

خواص توزیع‌های تک‌مدی و برخی کاربردهای آن

مهدی علیمحمدی^۱ و محمد حسین علامت‌ساز^۲

چکیده:

مفهوم تک‌مدی برای هر دو نوع توزیع‌های گسسته و پیوسته تعریف شده است و هر یک تفسیر جداگانه‌ای دارد. با پیشرفت نظریه توزیع‌ها، تک‌مدی به تک‌مدی قوی و نیز α -تک‌مدی تعمیم داده شد و از آن پس توجه زیادی را به خود جلب کرد. در این مقاله ابتدا این مفاهیم را به همراه چند مشخصه‌سازی مرور می‌کنیم. به دلیل اهمیت متغیرهای تصادفی مرتب‌شده در بسیاری از شاخه‌های آمار، این خواص را در این نوع متغیرها نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس در راستای تکمیل این نتایج، یک مثال نقض ارائه خواهیم کرد که نشان می‌دهد این نتایج برای تمام مقادیر پارامترهای مدل نمی‌تواند برقرار باشد. در پایان چند کاربرد این مباحث را در آمار و قابلیت اعتماد بیان می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** آماره‌های ترتیبی، آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، تحدب، تک‌مدی، قابلیت اعتماد، قویاً تک‌مدی، مشخصه‌سازی، α -تک‌مدی.

۱ مقدمه

بررسی توزیع‌های تک‌مدی^۳ از اواخر قرن نوزدهم در ارتباط با تقریب چگالی تک‌مدی با توابع تک‌مدی مشابه در نظریه بهینه‌سازی آغاز شد. سپس با پیشرفت نظریه توزیع‌ها، انواع تعمیم‌یافته این توزیع‌ها مانند توزیع‌های تک‌مدی قوی^۴ و α -تک‌مدی و مشتقات آن‌ها مورد توجه آماردانان قرار گرفت. در چند دهه اخیر، مفهوم تک‌مدی چند متغیره نیز مورد توجه زیادی قرار گرفته است که از بیان آن در این مقاله صرف نظر می‌کنیم (برای مطالعه در این زمینه خواننده را به دارمادیکاری و جوجدف^۵ [۱۹] ارجاع می‌دهیم).

یکی از اهداف این مقاله، شناساندن مفهوم تک‌مدی و ارائه برخی از کاربردهای آن است. در اکثر کتاب‌ها، به خاصیت تک‌مدی توزیع‌ها توجه زیادی نمی‌شود. امیدواریم این مقاله نشان دهد که مفهوم تک‌مدی فراتر از آن است که بگوئیم منحنی ابتدا بالا رفته و سپس پایین می‌آید. شکل توزیع‌ها در مسائل آماری با توجه به ماهیت ساختاری آن‌ها متفاوت است. واضح است که یک آماردان برای مقایسه دو توزیع که از یک نوع نیستند، ممکن است با مشکل مواجه شود، اما اگر هر دو ساختار یکسانی داشته باشند، به عنوان مثال هر دو تک‌مدی باشند، بعد این مشکل کاهش می‌یابد. همچنین مانند

^۱موسسه آموزش عالی نقش جهان

^۲گروه آمار دانشگاه اصفهان

^۳Unimodal

^۴Strongly Unimodal

^۵Dharmadhikari and Joag-dev

$(\nu, +\infty)$ نزولی باشد، آنگاه آن توزیع تک‌مدی حول ν خوانده می‌شود. این خاصیت به طور کلی‌تر بر اساس تابع توزیع تعریف می‌شود. اولین تعریف رسمی و دقیق این خاصیت همراه با چند مشخصه این توزیع‌ها توسط خین چین^۶ [۲۹] ارائه شد.

تعریف ۱ متغیر تصادفی X یا تابع توزیع آن F حول نقطه ν تک‌مدی است، اگر F روی $(-\infty, \nu)$ محدب و روی $(\nu, +\infty)$ مقعر باشد.

به عنوان مثال با توجه به تعریف به راحتی می‌توان دید که توزیع‌های نرمال، کوشی، نمایی و یکنواخت تک‌مدی هستند. با استفاده از این تعریف، خین چین ثابت کرد که کلاس همه توزیع‌های تک‌مدی روی R تحت حد ضعیف بسته است و آمیخته^۷ چند توزیع تک‌مدی حول صفر نیز یک توزیع تک‌مدی است. همچنین وی ثابت کرد که اگر ζ مجموعه همه توابع توزیع تک‌مدی حول صفر با تکیه‌گاه R باشند، آنگاه هر عضو F از ζ یک آمیخته تعمیم‌یافته از توابع توزیع یکنواخت روی $(0, z)$ یا $(z, 0)$ ، خواهد بود که در آن‌ها به ترتیب $z > 0$ و $z < 0$ است. یعنی اگر H نشان‌دهنده تابع توزیع متغیر تصادفی Z روی $(-\infty, +\infty)$ باشد آنگاه خواهیم داشت

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_z(x) dH(z). \quad (1)$$

با استفاده از نکته‌ای که ذکر شد، خین چین مشخصه ذیل را اثبات کرد. پس از اوشپ^۸ [۳۴] همان قضیه را به روش دیگر اثبات کرد که در این جا به آن اشاره می‌شود.

سایر ساختارهای ساختمانی توزیع‌ها، از مدپذیری می‌توان در مشخصه‌سازی توزیع‌ها، که نقش مهمی در شناسایی غیرمستقیم و الگوسازی آن‌ها دارند، استفاده نمود. در این مبحث، تحذب نقشی بسیار اساسی بازی می‌کند. برای مشخصه‌سازی توزیع‌های پیوسته، بیشتر از خواص تحذب و تقعر لگاریتم چگالی توزیع استفاده می‌شود. به خصوص برای توزیع‌های قویاً تک‌مدی که به علت کاربرد زیاد آن‌ها در زمینه‌های مختلف از جمله قابلیت اعتماد مورد توجه آماردانان قرار دارد، از خصوصیت تقعر لگاریتم چگالی‌ها برای مشخصه‌سازی توزیع‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله ابتدا در بخش دوم به خواص تک‌مدی و قویاً تک‌مدی و برخی مشخصه‌سازی‌های موجود در این زمینه می‌پردازیم. در بخش سوم، مفاهیم تعمیم‌یافته تک‌مدی را مرور می‌کنیم. سپس از آن جا که متغیرهای تصادفی مرتب‌شده نقش ویژه‌ای در شاخه‌های مختلف آمار دارند، این خواص را در بخش چهارم در مورد این نوع آمارها مورد بررسی قرار داده و بحث را با ارائه یک مثال نقض کامل می‌کنیم. در بخش پنجم نیز کاربردهایی از این توزیع‌ها را بیان خواهیم کرد.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۲ تک‌مدی پیوسته و گسسته

خاصیت تک‌مدی برای هر دو نوع توزیع‌های پیوسته و گسسته تعریف شده است که هر کدام تفسیر جداگانه‌ای دارند. اگر تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته مطلق روی فاصله $(-\infty, \nu)$ صعودی و در فاصله

^۶Khinchine
^۷Mixture
^۸Shepp

رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= P[UZ > x] \\ &= \int_x^\infty [1 - W_z(x)] dH(z) \\ &= \int_{-\infty}^\infty [1 - W_z(x)] dH(z) \end{aligned}$$

و به طور مشابه برای $x < 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty W_z(x) dH(z).$$

روابط فوق نشان می دهد که F ، آمیزه توابع توزیع W_z می باشد. از طرفی با توجه به این که W_z تک مدی حول صفر بوده و همچنین آمیخته توزیع های تک مدی حول صفر، تک مدی حول صفر است، نتیجه گرفته می شود که F حول صفر تک مدی بوده و اثبات کامل می شود. □

گزاره ۱ یک توزیع با تابع مشخصه φ تک مدی حول صفر است اگر و فقط اگر یک تابع مشخصه مانند ψ وجود داشته باشد به طوری که

$$\varphi(t) = \int_0^1 \psi(tu) du, \quad t \in R.$$

در واقع این نتیجه بیان دیگری از قضیه قبل به زبان توابع مشخصه است. در قضیه زیر مشخصه سازی مفید دیگری را ارائه می دهیم که توسط اولشن و ساویج^۹ [۳۲] بیان شده است.

قضیه ۲ متغیر تصادفی X دارای توزیع تک مدی حول صفر است اگر و فقط اگر $E[g(tX)]$ نسبت به $t > 0$ و برای هر تابع کراندار، نامنفی و بورل-اندازه پذیر g غیرنزولی باشد.

قضیه ۱ تابع توزیع F تعریف شده روی R ، تک مدی حول صفر است اگر و فقط اگر متغیرهای تصادفی مستقل U و Z وجود داشته باشند به طوری که U دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, 1)$ و حاصلضرب UZ دارای توزیع F باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید F حول صفر تک مدی بوده و در رابطه (۱) صدق کند. همچنین فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع H بوده و U مستقل از Z دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد. بنابراین داریم

$$1 - F(x) = \int_{-\infty}^\infty [1 - W_z(x)] dH(z). \quad (2)$$

اگر $x > 0$ ، آنگاه داریم

$$W_z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/z, & 0 < x < z \\ 1, & z \leq x \end{cases}.$$

بنابراین با استفاده از (۲) داریم

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \int_x^\infty [1 - W_z(x)] dH(z) \\ &= \int_x^\infty P[U > x/z] dH(z) \\ &= P[UZ > x]. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $x < 0$ می توان نشان داد $F(x) = P[UZ \leq x]$ در نتیجه UZ دارای تابع توزیع F است.

حال، برعکس، فرض کنید U و Z در شرایط قضیه صدق می کنند و Z دارای توزیع دلخواه H و UZ دارای تابع توزیع F باشند. آنگاه برای $x > 0$ ، طبق مراحل فوق

^۹Olshen and Savage

اثبات. فرض کنید X دارای تابع توزیع F و تک‌مدی حول صفر است. بنابراین با توجه به قضیه ۱، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} tE[g(tX)] &= tE[g(tUZ)] \\ &= t \int_0^1 E[g(tuZ)] du \\ &= \int_0^t E[g(vZ)] dv. \end{aligned}$$

واضح است که چون g نامنفی است، آخرین انتگرال نسبت به $t > 0$ غیرنزولی خواهد بود.

برعکس، فرض کنید که $tE[g(tX)]$ نسبت به $t > 0$ و برای هر تابع کراندار، نامنفی و بول-اندازه‌پذیر g غیرنزولی است. حال تابع g را تابع نشانگر روی فاصله $(a, b]$ ، $0 < a < b$ ، در نظر بگیرید. آنگاه $t[F(b/t) - F(a/t)]$ برای $t > 0$ غیرنزولی خواهد بود. با تغییر متغیر $u = 1/t$ تابع

$$K(u) = \frac{F(bu) - F(au)}{u}$$

برای $u > 0$ غیرصعودی است. در این صورت، اولاً F باید روی $(0, \infty)$ پیوسته باشد، زیرا اگر $x_0 > 0$ یک نقطه ناپیوستگی F باشد، با در نظر گرفتن a به عنوان نقطه پیوستگی F و $b = x_0$ مشاهده می‌شود که وقتی u به عدد ۱ افزایش می‌یابد، K نیز افزایش می‌یابد و این با غیرصعودی بودن K در تناقض است.

حال ادعا می‌کنیم که F روی $(0, \infty)$ مقعر است. اگر این حالت برقرار نباشد، پیوستگی F نشان می‌دهد که برای یک a و b متعلق به $(0, \infty)$ که $a < b$ و برای هر

Keilson and Gerber^{۱۰}
Lattice^{۱۱}

$t \in (0, 1)$ ، رابطه زیر برقرار است

$$F[ta + (1-t)b] < tF(a) + (1-t)F(b). \quad (۳)$$

حال اگر $c = \sqrt{ab}$ ، آنگاه قرار می‌دهیم $(c/a) = (b/c) = u$ بدیهی است که $u > 1$ و بنابراین خاصیت غیرصعودی بودن K نشان می‌دهد که

$$F(c) - F(a) \geq \frac{F(cu) - F(au)}{u} = \frac{F(b) - F(c)}{u}$$

که معادل است با

$$F(c) \geq \frac{uF(a) + F(b)}{1+u}. \quad (۴)$$

اما چون $c = (ua + b)/(1 + u)$ ، رابطه (۴) با (۳) در تناقض است. بنابراین F روی $(0, \infty)$ مقعر است. به طور مشابه ثابت می‌شود که F روی $(-\infty, 0)$ محدب بوده و به این ترتیب ثابت می‌شود که F تک‌مدی است. □ طبق تعریف ۱، از توزیع‌های گسسته فقط توزیع تباهیده تک‌مدی است. به همین دلیل آماردانان به فکر تعریفی برای حالت گسسته افتادند. اولین تعریف توسط کیلسون و گربر^{۱۰} [۲۸] به صورت زیر ارائه شد و بعد از آن کارهای متعددی در مورد این حالت انجام گرفت.

تعریف ۲ توزیع گسسته (توزیع مشبک^{۱۱} با تکیه‌گاه اعداد صحیح) $P = \{p_n, -\infty < n < \infty\}$ حول M تک‌مدی نامیده می‌شود، اگر

$$\begin{cases} p_n \geq p_{n-1}, & n \leq M \\ p_n \geq p_{n+1}, & n \geq M \end{cases}.$$

این تعریف متناظر با این است که دنباله $\{p_n - p_{n-1}\}$ فقط یک بار از مثبت به منفی تغییر علامت بدهد. به عنوان مثال به سادگی می‌توان دید که توزیع‌های پواسن، دو جمله‌ای و دو جمله‌ای منفی تک‌مدی هستند.

در اینجا اولین مشخصه‌سازی در این حالت را که توسط مدگایسی^{۱۲} [۳۱] ارائه شد بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳ دنباله $P = \{p_n\}$ که یک توزیع تعریف شده روی مجموعه اعداد صحیح است، تک‌مدی حول صفر است، اگر و فقط اگر دنباله $Q = \{q_n\}$ تعریف شده به صورت زیر

$$q_n = (\theta - n)(p_n - p_{n-1}), \quad \forall \theta \in (0, 1)$$

یک توزیع احتمال روی مجموعه اعداد صحیح باشد.

همانند قبل، در این حالت نیز مشخصه‌سازی بر اساس توابع مشخصه به صورت زیر بیان می‌شود.

گزاره ۲ متغیر تصادفی X با توزیع $P = \{p_n\}$ تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر تابع مشخصه آن به صورت زیر باشد

$$\varphi(t) = \frac{e^{i\theta t}}{i(1 - e^{it})} \int_0^t e^{-i\theta u} \psi(u) du, \quad t \neq 2n\pi,$$

که در آن ψ یک تابع مشخصه است.

در آخرین بخش به دو قضیه در مورد توزیع آمیخته پواسن که به فرم زیر است اشاره می‌کنیم

$$p_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^n dF(\lambda),$$

Medgyessy^{۱۲}Holgate^{۱۳}Gnedenko and Kolmogorov^{۱۴}Feller^{۱۵}

که در آن F تابع توزیع λ می‌باشد.

هولگیت^{۱۳} [۲۲] اثبات کرد که اگر توزیع F به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه توزیع‌های آمیخته پواسن تک‌مدی‌اند. پس از آن علامت‌ساز [۶] با حذف شرط به طور مطلق پیوسته بودن F ، قضیه فوق را اصلاح کرد و همچنین نشان داد که این قضیه برای حالتی که توزیع F گسسته تک‌مدی باشد، برقرار نیست.

۲.۲ پیچش تک‌مدی‌ها و تعریف قویاً تک‌مدی

پیچش یکی از عملگرهای مهم در آمار و احتمال است. بنابراین اطلاع از این که آیا خاصیت تک‌مدی تحت پیچش بسته می‌ماند یا خیر، از اهمیت زیادی برخوردار است. قابل توجه است که در ابتدا این طرز فکر وجود داشت که پیچش توزیع‌های تک‌مدی مجدداً تک‌مدی خواهد بود و اولین مثال نقض توسط چانگ (گنه دنکو و کلموگروف^{۱۴} [۲۱])، ارائه شد. فلر^{۱۵} [۲۰] نیز یک مثال ارائه داد که نسبتاً پیچیده است، اما علامت‌ساز [۵] با مثال مقدماتی زیر این موضوع را به سادگی روشن ساخت.

مثال ۱ توزیع پیوسته مطلق زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1-\alpha}{2}, & 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{و.ا.} \end{cases}$$

که در آن $1/2 \leq \alpha < 1$ یک مقدار ثابت است. بدیهی است که این توزیع تک‌مدی است.

حال پیش از دوگانه این توزیع را با خودش در نظر بگیرید

$$f^{2*}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

$$= \begin{cases} \alpha^2 x, & 0 \leq x < 1 \\ -\alpha x(2\alpha - 1) + \alpha(3\alpha - 1), & 1 \leq x < 2 \\ (\frac{1-\alpha}{2})^2 x + \frac{(1-\alpha)(3\alpha-1)}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ (\frac{5\alpha^2-7\alpha+1}{2})x + \frac{(1-\alpha)(9\alpha-1)}{2}, & 3 \leq x < 4 \\ -(\frac{1-\alpha}{2})^2 x + 6(\frac{1-\alpha}{2})^2, & 4 \leq x < 6 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

به سادگی می‌توان دید، توزیع فوق دارای دو مد در نقاط ۱ و ۳ و یک مینیمم در نقطه ۲ است. لذا پیش از دو توزیع تک‌مدی، ممکن است تک‌مدی نباشد. اما وینتر [۳۷]^{۱۶} نشان داد که پیش از دو توزیع تک‌مدی متقارن، تک‌مدی و متقارن است.

با توجه به توضیحات بالا، ابراهیمف [۲۴]^{۱۷} خاصیت قویاً تک‌مدی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۳ توزیع F را قویاً تک‌مدی می‌نامند اگر پیش از $F * G$ برای هر توزیع تک‌مدی G ، تک‌مدی باشد.

وی با استفاده از این تعریف نتایج ذیل را به دست آورد.

۱. مجموعه توزیع‌های قویاً تک‌مدی تحت حد ضعیف و پیش بسته‌اند.

۲. یک توزیع قویاً تک‌مدی، تک‌مدی است.

۳. توزیع‌های تباهیده، قویاً تک‌مدی هستند.

همچنین قضیه زیر را که مشخصه‌سازی مهم خاصیت قویاً تک‌مدی ابراهیمف است، به دلیل طولانی بودن اثبات آن، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۴ یک تابع توزیع ناتباهیده F قویاً تک‌مدی است اگر و فقط اگر F پیوسته و چگالی آن f لگ-مقعر باشد (یعنی لگاریتم چگالی آن مقعر باشد).

کلاس ۱۸ [۳۰] نیز مشخصه‌سازی دیگری برای توزیع‌های قویاً تک‌مدی ارائه داده است. همچنین مشابه ابراهیمف، کیوکلسکو و تئودورسکو [۱۸]^{۱۹} خاصیت قویاً تک‌مدی ضربی 20 را برای حاصلضرب دو متغیر تصادفی تعریف و مشخصه‌سازی کردند. کیلسون و گربر [۲۸] برای حالت گسسته مانند حالت پیوسته تعریف و مشخصه‌سازی مشابهی را به صورت زیر ارائه دادند.

تعریف ۴ توزیع P تعریف شده روی مجموعه اعداد صحیح قویاً تک‌مدی نامیده می‌شود اگر پیش از $P * Q$ برای هر توزیع تک‌مدی Q با تکیه‌گاه مجموعه اعداد صحیح، تک‌مدی باشد.

قضیه ۵ توزیع گسسته $P = \{p_n\}$ قویاً تک‌مدی است اگر و فقط اگر

$$p_n^2 \geq p_{n-1}p_{n+1}, \quad \forall n.$$

۳ تک‌مدی‌های تعمیم‌یافته

اولشن و ساویج [۳۲] تعریفی برای خاصیت تک‌مدی تعمیم‌یافته با استفاده از یک پارامتر مثبت α ارائه دادند

Wintner^{۱۶}

Ibragimov^{۱۷}

Klaassen^{۱۸}

Cuculescu and Theodorescu^{۱۹}

Multiplicative Strong Unimodality^{۲۰}

که در واقع نتایج آن‌ها، کاربنیادی خین چین درباره تک‌مدی بودن توزیع‌ها را تعمیم داد.

تعریف ۵ بردار تصادفی n -بعدی X ، دارای توزیع α -تک‌مدی حول بردار صفر است اگر برای هر تابع کراندار، نامنفی و بول-اندازه‌پذیر g تعریف‌شده روی R^n ، تابع $t^\alpha E[g(tX)]$ زمانی که $t \in (0, +\infty)$ ، غیرنزولی باشد.

با توجه به تعریف فوق به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر X ، α -تک‌مدی و $\alpha > \beta$ باشد، آنگاه X ، β -تک‌مدی خواهد بود. بنابراین، بهترین α در این‌جا، کوچکترین مقدار ممکن برای α است.

در قضیه زیر یکی از مشخصه‌سازی‌های اولشن و ساویج [۳۲] در این زمینه را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶ بردار تصادفی n -بعدی X ، دارای توزیع α -تک‌مدی حول بردار صفر است اگر و فقط اگر X با $U^{1/\alpha}Z$ هم‌توزیع باشد که در آن $U \sim (0, 1)$ و Z یک بردار تصادفی مستقل از U است.

با توجه به مطالب بالا می‌بینیم که تک‌مدی روی R همان ۱-تک‌مدی است.

همانند توزیع‌های α -تک‌مدی پیوسته، تعمیم‌یافته توزیع‌های تک‌مدی گسسته، توزیع‌های α -تک‌مدی گسسته می‌باشد که اولین بار به وسیله ابواماه [۱]^{۲۱} تعریف شد. سپس این تعریف مورد توجه استیوتل [۳۵]^{۲۲} قرار گرفت و پس از او علامت‌ساز [۷] به آن پرداخت. استیوتل توزیع‌های α -تک‌مدی را با توجه به ایده

α -یکنوایی مورد بررسی قرار داد و بیان کرد که تعریف ابواماه کاملاً صحیح نیست. پس از آن ابواماه تعریف خود را اصلاح کرد و ادعا کرد که مشخصه‌سازی‌های وی در مقاله اش [۲] کماکان به اعتبار خود باقی است. علامت‌ساز [۷] نشان داد که این ادعا درست نبوده و مشخصه‌سازی‌های جانشین را برای این توزیع‌ها ارائه داد. پس از آن افراد زیادی در این حیطه وارد شدند که از تازه‌ترین آن‌ها می‌توان به تعمیم و بسط‌های ارائه شده توسط آقابابایی و علامت‌ساز [۳] اشاره کرد که کارهای قبلی را دربر می‌گیرد.

ابتدا ایده α -یکنوایی را با استفاده از تعریف ضرب تعمیم‌یافته $u \otimes Y$ که توسط استیوتل و ون هارن [۳۶]^{۲۳} ارائه شد بیان می‌کنیم.

تعریف ۶ فرض کنید Y یک متغیر تصادفی تعریف‌شده روی $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ و $u \in [0, 1]$ باشد. آنگاه ضرب تعمیم‌یافته $u \otimes Y$ به صورت

$$u \otimes Y = \sum_{i=1}^Y X_i$$

تعریف می‌شود که در آن X_i -ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک برنولی با احتمال موفقیت u و مستقل از Y است.

با توجه به تعریف فوق، استیوتل [۳۵] متغیرهای α -یکنوای تعریف‌شده روی N_0 را به صورت زیر تعریف کرد.

Abouammoh^{۲۱}
Steutel^{۲۲}
Van Harn^{۲۳}

تعریف ۷ متغیر تصادفی X بر $N_0 - \alpha$ یکنوا گفته می‌شود اگر متغیر تصادفی Y بر N_0 وجود داشته باشد به طوری که بتوان نوشت $X = U^{\frac{1}{\alpha}} \otimes Y$ که در آن $U \sim U(0, 1)$ مستقل از Y است.

با استفاده از این تعریف و مشخصه‌سازی توزیع‌های α -یکنوا، استیوتل [۳۱] نتیجه زیر را بیان کرد.

گزاره ۳ توزیع $\{p_n\}$ تعریف‌شده روی $N_0 - \alpha$ یکنوا است اگر و فقط اگر

$$p_n \geq \frac{(n+1)}{(\alpha+n)} p_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

بر این اساس ابواماه [۲] تعریف خود را به صورت زیر اصلاح کرد.

تعریف ۸ توزیع $\{p_n\}$ ، α -تک‌مدی حول صفر نامیده می‌شود اگر روابط زیر برقرار باشند

$$\begin{cases} (i) (\alpha - n)p_n \geq (1 - n)p_{n-1}, & n \leq 0 \\ (ii) (\alpha + n)p_n \geq (n + 1)p_{n+1}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

یکی از مشخصه‌سازی‌های ابواماه [۱] بیان می‌دارد که "توزیع $\{p_n\}$ با اولین گشتاور متناهی، α -تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر Q_n که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته باشد

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1} n p_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

در تساوی فوق $P_n = \sum_{k=-\infty}^n p_k$ ، تابع توزیع p_n و $Q_n = \sum_{k=-\infty}^n q_k$ ، تابع توزیع یک توزیع گسسته مانند

$\{q_n\}$ است."

اما مثال نقض زیر از علامت‌ساز [۷] نشان می‌دهد که این نتیجه درست نیست.

مثال ۲ فرض کنید $\alpha = 2$ و توزیع $\{p_n\}$ به صورت جدول ۱ باشد. واضح است که Q_n یک تابع توزیع گسسته است. اما می‌توان دید که برای $n = 2$ ، رابطه (۵i) برقرار نیست و در نتیجه $\{p_n\}$ ۲-تک‌مدی نیست.

اصلاح‌شده این نتیجه برای α -یکنوایی و α -تک‌مدی توسط علامت‌ساز [۷] به صورت زیر ارائه گردید.

قضیه ۷ (۱) توزیع $\{p_n\}$ ، α -یکنوا است اگر و فقط اگر

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1}(n+1)p_{n+1}, \quad n \in N_0,$$

تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته باشد.

(۲) توزیع $\{p_n\}$ ، α -تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر $\alpha p_0 \geq p_1$ و

$$Q_n = \begin{cases} \frac{(\alpha P_n - n p_n)}{(\alpha + p_1)}, & n \leq 0 \\ \frac{(\alpha P_n + p_1 - (n+1)p_{n+1})}{(\alpha + p_1)}, & n \geq 0 \end{cases},$$

یک تابع توزیع گسسته باشد.

مشاهده می‌کنیم که در این جا دیگر نیازی به متناهی بودن گشتاور اول توزیع نیز نمی‌باشد.

جدول ۱. توزیع $\{p_n\}$ در مثال ۲

n	کمتر از ۱-	۱-	۰	۱	۲	۳	بیشتر از ۳
p_n	۰	۰/۲۲۵	۰/۱۵	۰/۳	۰/۱۲۵	۰/۲	۰
P_n	۰	۰/۲۲۵	۰/۳۷۵	۰/۶۷۵	۰/۸	۱	۱
$Q_n = P_n - \frac{1}{n}P_n$	۰	۰/۳۳۷۵	۰/۳۷۵	۰/۵۲۵	۰/۶۷۵	۰/۷	۱

۴ خواص تک مدی و قویاً تک مدی متغیرهای تصادفی مرتب شده

ترتیبی آن توزیع است. تک مدی بودن آماره‌های رکورد توسط باساک و باساک^{۲۸} [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت، اما علیف^{۲۹} [۸] با یک مثال نقض نشان داد شرط تحذب $1/f$ را که آنان در نظر گرفته بودند برای تک مدی بودن مقادیر رکورد کافی نیست. کرامر^{۳۰} [۱۶] با همان شرایط آلام و هوآنگ و گوش، تک مدی و قویاً تک مدی بودن آماره‌های سانسور فزاینده را نتیجه گرفت و کرامر و همکاران [۱۷] تک مدی بودن حالت خاصی از آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته وقتی توزیع اولیه یکنواخت باشد را ثابت کردند.

برای بیان مطالب بعدی به تعریف زیر که توسط کمپس [۲۶ و ۲۷] ارائه شده است، نیاز داریم.

تعریف ۹ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f و $\bar{F} = 1 - F$ باشد. همچنین فرض کنید پارامترهای $n \in \mathbb{N}$ و $k > 0$ و $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1}) \in R^{n-1}$ که برای $n \geq 2$ و $r = 1, \dots, n-1$

$$\gamma_r = k + n - r + \sum_{j=r}^{n-1} m_j > 0,$$

و برای $n \in \mathbb{N}$ دلخواه است. متغیرهای تصادفی $X_{(r, n, \tilde{m}, k)}$ را $r = 1, \dots, n$ را آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته

تاکنون مدل‌های مختلفی از متغیرهای تصادفی مرتب شده معرفی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آماره‌های ترتیبی، مقادیر رکورد و به طور کلی k -رکورد، آماره‌های سانسور فزاینده و ... اشاره کرد. هر یک از این مدل‌ها با توجه به ساختاری که دارند، برای نوع خاصی از داده‌ها پیشنهاد شده‌اند (کمپس^{۲۴} [۲۶] ملاحظه شود).

مفهوم آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته را کمپس [۲۶ و ۲۷] به منظور تعمیم و تلفیق مدل‌های مختلف متغیرهای تصادفی (به طور صعودی) مرتب شده ارائه کرده است و بعد از آن بورکشات و همکاران^{۲۵} [۱۴]، دوگان آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته را مشابه تعریف کمپس، برای متغیرهای تصادفی به طور نزولی مرتب شده تعریف کردند.

مطالعه خاصیت تک مدی درباره این نوع متغیرها، توسط کارهوشمندانه آلام^{۲۶} [۴] صورت گرفت که تحذب $1/f$ ، که در آن f چگالی توزیع جامعه است، را برای تک مدی بودن توزیع آماره‌های ترتیبی کافی دانست. بعد از آن هوآنگ و گوش^{۲۷} [۲۳] نشان دادند قویاً تک مدی بودن یک توزیع به معنای قویاً تک مدی بودن آماره‌های

Kamps^{۲۴}
Burkschat and et al.^{۲۵}
Alam^{۲۶}
Huang and Ghosh^{۲۷}
Basak and Basak^{۲۸}
Aliev^{۲۹}
Cramer^{۳۰}

(GOSs) ^{۳۱} گویند هرگاه برای همه $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ و $0 \leq \tau_i \leq i$ و f لگ-مقعر باشد،

(۲) $k > 0$ ، برای هر $i = 1, \dots, n-1$ ، $m_i \geq -1$

و $0 \leq \tau_i \leq i$ و $h(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ (تابع نرخ خطر) لگ-مقعر باشد.

با استفاده از این قضیه و برقراری همین شرایط آنان نتیجه گرفتند که GOSs قویاً تک‌مدی هستند که کار هوآنگ و گوش را در بر می‌گیرد.

علیمحمدی و علامت‌ساز [۹] حالت مهم معینی از GOSs و دوگان آن‌ها DGOSs ^{۳۲} را که بسیاری از مدل‌های مشهور را در بر می‌گیرد در نظر گرفتند و تک‌مدی بودن آن را اثبات کردند. این کار علاوه بر آن‌که کار آلام را نتیجه می‌دهد، ایراد کار باساک و باساک را نیز برطرف می‌کند. برای ارائه این نتایج ابتدا فرض کنید $k \geq 1$ و $m_1 = \dots = m_{n-1} = m$ به گونه‌ای باشند که برای $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ داشته باشیم

$$\gamma_r = k + (n-r)(m+1) \geq 1.$$

در این حالت r -امین GOS (DGOS) را با $X_{(r,n,m,k)}$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنید برای $(m \in R)$ ، $g_m(x)$ و $c_{r-1} = \prod_{j=1}^r \gamma_j$ ، $r = 1, \dots, n$ روی $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{(1-(1-x)^{m+1})}{m+1}, & m \neq -1 \\ -\ln(1-x), & m = -1 \end{cases}. \quad (6)$$

با توجه به مطالب فوق، چگالی r -امین GOS و DGOS با یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته F ، به ترتیب به

تابع چگالی توأم آن‌ها به فرم زیر باشد

$$f_{X_{(1,n,\tilde{m},k)}, \dots, X_{(n,n,\tilde{m},k)}}(x_1, \dots, x_n) = k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} [\bar{F}(x_i)]^{m_i} f(x_i) \right) [\bar{F}(x_n)]^{k-1} f(x_n).$$

به عنوان حالت‌های خاص مشاهده می‌شود که با قرار دادن $k = 1$ و $m_1 = \dots = m_{n-1} = 0$ آماره‌های ترتیبی معمولی و برای $k \in N$ و $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$ مقادیر k -رکورد و برای حالت خاص $k = 1$ ، مقادیر رکورد به دست می‌آید.

قضیه و نتیجه زیر توسط چن و همکاران [۱۵] با استفاده از تعریف زیر، اثبات شده است. برای بردار $T = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ که در آن برای هر i ، $0 \leq \tau_i$ عددی صحیح، $0 \leq \tau_i \leq i$ و $X_{(0,n,\tilde{m},k)} = 0$ است، بردار $U(T)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$U(T) = (X_{(1,n,\tilde{m},k)}, \dots, X_{(2,n,\tilde{m},k)} - X_{(\tau_1,n,\tilde{m},k)}, \dots, X_{(n,n,\tilde{m},k)} - X_{(\tau_{n-1},n,\tilde{m},k)}).$$

قضیه ۸ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. آنگاه چگالی توأم $U(T)$ لگ-مقعر خواهد بود، اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

(۱) $k \geq 1$ ، برای هر $i = 1, \dots, n-1$ ، $m_i \geq 0$

^{۳۱} Generalized Order Statistics

^{۳۲} Chen and et al.

^{۳۳} Dual Generalized Order Statistics

با استفاده از (۶) می بینیم که $g_m(F(x))$ در این حالت غیرنزولی است. حال با توجه به فرض، f'/f^2 غیرصعودی بوده و در نتیجه عبارت داخل کروشه عبارت (۹) نسبت به x غیر صعودی است و عبارت بیرون از کروشه مثبت خواهد بود. بنابراین زمانی که x از $-\infty$ به ∞ تغییر می کند، $f'_{X(r,n,m,k)}(x)$ حداکثر یک بار از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد و در نتیجه $f_{X(r,n,m,k)}(x)$ تک مدی خواهد بود.

(۲) در این حالت تابع چگالی به فرم زیر است

$$f_{X(r,n,m,k)}(x) = \frac{k^r}{(r-1)!} \times (H(x))^{r-1} (\bar{F}(x))^{k-1} f(x), x \in R, \quad (9)$$

که $H(x) = -\ln(1 - F(x))$ تابع نرخ خطر تجمعی است. قابل توجه است که (۱۰) با در نظر گرفتن $k \in N$ در واقع چگالی آماره k -رکورد است. حال با مشتق گرفتن از (۱۰) داریم

$$f'_{X(r,n,m,k)}(x) = \frac{k^n}{(n-1)!} \times (H(x))^{n-1} (\bar{F}(x))^{k-1} f(x) h(x) \times \left[-(k-1) + \frac{(n-1)}{H(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \bar{F}(x) \right].$$

با به کار بردن شیوه استفاده شده در اثبات قسمت قبل و توجه به این نکته که حاصلضرب دو تابع غیرصعودی مثبت، غیرصعودی است، اثبات کامل می شود. البته در حالت $k=1$ دیگر نیازی به شرط تحدب $1/f$ نیست، زیرا چگالی حاصل، حاصلضرب توابع غیرنزولی می شود که تک مدی است. □

صورت زیر به دست می آید (کمپس [۲۶ و ۲۷])

$$f_{X(r,n,m,k)}(x) = \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \times (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1} (g_m(F(x)))^{r-1} f(x), \quad x \in R$$

و

$$f_{X_d(r,n,m,k)}(x) = \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \times (F(x))^{\gamma_r-1} (g_m(\bar{F}(x)))^{r-1} f(x), \quad x \in R.$$

قضیه ۹ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه GOS آن تک مدی خواهد بود.

(۱) برای $m \geq 0$ $1/f$ محدب باشد،

(۲) برای $m = -1$

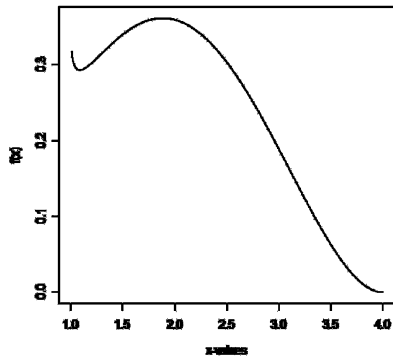
(a) $k=1$ و f در دامنه خود غیرنزولی باشد،

(b) $k > 1$ $1/f$ محدب و f در دامنه خود غیر

نزولی باشد.

اثبات. (۱) با استفاده از (۷) داریم

$$\begin{aligned} f'_{X(r,n,m,k)}(x) &= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \times \left[-(\gamma_r-1)f^2(x)(\bar{F}(x))^{\gamma_r-2}(g_m(F(x)))^{r-1} \right. \\ &\quad \left. + (r-1)f^2(x)(\bar{F}(x))^m \right. \\ &\quad \left. \times (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1}(g_m(F(x)))^{r-2} \right. \\ &\quad \left. + f'(x)(\bar{F}(x))^{\gamma_r-1}(g_m(F(x)))^{r-1} \right] \\ &= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} f^2(x)(g_m(F(x)))^{r-1} (\bar{F}(x))^{\gamma_r-1} \\ &\quad \times \left[-\frac{(\gamma_r-1)}{\bar{F}(x)} + \frac{(r-1)}{g_m(F(x))} (\bar{F}(x))^m + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$



شکل ۱. تابع چگالی مربوطه در مثال ۴.

شایان ذکر است که اخیراً علیمحمدی و علامت‌ساز [۱۰] تک‌مدی بودن GOS-ها را بدون محدودیت در مدل اثبات کردند که تمامی کارهای قبلی در این زمینه را به عنوان حالت خاص در بر می‌گیرد.

۵ کاربردها

ابتدا یک کاربرد ساده از قضیه (۱) را بیان می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X ، تک‌مدی در M و با میانگین و واریانس به ترتیب μ و σ^2 باشد. ابتدا در نظر می‌گیریم $M = 0$. طبق قضیه (۱)، X با UZ هم‌توزیع است. همچنین فرض کنید Z دارای میانگین ν و واریانس τ^2 باشد. از آنجایی که $E(U) = \frac{1}{\tau}$ و $E(U^2) = \frac{1}{\tau^2}$ به سادگی می‌توان دید که $\mu = 2\nu$ و $\sigma^2 = 3(\mu^2 + \tau^2)$ با حذف ν داریم $\mu^2 + \tau^2 = 3\sigma^2$ و در نتیجه $\mu^2 \leq 3\sigma^2$. این نامساوی برای حالت کلی با مد M به صورت زیر خواهد بود

$$(\mu - M)^2 \leq 3\sigma^2.$$

مثال ۳ توزیع نرمال از راست بریده‌شده در میانگین خود را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که شرایط قسمت (۲) قضیه برقرار است و GOS-هایی که از این توزیع تولید می‌شوند برای $m = -1$ تک‌مدی خواهند بود. برای قسمت (۱) می‌توان توزیع‌های نرمال، کوشی و حالت‌های خاصی از گاما و وایبل را نام برد. برای مثال‌های بیشتر می‌توان به علیمحمدی و علامت‌ساز [۹] مراجعه کرد.

مشابه قضیه قبل برای DGOS به صورت زیر است.

قضیه ۱۰ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه DGOS آن تک‌مدی خواهد بود.

(۱) برای $m > 0, m = -1$ ، $1/f$ محدب و f در دامنه خود غیرنزولی باشد،

(۲) برای $m = 0$ ، $1/f$ محدب باشد.

اکنون در تکمیل این نتایج، یک مثال نقض ارائه می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که حتی با برقراری دو شرط تحدب $1/f$ و غیرنزولی بودن f ، DGOS آن برای $m < 0$ و $m \neq -1$ می‌تواند تک‌مدی نباشد.

مثال ۴ فرض کنید $n = 4, k = 0.7, m = -0.7$ و $1 \leq x \leq 4, f(x) = x^2/21$ بدیهی است که $1/f$ محدب و f در دامنه خود غیرنزولی است. با این حال، همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، $f_{X(r,4,-0.7,0.7)}(x)$ تک‌مدی نیست.

برای کاربردهای دیگر این مباحث در قابلیت اعتماد و اقتصاد به ترتیب می‌توان به سن گوپتا و ناندا [۳۳] و باگنولی و برگستروم [۳۸] [۱۳] مراجعه کرد.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

یکی از خواص مهم و مطلوب در نظریه توزیع‌ها خاصیت تک‌مدی توزیع‌ها است که از آن مفاهیم مهم و کاربردی دیگری مانند قویاً تک‌مدی مشتق می‌شود. البته هرکدام از این مفاهیم در حالت گسسته و پیوسته تعابیر مربوط به خود را دارند. در این مباحث، تحدب و لگ-مقعر بودن نقش بسیار اساسی بازی می‌کند و لذا دانستن خواص و رفتارهای ریاضی‌وار این مفاهیم لازم و ضروری است. همچنین بر اساس خواص تک‌مدی می‌توان مشخصه‌سازی‌هایی را برای توزیع‌ها ارائه داد. بررسی این مفاهیم در توزیع متغیرهای تصادفی مرتب‌شده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و در چند دهه اخیر منجر به تولید نتایج مفید و متعددی در این زمینه شده است. در این مقاله علاوه بر بیان این مباحث، با یک مثال نقض نشان دادیم که خاصیت تک‌مدی در این مدل‌های ترتیبی، برای همه مقادیر پارامترها می‌تواند به خوبی عمل نکند. در پایان لازم است اشاره کنیم که خواص تک‌مدی و تحدب، علاوه بر کاربرد در شاخه‌های مختلف آمار و احتمال، در مباحث بهینه‌سازی، اقتصاد و حتی مهندسی کاربرد بسیاری دارند.

این نامساوی توسط جانسون و راجرز [۲۵] ارائه شد. بدیهی است که این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود اگر و فقط اگر Z تباہیده باشد و این یعنی اگر و فقط اگر X یکنواخت باشد.

کاربرد دیگری که در اینجا مطرح می‌کنیم، کاربرد خاصیت قویاً تک‌مدی در مباحث قابلیت اعتماد است. کلاس‌بندی متغیرها (و یا توزیع آنها) در قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از جمله می‌توان به کلاس‌های با تابع نرخ خطر صعودی [۳۵] (IFR) اشاره کرد. قضیه زیر از بارلو و پروشان [۱۱] ارتباط بین خاصیت قویاً تک‌مدی و IFR بودن را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱ اگر تابع توزیع F دارای چگالی لگ-مقعر (قویاً تک‌مدی) f باشد، آنگاه f, F IFR است.

اثبات. برای $t_1 < t_2$ و $0 < x$ ، لگ-مقعر بودن f نتیجه می‌دهد که $\frac{f(t_1+x)}{f(t_1)} \geq \frac{f(t_2+x)}{f(t_2)}$ و یا

$$f(t_2)f(t_1+x) \geq f(t_1)f(t_2+x).$$

با انتگرال‌گیری روی $(0, \infty)$ نسبت به x به دست می‌آوریم $f(t_2)\bar{F}(t_1) \geq f(t_1)\bar{F}(t_2)$. بنابراین $\frac{f(t_2)}{F(t_2)} \geq \frac{f(t_1)}{F(t_1)}$ و اثبات تمام است. □

در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که کار آلام [۴] به طور غیرمستقیم نتیجه‌ای درباره تک‌مدی بودن توزیع طول عمر یک سیستم k از n می‌دهد، زیرا چنین سیستمی زمانی از کار می‌افتد که حداقل k جزء آن از کار بیفتد و بنابراین طول عمر آن برابر با آماره ترتیبی k -ام است.

Johnson and Rogers^{۳۴}
Increasing Failure Rate^{۳۵}
Barlow and Proschan^{۳۶}
Sengupta and Nanda^{۳۷}
Bagnoli and Bergstrom^{۳۸}

مراجع

- [1] Abouammoh, A.M. (1987), On discrete α -unimodality, *Statistica Neerlandica*, 41, 239-244.
- [2] Abouammoh, A.M. (1988), Corretion to 'On discrete α -unimodality', *Statistica Neerlandica*, 42, 141.
- [3] Aghababaie, M. and Alamatsaz, M.H. (2011), Two new thinning operators and their applications, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, preprint.
- [4] Alam, K. (1972), Unimodality of the distribution of an order statistic, *The Annals of Mathematical Statistics*, 43, 2041-2044.
- [5] Alamatsaz, M.H. (1983), On structural aspects of probability distributions and their mixtures with applications in queuing theory, Ph.D. Thesis, University of Sheffield, Sheffield.
- [6] Alamatsaz, M.H. (1990), On modality and divisibility of Poisson and binomial mixtures, *J. Sci. I.R. Iran*, 3, 202-207.
- [7] Alamatsaz, M.H. (1993), On discrete α -unimodal distributions, *Statistica Neerlandica*, 47, 245-252.
- [8] Aliev, F.A. (2003), A comment on 'Unimodality of the distribution of record statistics', *Statistics and Probability Letters*, 64, 39-40.
- [9] Alimohammadi, M. and Alamatsaz, M.H. (2010), On unimodality of generalized order statistics and their dual, *Proceedings of the 10th Iranian Statistics Conference*, 41-48.
- [10] Alimohammadi, M. and Alamatsaz, M.H. (2011), Some new results on unimodality of generalized order statistics and their spacings, *Statistics and Probability Letters*, 81, 1677-1682.
- [11] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

- [12] Basak, P. and Basak, I. (2002), Unimodality of the distribution of record statistics, *Statistics and Probability Letters*, 56, 395-398.
- [13] Bagnoli, M. and Bergstrom, T. (2005), Log-concave probability and its applications, *Economic Theory*, 26, 445-469.
- [14] Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps, U. (2003), Dual generalized order statistics, *Metron*, 61, 13-26.
- [15] Chen, H., Xie, H. and Hu, T. (2009), Log-concavity of generalized order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 79, 396-399.
- [16] Cramer, E. (2004), Logconcavity and unimodality of progressively censored order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 68, 83-90.
- [17] Cramer, E., Kamps, U. and Rychlik, T. (2004), Unimodality of uniform generalized order statistics, with applications to mean bounds, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56, 183-192.
- [18] Cuculescu, I. and Theodorescu, R. (1998), Multiplicative strong unimodality, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 40, 205-214.
- [19] Dharmadhikari, S. and Joag-Dev, K. (1988), *Unimodality, Convexity, and Applications*, Academic Press, Boston.
- [20] Feller, W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2., 2nd Ed., Wiley, New York.
- [21] Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1954), *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Cambridge, Massachusetts.
- [22] Holgate, P. (1970), The modality of some compound Poisson distributions, *Biometrika*, 57, 666-667.
- [23] Huang, J.S. and Ghosh, M. (1982), A note on strong unimodality of order statistics, *Journal of the American Statistical Association*, 77, 929-930.

- [24] Ibragimov, I.A. (1956), On the composition of unimodal distributions, *Theory of Probability and Its Application*, 1, 255-260.
- [25] Johnson, N.L. and Rogers, C.A. (1951), The moment problem for unimodal distributions, *The Annals of Mathematical Statistics*, 22, 432-439.
- [26] Kamps, U. (1995a), *A Concept of Generalized Order Statistics*, Teubner, Stuttgart.
- [27] Kamps, U. (1995b), A concept of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48, 1-23.
- [28] Keilson, J and Gerber, H. (1971), Some results for discrete unimodality, *Journal of the American Statistical Association*, 66, 386- 389.
- [29] Khintchine, A.Y. (1938), On unimodal distributions, *Izv. Nauchno-Issled. Inst. Math. Mech. Tomsk. Gos. Univ.* 2, 1-7.
- [30] Klaassen, C.A.J. (1985), Strong unimodality, *Advances in applied probability*, 17, 905-907.
- [31] Medgyessy, P. (1972), On the unimodality of discrete distributions, *Period. Math. Hungar.* 2, 245-257.
- [32] Olshen, R.A. and Savage, L.J. (1970). A generalized unimodality, *Journal of Applied Probability*, 7, 21-34.
- [33] Sengupta, D. and Nanda, A.K. (1999), Log-concave and concave distributions in reliability, *Naval Research Logistics*, 46, 419-433.
- [34] Shepp, L.A. (1962), Symmetric random walk, *Trans. Amer. Math. Soc.* 104, 144-153.
- [35] Steutel, F.W. (1988), Note on discrete α -unimodality, *Statistica Neerlandica*, 48, 137-140.
- [36] Steutel, F.W. and van Harn, K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Annals of Probability*, 7, 893-899.
- [37] Wintner, A. (1938), *Asymptotic Distributions and Infinite Convolutions*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan.