاصیت همراه با چند مشخصه این توزیع‌ها توسط خین چین^۶ [۲۹] ارائه شد.

تعریف ۱ متغیر تصادفی X یا تابع توزیع آن F حول نقطه ν تک‌مدی است، اگر F روی $(-\infty, \nu)$ محدب و روی $(\nu, +\infty)$ مقعرب باشد.

به عنوان مثال با توجه به تعریف به راحتی می‌توان دید که توزیع‌های نرمال، کوشی، نمایی و یکنواخت تک‌مدی هستند. با استفاده از این تعریف، خین چین ثابت کرد که کلاس همه توزیع‌های تک‌مدی روی R تحت حد ضعیف بسته است و آمیخته^۷ چند توزیع تک‌مدی حول صفر نیز یک توزیع تک‌مدی است. همچنین وی ثابت کرد که اگر ν مجموعه همه توابع توزیع تک‌مدی حول صفر با تکیه‌گاه R باشد، آنگاه هر عضو F از ν یک آمیخته تعییم‌یافته از توابع توزیع یکنواخت روی $(z, 0)$ یا $(0, z)$ ، $W_z(z, 0)$ ، خواهد بود که در آن‌ها به ترتیب $z > 0$ و $0 < z$ است. یعنی اگر H نشان‌دهنده تابع توزیع متغیر تصادفی Z روی $(-\infty, +\infty)$ باشد آنگاه خواهیم داشت

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_z(x) dH(z). \quad (1)$$

با استفاده از نکته‌ای که ذکر شد، خین چین مشخصه ذیل را اثبات کرد. پس از او شپ^۸ [۳۴] همان قضیه را به روش دیگر اثبات کرد که در این جا به آن اشاره می‌شود.

سایر ساختارهای ساختمانی توزیع‌ها، از مدپذیری می‌توان در مشخصه‌سازی توزیع‌ها، که نقش مهمی در شناسایی غیرمستقیم و الگوسازی آن‌ها دارند، استفاده نمود. در این مبحث، تحبد نقشی بسیار اساسی بازی می‌کند. برای مشخصه‌سازی توزیع‌های پیوسته، بیشتر از خواص تحبد و تقریلگاریتم چگالی توزیع استفاده می‌شود. به خصوص برای توزیع‌های قویاً تک‌مدی که به علت کاربرد زیاد آن‌ها در زمینه‌های مختلف از جمله قابلیت اعتماد مورد توجه آماردانان قرار دارد، از خصوصیت تقریلگاریتم چگالی‌ها برای مشخصه‌سازی توزیع‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله ابتدا در بخش دوم به خواص تک‌مدی و قویاً تک‌مدی و برخی مشخصه‌سازی‌های موجود در این زمینه می‌پردازیم. در بخش سوم، مفاهیم تعییم‌یافته تک‌مدی را مرور می‌کنیم. سپس از آن‌جا که متغیرهای تصادفی مرتب‌شده نقش ویژه‌ای در شاخه‌های مختلف آمار دارند، این خواص را در بخش چهارم در مورد این نوع آمارهای مورد بررسی قرار داده و بحث را با ارائه یک مثال نقض کامل می‌کنیم. در بخش پنجم نیز کاربردهای از این توزیع‌ها را بیان خواهیم کرد.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۲ تک‌مدی پیوسته و گسسته

خاصیت تک‌مدی برای هر دو نوع توزیع‌های پیوسته و گسسته تعریف شده است که هر کدام تفسیر جداگانه‌ای دارند. اگر تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته مطلق روی فاصله $(-\infty, \nu]$ صعودی و در فاصله

Khintchine^۶
Mixture^۷
Shepp^۸

رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= P[UZ > x] \\ &= \int_x^\infty [1 - W_z(x)]dH(z) \\ &= \int_{-\infty}^x [1 - W_z(x)]dH(z) \end{aligned}$$

و به طور مشابه برای $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x W_z(x)dH(z).$$

روابط فوق نشان می‌دهد که F ، آمیزه توابع توزیع W_z می‌باشد. از طرفی با توجه به این که W_z تک‌مدی حول صفر بوده و همچنین آمیخته توزیع‌های تک‌مدی حول صفر، تک‌مدی حول صفر است، نتیجه گرفته می‌شود که F حول صفر تک‌مدی بوده و اثبات کامل می‌شود. \square

گزاره ۱ یک توزیع با تابع مشخصه φ تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر یک تابع مشخصه مانند ψ وجود داشته باشد به طوری که

$$\varphi(t) = \int_0^1 \psi(tu)du, \quad t \in R.$$

در واقع این نتیجه بیان دیگری از قضیه قبل به زبان توابع مشخصه است. در قضیه زیر مشخصه‌سازی مفید دیگری را ارائه می‌دهیم که توسط اولشن و ساویج^۹ [۳۲] بیان شده است.

قضیه ۲ متغیر تصادفی X دارای توزیع تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر $tE[g(tX)]$ نسبت به $x < 0$ برای هر تابع کراندار، نامنفی و بورل-اندازپذیر g غیرنژولی باشد.

قضیه ۱ تابع توزیع F تعریف شده روی R ، تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر متغیرهای تصادفی مستقل U و Z وجود داشته باشند به طوری که U دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(1, 0)$ و حاصل‌ضرب UZ دارای توزیع F باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید F حول صفر تک‌مدی بوده و در رابطه (۱) صدق کند. همچنین فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع H بوده و U مستقل از Z دارای توزیع یکنواخت روی $(1, 0)$ باشد. بنابراین داریم

$$1 - F(x) = \int_{-\infty}^x [1 - W_z(x)]dH(z). \quad (2)$$

اگر $x > 0$ ، آنگاه داریم

$$W_z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/z, & 0 < x < z \\ 1, & z \leq x \end{cases}.$$

بنابراین با استفاده از (۲) داریم

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \int_x^\infty [1 - W_z(x)]dH(z) \\ &= \int_x^\infty P[U > x/z]dH(z) \\ &= P[UZ > x]. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $x < 0$ می‌توان نشان داد $F(x) = P[UZ \leq x]$ است. در نتیجه UZ دارای تابع توزیع F است.

حال، بر عکس، فرض کنید U و Z در شرایط قضیه صدق می‌کنند و Z دارای توزیع دلخواه H و UZ دارای تابع توزیع F باشند. آنگاه برای $x > 0$ ، طبق مراحل فوق

(۱) رابطه زیربرقرار است

$$F[ta + (1-t)b] < tF(a) + (1-t)F(b). \quad (۳)$$

حال اگر $c = \sqrt{ab}$ ، آنگاه قرار می‌دهیم $(c/a) = (b/c) = u$. بدیهی است که $u > ۱$ و بنابراین خاصیت غیرصعودی بودن K نشان می‌دهد که

$$F(c) - F(a) \geq \frac{F(cu) - F(au)}{u} = \frac{F(b) - F(c)}{u}$$

که معادل است با

$$F(c) \geq \frac{uF(a) + F(b)}{1+u}. \quad (۴)$$

اما چون $(1+u)/(ua+b) = (ua+b)/(ua+bu)$ ، رابطه (۴) با (۳) در تناقض است. بنابراین F روی $(0, \infty)$ مقعر است. به طور مشابه ثابت می‌شود که F روی $(-\infty, 0)$ محدب بوده و به این ترتیب ثابت می‌شود که F تک‌مدی است. □

طبق تعریف ۱، از توزیع‌های گسسته فقط توزیع تباہیده تک‌مدی است. به همین دلیل آماردانان به فکر تعریفی برای حالت گسسته افتادند. اولین تعریف توسط کیلسون و گربر ^{۱۰} [۲۸] به صورت زیر ارائه شد و بعد از آن کارهای متعددی در مورد این حالت انجام گرفت.

تعریف ۲ توزیع گسسته (توزیع مشبک ^{۱۱} با تکیه‌گاه اعداد صحیح) حول $M = \{p_n, -\infty < n < \infty\}$ است که

$$\begin{cases} p_n \geq p_{n-1}, & n \leq M \\ p_n \geq p_{n+1}, & n \geq M \end{cases}.$$

اثبات. فرض کنید X دارای تابع توزیع F و تک‌مدی حول صفر است. بنابراین با توجه به قضیه ۱، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} tE[g(tX)] &= tE[g(tUZ)] \\ &= t \int_0^t E[g(tuZ)] du \\ &= \int_0^t E[g(\nu Z)] d\nu. \end{aligned}$$

واضح است که چون g نامنفی است، آخرین انتگرال نسبت به $t > ۰$ غیرنژولی خواهد بود.

برعکس، فرض کنید که $tE[g(tX)]$ نسبت به $t > ۰$ غیرنژولی است. حال تابع g را تابع نشانگر روی g فاصله $[a, b]$ ، $a < b$ در نظر بگیرید. آنگاه $t[F(b/t) - F(a/t)]$ با تغییر متغیر $u = 1/t$ تابع

$$K(u) = \frac{[F(bu) - F(au)]}{u}$$

برای $u > ۰$ غیرصعودی است. در این صورت، اولاً F باید روی $(0, \infty)$ پیوسته باشد، زیرا اگر $x_0 > ۰$ یک نقطه ناپیوستگی F باشد، با در نظر گرفتن a به عنوان نقطه پیوستگی F و $b = x_0$ مشاهده می‌شود که وقتی u به عدد ۱ افزایش می‌یابد، K نیز افزایش می‌یابد و این با غیرصعودی بودن K در تناقض است.

حال ادعا می‌کنیم که F روی $(0, \infty)$ مقعر است. اگر این حالت برقرار نباشد، پیوستگی F نشان می‌دهد که برای یک a و b متعلق به $(0, \infty)$ که $a < b$ و برای هر

Keilson and Gerber^{۱۰}
Lattice^{۱۱}

که در آن F تابع توزیع λ می‌باشد.
هولگیت^{۱۲} [۲۲] اثبات کرد که اگر توزیع F به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه توزیع‌های آمیخته پواسن تک مدی‌اند. پس از آن علامتساز [۶] با حذف شرط به طور مطلق پیوسته بودن F ، قضیه فوق را اصلاح کرد و همچنین نشان داد که این قضیه برای حالتی که توزیع F گسسته تک مدی باشد، برقرار نیست.

۲.۲ پیچش تک مدی‌ها و تعریف قویاً تک مدی

پیچش یکی از عملگرهای مهم در آمار و احتمال است. بنابراین اطلاع از این‌که آیا خاصیت تک مدی تحت پیچش بسته می‌ماند یا خیر، از اهمیت زیادی برخوردار است. قابل توجه است که در ابتدا این طرز فکر وجود داشت که پیچش توزیع‌های تک مدی مجددًا تک مدی خواهد بود و اولین مثال نقض توسط چانگ (گنه دنکو و کلموگروف^{۱۳} [۲۱])، ارائه شد. فلر^{۱۴} [۲۰] نیز یک مثال ارائه داد که نسبتاً پیچیده است، اما علامتساز [۵] با مثال مقدماتی زیر این موضوع را به سادگی روشن ساخت.

مثال ۱ توزیع پیوسته مطلق زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1-\alpha}{2}, & 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

که در آن $1 < \alpha < 1/2$ یک مقدار ثابت است. بدیهی است که این توزیع تک مدی است.

این تعریف متناظر با این است که دنباله $\{p_n - p_{n-1}\}$ فقط یک بار از مشیت به منفی تغییر علامت بدهد. به عنوان مثال به سادگی می‌توان دید که توزیع‌های پواسن، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی تک مدی هستند.

در اینجا اولین مشخصه‌سازی در این حالت را که توسط مدگایسی^{۱۵} [۳۱] ارائه شد بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳ دنباله $P = \{p_n\}$ که یک توزیع تعریف شده روی مجموعه اعداد صحیح است، تک مدی حول صفر است، اگر و فقط اگر دنباله $Q = \{q_n\}$ تعریف شده به صورت زیر

$$q_n = (\theta - n)(p_n - p_{n-1}), \quad \forall \theta \in (0, 1)$$

یک توزیع احتمال روی مجموعه اعداد صحیح باشد. همانند قبل، در این حالت نیز مشخصه‌سازی براساس توابع مشخصه به صورت زیر بیان می‌شود.

گزاره ۲ متغیر تصادفی X با توزیع $P = \{p_n\}$ تک مدی حول صفر است اگر و فقط اگر تابع مشخصه آن به صورت زیر باشد

$$\varphi(t) = \frac{e^{i\theta t}}{i(1-e^{it})} \int_0^t e^{-i\theta u} \psi(u) du, \quad t \neq 2n\pi,$$

که در آن ψ یک تابع مشخصه است.

در آخر این بخش به دو قضیه در مورد توزیع آمیخته پواسن که به فرم زیر است اشاره می‌کنیم

$$p_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^n dF(\lambda),$$

Medgyessy^{۱۲}
Holgate^{۱۳}
Gnedenko and Kolmogorov^{۱۴}
Feller^{۱۵}

قضیه ۴ یک تابع توزیع ناتباهیده F قویاً تک‌مدی است اگر و فقط اگر F پیوسته و چگالی آن f لگ-مقعر باشد (یعنی لگاریتم چگالی آن مقعر باشد).

کلاسن [۳۰] نیز مشخصه‌سازی دیگری برای توزیع‌های قویاً تک‌مدی ارائه داده است. همچنین مشابه ابراهیمف، کیوکلسکو و تئودورسکو [۱۸] خاصیت قویاً تک‌مدی ضربی ${}^{\circ} \times {}^{\circ}$ را برای حاصلضرب دو متغیر تصادفی تعریف و مشخصه‌سازی کردند. کیلسون و گریر [۲۸] برای حالت گستته مانند حالت پیوسته تعریف و مشخصه سازی مشابهی را به صورت زیر ارائه دادند.

تعريف ۴ توزیع P تعریف شده روی مجموعه اعداد صحیح قویاً تک‌مدی نامیده می‌شود اگر پیچش $P * Q$ برای هر توزیع تک‌مدی Q با تکیه‌گاه مجموعه اعداد صحیح، تک‌مدی باشد.

قضیه ۵ توزیع گسسته $\{p_n\} = P$ قویاً تک‌مدی است اگر و فقط اگر

$$p_n^{\vee} \geq p_{n-1} p_{n+1}, \quad \forall n.$$

۳ تک‌مدی‌های تعمیم‌یافته

اولشن و ساویج [۳۲] تعریفی برای خاصیت تک‌مدی تعمیم‌یافته با استفاده از یک پارامتر مثبت α ارائه دادند

حال پیچش دوگانه این توزیع را با خودش در نظر بگیرید

$$f^{\vee*}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) f(y) dy \\ = \begin{cases} \alpha^2 x, & {}^{\circ} \leq x < 1 \\ -\alpha x(2\alpha-1) + \alpha(3\alpha-1), & 1 \leq x < 2 \\ (\frac{1-\alpha}{\alpha})^2 x + \frac{(1-\alpha)(3\alpha-1)}{\alpha}, & 2 \leq x < 3 \\ (\frac{5\alpha^2-7\alpha+1}{\alpha^2})x + \frac{(1-\alpha)(9\alpha-1)}{\alpha^2}, & 3 \leq x < 4 \\ -(\frac{1-\alpha}{\alpha})^2 x + \frac{6(\frac{1-\alpha}{\alpha})}{\alpha}, & 4 \leq x < 6 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

به سادگی می‌توان دید، توزیع فوق دارای دو مد در نقاط ${}^{\circ}$ و ${}^{\circ} 3$ و یک مینیمم در نقطه ${}^{\circ} 2$ است. لذا پیچش دو توزیع تک‌مدی، ممکن است تک‌مدی نباشد. اما وینتر [۳۷] نشان داد که پیچش دو توزیع تک‌مدی متقارن، تک‌مدی و متقارن است.

با توجه به توضیحات بالا، ابراهیمف [۲۴] خاصیت قویاً تک‌مدی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعريف ۳ توزیع F را قویاً تک‌مدی می‌نامند اگر پیچش

$F * G$ برای هر توزیع تک‌مدی G ، تک‌مدی باشد.

وی با استفاده از این تعریف نتایج ذیل را به دست آورد.

۱. مجموعه توزیع‌های قویاً تک‌مدی تحت حد ضعیف و پیچش بسته‌اند.

۲. یک توزیع قویاً تک‌مدی، تک‌مدی است.

۳. توزیع‌های تباهیده، قویاً تک‌مدی هستند.

همچنین قضیه زیر را که مشخصه‌سازی مهم خاصیت قویاً تک‌مدی ابراهیمف است، به دلیل طولانی بودن اثبات آن، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

Wintner^{۱۶}

Ibragimov^{۱۷}

Klaassen^{۱۸}

Cuculescu and Theodorescu^{۱۹}
Multiplicative Strong Unimodality^{۲۰}

α -یکنواخت مورد بررسی قرار داد و بیان کرد که تعریف ابواماه کاملاً صحیح نیست. پس از آن ابواماه تعریف خود را اصلاح کرد و ادعا کرد که مشخصه‌سازی‌های وی در مقاله اش [۲] کماکان به اعتبار خود باقی است. علامت‌ساز [۷] نشان داد که این ادعا درست نبوده و مشخصه‌سازی‌های جانشین را برای این توزیع‌ها ارائه داد. پس از آن افراد زیادی در این حیطه وارد شدند که از تازه‌ترین آن‌ها می‌توان به تعمیم و بسط‌های ارائه شده توسط آفابایی و علامت‌ساز [۳] اشاره کرد که کارهای قبلی را در برمی‌گیرد.

ابتدا ایده α -یکنواخت را با استفاده از تعریف ضرب تعمیم‌یافته $Y \otimes u$ که توسط استیوتن وون هارن [۲۳] ارائه شد بیان می‌کنیم.

تعریف ۶ فرض کنید Y یک متغیر تصادفی تعریف شده روی $\{0, 1, 2, \dots\} = N_0$ و $u \in [0, 1]$ باشد. آنگاه ضرب تعمیم‌یافته $Y \otimes u$ به صورت

$$u \otimes Y = \sum_{i=1}^Y X_i$$

تعریف می‌شود که در آن X_i -ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک برنولی با احتمال موقیت u و مستقل از Y است.

با توجه به تعریف فوق، استیوتن [۳۵] متغیرهای α -یکنواخت تعریف شده روی N_0 را به صورت زیر تعریف کرد.

که در واقع نتایج آن‌ها، کاربنیادی خیلی چیز درباره تک‌مدی بودن توزیع‌ها را تعمیم داد.

تعریف ۵ بردار تصادفی n -بعدی X ، دارای توزیع α -تک‌مدی حول بردار صفر است اگر برای هر تابع کراندار، نامنفی و بورل-اندازه‌پذیر g تعریف شده روی R^n ، تابع $[t^\alpha E[g(tX)]$ زمانی که $t \in (0, +\infty)$ غیرنژولی باشد.

با توجه به تعریف فوق به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر X ، α -تک‌مدی و $\beta > \alpha$ باشد، آنگاه X ، β -تک‌مدی خواهد بود. بنابراین، بهترین α در اینجا، کوچک‌ترین مقدار ممکن برای α است.

در قضیه زیر یکی از مشخصه‌سازی‌های اولشن و ساویج [۳۲] در این زمینه را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶ بردار تصادفی n -بعدی X ، دارای توزیع α -تک‌مدی حول بردار صفر است اگر و فقط اگر X با $U^{1/\alpha} Z$ هم‌توزیع باشد که در آن $(1, 0) \sim U$ و Z یک بردار تصادفی مستقل از U است.

با توجه به مطالب بالا می‌بینیم که تک‌مدی روی R همان ۱-تک‌مدی است.

همانند توزیع‌های α -تک‌مدی پیوسته، تعمیم‌یافته توزیع‌های تک‌مدی گسسته، توزیع‌های α -تک‌مدی گسسته می‌باشد که اولین بار به وسیله ابواماه [۱] تعریف شد. سپس این تعریف مورد توجه استیوتن [۳۵] [۲۲] قرار گرفت و پس از او علامت‌ساز [۷] به آن پرداخت. استیوتن توزیع‌های α -تک‌مدی را با توجه به ایده

Abouammoh^{۲۱}Steutel^{۲۲}Van Harn^{۲۳}

تعريف ۷ متغیر تصادفی X بر α -یکنوا گفته

اما مثال نقض زیر از علامت‌ساز [۷] نشان می‌دهد که این نتیجه درست نیست.

مثال ۲ فرض کنید $2 = \alpha$ و توزيع $\{p_n\}$ به صورت جدول ۱ باشد. واضح است که Q_n یکتابع توزيع گسسته است. اما می‌توان دید که برای $n = 2, n = 1, n = 0$ رابطه (۵i) برقرار نیست و در نتیجه $\{p_n\}$ ۲-تک‌مدی نیست.

اصلاح شده این نتیجه برای α -یکنوا یی و α -تک‌مدی توسط علامت‌ساز [۷] به صورت زیر ارائه گردید.

قضیه ۷ (۱) توزيع $\{p_n\}$ α -یکنوا است اگر و فقط اگر

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1}(n+1)p_{n+1}, \quad n \in N_0,$$

تابع توزيع یک متغیر تصادفی گسسته باشد.

(۲) توزيع $\{p_n\}$ α -تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر $\alpha p_0 \geq p_1$ و

$$Q_n = \begin{cases} \frac{(\alpha P_n - np_n)}{(\alpha + p_1)}, & n \leq 0 \\ \frac{(\alpha P_n + p_1 - (n+1)p_{n+1})}{(\alpha + p_1)}, & n \geq 0 \end{cases},$$

یکتابع توزيع گسسته باشد.

مشاهده می‌کیم که در اینجا دیگر نیازی به متناهی بودن گشتاور اول توزيع نیز نمی‌باشد.

تعريف ۷ متغیر تصادفی X بر α -یکنوا گفته می‌شود اگر متغیر تصادفی Y بر α - وجود داشته باشد به‌طوری که بتوان نوشت $X =^d U^{\frac{1}{\alpha}} \otimes Y$ که در آن $U \sim U(0, 1)$ مستقل از Y است.

با استفاده از این تعريف و مشخصه‌سازی توزيع‌های α -یکنوا، استیوتنل [۳] نتیجه زیر را بیان کرد.

گزاره ۳ توزيع $\{p_n\}$ تعریف‌شده روی N_0 α -یکنوا است اگر و فقط اگر

$$p_n \geq \frac{(n+1)}{(\alpha+n)} p_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

بر این اساس ابواماه [۲] تعريف خود را به صورت زیر اصلاح کرد.

تعريف ۸ توزيع $\{p_n\}$ α -تک‌مدی حول صفر نامیده می‌شود اگر روابط زیر برقرار باشند

$$\begin{cases} (i) (\alpha - n)p_n \geq (1 - n)p_{n-1}, & n \leq 0 \\ (ii) (\alpha + n)p_n \geq (n + 1)p_{n+1}, & n \geq 0 \end{cases}. \quad (5)$$

یکی از مشخصه‌سازی‌های ابواماه [۱] بیان می‌دارد که "توزيع $\{p_n\}$ با اولین گشتاور متناهی، α -تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر Q_n که به صورت زیر تعريف می‌شود، تابع توزيع یک متغیر تصادفی گسسته باشد

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1}np_n, \quad n \in Z.$$

در تساوی فوق $P_n = \sum_{k=-\infty}^n p_k$ ، تابع توزيع p_n و $Q_n = \sum_{k=-\infty}^n q_k$ ، تابع توزيع یک توزيع گسسته مانند

جدول ۱. توزیع $\{p_n\}$ در مثال ۲

n	کمتر از -۱	-۱	۰	۱	۲	۳	بیشتر از ۳
p_n	۰	۰/۲۲۵	۰/۱۵	۰/۳	۰/۱۲۵	۰/۲	۰
P_n	۰	۰/۲۲۵	۰/۳۷۵	۰/۶۷۵	۰/۸	۱	۱
$Q_n = P_n - \frac{1}{n} np_n$	۰	۰/۳۳۷۵	۰/۳۷۵	۰/۵۲۵	۰/۶۷۵	۰/۷	۱

ترتیبی آن توزیع است. تکمدی بودن آماره‌های رکورد توسط باساک و باساک [۲۸] [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت، اما علیف [۲۹] [۸] با یک مثال نقض نشان داد شرط تحبد $1/f$ را که آنان در نظر گرفته بودند برای تکمدی بودن مقادیر رکوردهای کافی نیست. کرامر [۳۰] [۱۶] با همان شرایط آلام و هوآنگ و گوش، تکمدی و قویاً تکمدی بودن آماره‌های سانسور فرازینده را نتیجه گرفت و کرامر و همکاران [۱۷] تکمدی بودن حالت خاصی از آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته وقتی توزیع اولیه یکنواخت باشد را ثابت کردند.

برای بیان مطالب بعدی به تعریف زیر که توسط کمپس [۲۷] و [۲۶] ارائه شده است، نیاز داریم.

تعريف ۹ فرض کنید F یکتابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f و $1 - F = \bar{F} = 1 - f$ باشد. همچنین فرض کنید پارامترهای $n \in N$ و $m > 0$ و $m = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1}) \in R^{n-1}$ به گونه‌ای باشند که برای $1, \dots, n-1$ و $r = 1, \dots, n$ داشته باشند

$$\gamma_r = k + n - r + \sum_{j=r}^{n-1} m_j > 0,$$

و برای $1, \dots, n$ دلخواه است. متغیرهای تصادفی $X_{(r,n,\tilde{m},k)}$ را آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته

۴ خواص تکمدی و قویاً تکمدی متغیرهای تصادفی مرتب شده

تاکنون مدل‌های مختلفی از متغیرهای تصادفی مرتب شده معرفی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آماره‌های ترتیبی، مقادیر رکوردهای طور کلی k -رکوردهای سانسور فرازینده و ... اشاره کرد. هریک از این مدل‌ها با توجه به ساختاری که دارند، برای نوع خاصی از داده‌ها پیشنهاد شده‌اند (کمپس [۲۶] ملاحظه شود).

مفهوم آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته را کمپس [۲۶] و [۲۷] به منظور تعمیم و تلفیق مدل‌های مختلف متغیرهای تصادفی (به طور صعودی) مرتب شده ارائه کرده است و بعد از آن بورکشات و همکاران [۱۴]، دوگان آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته را مشابه تعریف کمپس، برای متغیرهای تصادفی به طور نزولی مرتب شده تعریف کردند.

مطالعه خاصیت تکمدی درباره این نوع متغیرها، توسط کار هوشمندانه آلام [۲۶] صورت گرفت که تحبد $1/f$ ، که در آن f چگالی توزیع جامعه است، را برای تکمدی بودن توزیع آماره‌های ترتیبی کافی دانست. بعد از آن هوآنگ و گوش [۲۷] [۲۳] نشان دادند قویاً تکمدی بودن یک توزیع به معنای قویاً تکمدی بودن آماره‌های

Kamps^{۲۴}
Burkschat and et al.^{۲۵}
Alam^{۲۶}
Huang and Ghosh^{۲۷}
Basak and Basak^{۲۸}
Aliev^{۲۹}
Cramer^{۳۰}

$$\begin{aligned} & \text{و } f \text{ لگ-مقعر باشد،} \\ & m_i \geq -1, i = 1, \dots, n-1 \quad \text{برای هر } i > k, \quad (2) \\ & h(x) = f(x)/\bar{F}(x) \quad \text{و } \tau_i \leq x_i \leq \bar{F}(x) \quad (\text{تابع نرخ خطر}) \\ & \text{لگ-مقعر باشد.} \end{aligned}$$

با استفاده از این قضیه و برقراری همین شرایط آنان نتیجه گرفته‌ند که GOSS قویاً تک‌مدی هستند که کار هوآنگ و گوش را در برمی‌گیرد.

علیمحمدی و علامتساز [۹] حالت مهم معینی از GOSS و دوگان آن‌ها DGOS ^{۳۳} را که بسیاری از مدل‌های مشهور را در برمی‌گیرد در نظر گرفته‌ند و تک‌مدی بودن آن را اثبات کردند. این کار علاوه بر آن که کار آلام را نتیجه می‌دهد، ایراد کار باسماک و باسماک را نیز برطرف می‌کند. برای ارائه این نتایج ابتدا فرض کنید $1 \leq k \leq n-1$. برای $m_1 = \dots = m_{n-1} = m$ و $r = \{1, 2, \dots, n\}$ داشته باشیم

$$\gamma_r = k + (n-r)(m+1) \geq 1.$$

در این حالت r -امین GOS (DGOS) را با $X_{(r,n,m,k)}$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنید برای $(m \in R), g_m(x)$ و $c_{r-1} = \prod_{i=1}^r \gamma_j$ ، $r = 1, \dots, n$ روی (۱) به صورت زیر تعریف کنیم

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{(1-(1-x)^{m+1})}{m+1}, & m \neq -1 \\ -\ln(1-x), & m = -1 \end{cases}. \quad (6)$$

با توجه به مطالب فوق، چگالی r -امین GOS و DGOS با یک تابع توزیع به طور مطلق F ، به ترتیب به

^{۳۱} گویند هرگاه برای همه $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ (GOSS)

تابع چگالی تقام آن‌ها به فرم زیر باشد

$$\begin{aligned} f_{X_{(1,n,\tilde{m},k)}, \dots, X_{(n,n,\tilde{m},k)}}(x_1, \dots, x_n) &= k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{n-1} [\bar{F}(x_i)]^{m_i} f(x_i) \right) [\bar{F}(x_n)]^{k-1} f(x_n). \end{aligned}$$

به عنوان حالت‌های خاص مشاهده می‌شود

که با قرار دادن $1 = \dots = m_{n-1} = 0$ و $k = 1$ و $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$ آماره‌های ترتیبی معمولی و برای $k \in N$ و مقادیر k -رکورد و برای

حالت خاص $1 = k$ ، مقادیر رکورد به دست می‌آید. قضیه و نتیجه زیر توسط چن و همکاران ^{۳۲} [۱۵] و با استفاده از تعریف زیر، اثبات شده است. برای بردار $\mathcal{T} = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ ، که در آن برای هر i $0 \leq \tau_i \leq \tau_{i-1}$ است، بردار $X_{(0,n,\tilde{m},k)} = \{0, \dots, \tau_{n-1}\}$ صحیح، بردار $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathcal{T}) &= (X_{(1,n,\tilde{m},k)}, X_{(2,n,\tilde{m},k)} - X_{(1,n,\tilde{m},k)}, \\ &\quad \dots, X_{(n,n,\tilde{m},k)} - X_{(\tau_{n-1},n,\tilde{m},k)}). \end{aligned}$$

قضیه ^۸ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با چگالی f باشد. آنگاه چگالی تقام $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ لگ-مقعر خواهد بود، اگر بکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

$$(1) \quad m_i \geq 0, i = 1, \dots, n-1, \quad \text{برای هر } i < k.$$

Generalized Order Statistics ^{۳۱}

Chen and et al. ^{۳۲}

Dual Generalized Order Statistics ^{۳۳}

با استفاده از (۶) می بینیم که $g_m(F(x))$ در این حالت غیرنزویی است. حال با توجه به فرض، f'/f^2 غیرصعوی بوده و در نتیجه عبارت داخل کروشه عبارت (۹) نسبت به x غیرصعوی است و عبارت پیرون از کروشه مثبت خواهد بود. بنابراین زمانی که x از $-\infty$ به ∞ تغییر می کند، $f'_{X(r,n,m,k)}(x)$ حداقل یک بار از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد و در نتیجه تکمی خواهد بود.

(۲) در این حالتتابع چگالی به فرم زیر است

$$f_{X(r,n,m,k)}(x) = \frac{k^r}{(r-1)!} \times (H(x))^{r-1} (\bar{F}(x))^{k-1} f(x), \quad x \in R, \quad (9)$$

که $H(x) = -\ln(1 - F(x))$ تابع نرخ خطر تجمعی است. قابل توجه است که (۱۰) با در نظر گرفتن $k \in N$ در واقع چگالی آماره k -رکورد است. حال با مشتق گرفتن از (۱۰) داریم

$$\begin{aligned} f'_{X(r,n,m,k)}(x) &= \frac{k^n}{(n-1)!} \\ &\times (H(x))^{n-1} (\bar{F}(x))^{k-1} f(x) h(x) \\ &\times \left[-(k-1) + \frac{(n-1)}{H(x)} + \frac{f'(x)}{f''(x)} \bar{F}(x) \right]. \end{aligned}$$

با به کار بردن شیوه استفاده شده در اثبات قسمت قبل و توجه به این نکته که حاصل ضرب دو تابع غیرصعوی مثبت، غیرصعوی است، اثبات کامل می شود. البته در حالت $1 = k$ دیگر نیازی به شرط تحدب f نیست، زیرا چگالی حاصل، حاصل ضرب توابع غیرنزوی می شود که تکمی است. □

صورت زیر به دست می آید (کمپس [۲۶و۲۷])

$$\begin{aligned} f_{X(r,n,m,k)}(x) &= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \\ &\times (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1} (g_m(F(x)))^{r-1} f(x), \quad x \in R \end{aligned} \quad (7)$$

و

$$\begin{aligned} f_{X(r,n,m,k)}^d(x) &= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \\ &\times (F(x))^{\gamma_r-1} (g_m(\bar{F}(x)))^{r-1} f(x), \quad x \in R. \end{aligned}$$

قضیه ۹ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. اگریکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه GOS آن تکمی خواهد بود.

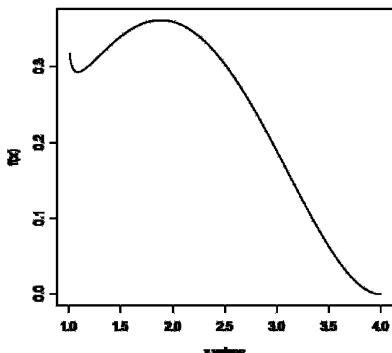
(۱) برای $m \geq 0$ محدب باشد،

(۲) برای $m = -1$

و f در دامنه خود غیرنزوی باشد،
(a) $k = 1$
(b) $1/f$ محدب و f در دامنه خود غیر نزوی باشد.

اثبات. (۱) با استفاده از (۷) داریم

$$\begin{aligned} f'_{X(r,n,m,k)}(x) &= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \\ &\times \left[-(\gamma_r - 1) f''(x) (\bar{F}(x))^{\gamma_r-2} (g_m(F(x)))^{r-1} \right. \\ &+ (r-1) f''(x) (\bar{F}(x))^m \\ &\times (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1} (g_m(F(x)))^{r-2} \\ &\left. + f'(x) (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1} (g_m(F(x)))^{r-1} \right] \\ &= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} f''(x) (g_m(F(x)))^{r-1} (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1} \\ &\times \left[-\frac{(\gamma_r - 1)}{\bar{F}(x)} + \frac{(r-1)}{g_m(F(x))} (\bar{F}(x))^m + \frac{f'(x)}{f''(x)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$



شکل ۱. تابع چگالی مربوطه در مثال ۴.

شایان ذکر است که اخیراً علیمحمدی و علامتساز [۱۵] تکمی در بودن GOS-ها را بدون محدودیت در مدل اثبات کردند که تمامی کارهای قبلی در این زمینه را به عنوان حالت خاص در بر می‌گیرد.

مثال ۳ توزیع نرمال از راست بریده شده در میانگین خود را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که شرایط قسمت (۲) قضیه برقرار است و GOS-هایی که از این توزیع تولید می‌شوند برای $m = 1 - t$ تکمی خواهد بود. برای قسمت (۱) می‌توان توزیع‌های نرمال، کوشی و حالت‌های خاصی از گاما و وایبل را نام برد. برای مثال‌های بیشتر می‌توان به علیمحمدی و علامتساز [۹] مراجعه کرد.

مشابه قضیه قبل برای DGOS به صورت زیر است.

قضیه ۱۰ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه DGOS آن تکمی خواهد بود.

$$(1) \text{ برای } 0 < m = 1/f \text{ محدب و } f \text{ در دامنه خود غیرنزوی باشد.}$$

$$(2) \text{ برای } 0 < m = 1/f \text{ محدب باشد.}$$

اکنون در تکمیل این نتایج، یک مثال نقض ارائه می‌دهیم و ملاحظه می‌کیم که حتی با برقراری دو شرط تحدب f و غیرنزوی بودن f ، DGOS آن برای $0 < m < 1$ و $m \neq 1$ می‌تواند تکمی نباشد.

مثال ۴ فرض کنید $4 < n = 0.7$ ، $k = 0.7$ و $x \leq f(x) = x^2/21$ ، $4 \leq x \leq 4$. بدیهی است که $1/f$ محدب و f در دامنه خود غیرنزوی است. با این حال، همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، $f_{X(4, 4, -0.7, 0.7)}(x)$ تکمی نیست.

ابتدا یک کاربرد ساده از قضیه (۱) را بیان می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X ، تکمی در M و با میانگین و واریانس به ترتیب μ و σ^2 باشد. ابتدا در نظر می‌گیریم $M = 0$. طبق قضیه (۱)، X با UZ هم توزیع است. همچنین فرض کنید Z دارای میانگین ν و واریانس τ^2 باشد. از آنجایی که $E(U^2) = \frac{1}{3}$ و $E(U) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، به سادگی می‌توان دید که $\nu = 2\mu$ و $\tau^2 = 3(\mu^2 + \sigma^2)$. با حذف ν داریم $\mu^2 + \tau^2 = 3\sigma^2$ و درنتیجه $\mu^2 \leq 3\sigma^2$. این نامساوی برای حالت کلی با مد M به صورت زیر خواهد بود

$$(\mu - M)^2 \leq 3\sigma^2.$$

برای کاربردهای دیگر این مباحثت در قابلیت اعتماد و اقتصاد به ترتیب می‌توان به سن گوپتا و ناندا^{۳۷} [۳۲] و باگنولی و برگستروم^{۳۸} [۱۲] مراجعه کرد.

این نامساوی توسط جانسون و راجرز^{۳۴} [۲۵] ارائه شد. بدیهی است که این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود اگر و فقط اگر Z تباہیده باشد و این یعنی اگر و فقط اگر X یکنواخت باشد.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

یکی از خواص مهم و مطلوب در نظریه توزیع‌ها خاصیت تک‌مدی توزیع‌ها است که از آن مفاهیم مهم و کاربردی دیگری مانند قویاً تک‌مدی مشتق می‌شود. البته هرگدام از این مفاهیم در حالت گسسته و پیوسته تعابیر مربوط به خود را دارند. در این مباحثت، تحدب و لگ-مقعر بودن نقش بسیار اساسی بازی می‌کند ولذا دانستن خواص و رفتارهای ریاضی‌وار این مفاهیم لازم و ضروری است. همچنین براساس خواص تک‌مدی می‌توان مشخصه‌سازی هایی را برای توزیع‌ها ارائه داد. بررسی این مفاهیم در توزیع متغیرهای تصادفی مرتب‌شده از اهمیت ویژه‌ای برخودار است و در چند دهه اخیر منجر به تولید نتایج مفید و متعددی در این زمینه شده است. در این مقاله علاوه بر بیان این مباحثت، با یک مثال نقض نشان دادیم که خاصیت تک‌مدی در این مدل‌های ترتیبی، برای همه مقادیر پارامترها می‌تواند به خوبی عمل نکند. در پایان لازم است اشاره کنیم که خواص تک‌مدی و تحدب، علاوه بر کاربرد در شاخه‌های مختلف آمار و احتمال، در مباحثه بهینه‌سازی، اقتصاد و حتی مهندسی کاربرد بسیاری دارند.

کاربرد دیگری که در اینجا مطرح می‌کنیم، کاربرد خاصیت قویاً تک‌مدی در مباحثت قابلیت اعتماد است. کلاس‌بندی متغیرها (و یا توزیع آنها) در قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از جمله می‌توان به کلاس‌های با تابع نرخ خطر صعودی^{۳۵} (IFR) اشاره کرد. قضیه زیر از بارلو و پروشان^{۳۶} [۱۱] ارتباط بین خاصیت قویاً تک‌مدی و IFR بودن را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱ اگر تابع توزیع F دارای چگالی لگ-مقعر (قویاً تک‌مدی) f باشد، آنگاه F , IFR است.

اثبات. برای $t_1 < t_2 < 0$ و x , لگ-مقعر بودن f نتیجه می‌دهد که $\frac{f(t_1+x)}{f(t_1)} \geq \frac{f(t_2+x)}{f(t_2)}$ و یا

$$f(t_2)f(t_1+x) \geq f(t_1)f(t_2+x).$$

با انتگرال‌گیری روی $(0, \infty)$ نسبت به x به دست می‌آوریم $f(t_2)\bar{F}(t_1) \geq f(t_1)\bar{F}(t_2)$. بنابراین $\frac{f(t_2)}{F(t_2)} \geq \frac{f(t_1)}{F(t_1)}$ و اثبات تمام است. \square

در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که کار آلام^{۳۴} [۴] به طور غیرمستقیم نتیجه‌ای درباره تک‌مدی بودن توزیع طول عمر یک سیستم k از n می‌دهد، زیرا چنین سیستمی زمانی از کار می‌افتد که حداقل k جزء آن از کار بیفتد و بنابراین طول عمر آن برابر با آماره ترتیبی $k-1$ است.

Johnson and Rogers^{۳۴}

Increasing Failure Rate^{۳۵}

Barlow and Proschan^{۳۶}

Sengupta and Nanda^{۳۷}

Bagnoli and Bergstrom^{۳۸}

مراجع

- [1] Abouammoh, A.M. (1987), On discrete α -unimodality, *Statistica Neerlandica*, 41, 239-244.
- [2] Abouammoh, A.M. (1988), Correction to 'On discrete α -unimodality', *Statistica Neerlandica*, 42, 141.
- [3] Aghababaie, M. and Alamatsaz, M.H. (2011), Two new thinning operators and their applications, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, preprint.
- [4] Alam, K. (1972), Unimodality of the distribution of an order statistic, *The Annals of Mathematical Statistics*, 43, 2041-2044.
- [5] Alamatsaz, M.H. (1983), On structural aspects of probability distributions and their mixtures with applications in queuing theory, Ph.D. Thesis, University of Sheffield, Sheffield.
- [6] Alamatsaz, M.H. (1990), On modality and divisibility of Poisson and binomial mixtures, *J. Sci. I.R. Iran*, 3, 202-207.
- [7] Alamatsaz, M.H. (1993), On discrete α -unimodal distributions, *Statistica Neerlandica*, 47, 245-252.
- [8] Aliev, F.A. (2003), A comment on 'Unimodality of the distribution of record statistics', *Statistics and Probability Letters*, 64, 39-40.
- [9] Alimohammadi, M. and Alamatsaz, M.H. (2010), On unimodality of generalized order statistics and their dual, *Proceedings of the 10th Iranian Statistics Conference*, 41-48.
- [10] Alimohammadi, M. and Alamatsaz, M.H. (2011), Some new results on unimodality of generalized order statistics and their spacings, *Statistics and Probability Letters*, 81, 1677-1682.
- [11] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

- [12] Basak, P. and Basak, I. (2002), Unimodality of the distribution of record statistics, *Statistics and Probability Letters*, 56, 395-398.
- [13] Bagnoli, M. and Bergstrom, T. (2005), Log-concave probability and its applications, *Economic Theory*, 26, 445-469.
- [14] Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps, U. (2003), Dual generalized order statistics, *Metron*, 61, 13-26.
- [15] Chen, H., Xie, H. and Hu, T. (2009), Log-concavity of generalized order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 79, 396-399.
- [16] Cramer, E. (2004), Logconcavity and unimodality of progressively censored order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 68, 83-90.
- [17] Cramer, E., Kamps, U. and Rychlik, T. (2004), Unimodality of uniform generalized order statistics, with applications to mean bounds, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56, 183-192.
- [18] Cuculescu, I. and Theodorescu, R. (1998), Multiplicative strong unimodality, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 40, 205-214.
- [19] Dharmadhikari, S. and Joag-Dev, K. (1988), *Unimodality, Convexity, and Applications*, Academic Press, Boston.
- [20] Feller, W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2., 2nd Ed., Wiley, New York.
- [21] Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1954), *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Cambridge, Massachusetts.
- [22] Holgate, P. (1970), The modality of some compound Poisson distributions, *Biometrika*, 57, 666-667.
- [23] Huang, J.S. and Ghosh, M. (1982), A note on strong unimodality of order statistics, *Journal of the American Statistical Association*, 77, 929-930.

- [24] Ibragimov, I.A. (1956), On the composition of unimodal distributions, *Theory of Probability and Its Application*, 1, 255-260.
- [25] Johnson, N.L. and Rogers, C.A. (1951), The moment problem for unimodal distributions, *The Annals of Mathematical Statistics*, 22, 432-439.
- [26] Kamps, U. (1995a), *A Concept of Generalized Order Statistics*, Teubner, Stuttgart.
- [27] Kamps, U. (1995b), A concept of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48, 1-23.
- [28] Keilson, J and Gerber, H. (1971), Some results for discrete unimodality, *Journal of the American Statistical Association*, 66, 386- 389.
- [29] Khintchine, A.Y. (1938), On unimodal distributions, *Izv. Nauchno-Issled. Inst. Math. Mech. Tomsk. Gos. Univ.* 2, 1-7.
- [30] Klaassen, C.A.J. (1985), Strong unimodality, *Advances in applied probability*, 17, 905-907.
- [31] Medgyessy, P. (1972), On the unimodality of discrete distributions, *Period. Math. Hungar.* 2, 245-257.
- [32] Olshen, R.A. and Savage, L.J. (1970). A generalized unimodality, *Journal of Applied Probability*, 7, 21-34.
- [33] Sengupta, D. and Nanda, A.K. (1999), Log-concave and concave distributions in reliability, *Naval Research Logistics*, 46, 419-433.
- [34] Shepp, L.A. (1962), Symmetric random walk, *Trans. Amer. Math. Soc.* 104, 144-153.
- [35] Steutel, F.W. (1988), Note on discrete α -unimodality, *Statistica Neerlandica*, 48, 137-140.
- [36] Steutel, F.W. and van Harn, K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Annals of Probability*, 7, 893-899.
- [37] Wintner, A. (1938), *Asymptotic Distributions and Infinite Convolutions*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan.