

## توزیع گومپرتز تعمیم یافته یکه و کاربردهای آن

اعظم کاراندیش مروستی<sup>۱</sup> احسان ارمز<sup>۲</sup>، مریم بصیرت<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۵

چکیده:

در این مقاله، مفهوم توزیع گومپرتز تعمیم یافته یکه به عنوان مدل جدید تغییر یافته‌ای از توزیع‌های گومپرتز تعمیم یافته [۵] و گومپرتز یکه [۹] معرفی می‌شود. در این مقاله ضمن معرفی توزیع گومپرتز تعمیم یافته یکه خواص آن از جمله گشتاورها، توابع مولد گشتاور، چنک و خطر و آنترپی‌های تی سالیس و رنی توزیع پیشنهادی را مطالعه می‌کنیم. برای برآورد و استنباط در مورد پارامترهای مجهول مدل، روش‌های ماکسیم درست‌نمایی، برآورد ماکسیم حاصل ضرب فاصله‌ها و نمونه‌گیری خودگردان مورد بحث قرار گرفته‌اند و همچنین فاصله اطمینان مجانبی ارائه شده است. سرانجام، یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده و مدل به یک مجموعه داده واقعی برازش شده است. واژه‌های کلیدی: توزیع گومپرتز تعمیم یافته، گشتاور، ماکسیم درست‌نمایی، ماکسیم حاصل ضرب فاصله‌ها

### ۱ مقدمه

کهرت شناسی، علوم کامپیوتر، زیست‌شناسی و علم بازاریابی استفاده می‌شوند [۱، ۴، ۷].

الگوهری و همکاران [۵] با گسترش کار [۶]، توزیع گومپرتز تعمیم یافته<sup>۴</sup> (GG) را با توابع چگالی احتمال و توزیع زیر پیشنهاد کردند:

$$f(y) = \theta \lambda e^{cy} e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cy}-1)} [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cy}-1)}]^{\theta-1}, \quad (1)$$

$$y > 0, \theta > 0, \lambda > 0, c > 0,$$

$$F(y) = [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cy}-1)}]^{\theta}, \quad y > 0, \theta > 0, \lambda > 0, c > 0,$$

که در آن  $\theta > 0$  پارامتر شکل است. می‌توان نشان داد توزیع نمایی یک پارامتری، نمایی تعمیم یافته دو پارامتری و گومپرتز حالت‌های خاصی از این توزیع هستند.

در این مقاله با استفاده از تبدیل نمایی یک‌به‌یک به معرفی یک توزیع پیوسته جهت توسعه مدل GG می‌پردازیم که به آن توزیع گومپرتز تعمیم یافته یکه<sup>۸</sup> (UGG) می‌گوییم. این فرایند مشابه [۹] است با این تفاوت که به جای توزیع گومپرتز به عنوان توزیع پایه، در این مقاله از

امروزه استفاده از تجهیزات اندازه‌گیری مدرن مانند حسگرها در چندین شاخه از علوم کاربردی از جمله قابلیت اطمینان، مهندسی کیفیت و علوم زیست پزشکی و اجتماعی به سرعت در حال رشد است. این موضوع منجر به ایجاد مجموعه داده‌های جدید با رفتارهای مختلف در چولگی و کشیدگی می‌شود که نمی‌توانند به خوبی توسط توزیع‌های آماری کلاسیک مانند توزیع‌های نرمال، وایبول یا گومپرتز<sup>۴</sup> توصیف شوند. بر این اساس، خواسته‌های جدیدی برای توسعه توزیع‌های انعطاف‌پذیرتر برای پوشش این پدیده‌ها به وجود آمده است.

یکی از توزیع‌های معروف در قابلیت اطمینان، زیست‌شناسی و کهرت شناسی توزیع گومپرتز است که بنجامین گومپرتز<sup>۵</sup> در سال ۱۸۲۵ آن را معرفی کرد. ویلکنز [۱۱] نشان داد که توزیع گومپرتز روابط دقیق یا محدودی با توزیع‌هایی مانند وایبول، لوژستیک تعمیم یافته، نمایی، نمایی دوگانه یا گامبل<sup>۶</sup> دارد. این توزیع‌ها به طور گسترده‌ای برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های مختلف مانند داده‌های طول عمر و بقا،

گروه ریاضی و آمار، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

گروه ریاضی و آمار، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران (نویسنده مسئول: ehsanormoz@mshdiau.ac.ir)

گروه ریاضی و آمار، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

<sup>4</sup> Gompertz

<sup>5</sup> Benjamin Gompertz

<sup>6</sup> Gumbel

<sup>7</sup> Generalized Gompertz

<sup>8</sup> Unit generalized Gompertz

توزیع‌های چوله را دارد. از این رو، این توزیع می‌تواند رقیب قدرتمندی برای توزیع بتا و سایر توزیع‌های تعریف شده در بازه  $(0, 1)$  باشد. در بخش ۲، توزیع  $UGG$  را تعریف می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های توزیع  $UGG$  از جمله توابع توزیع و خطر را شرح می‌دهیم. در بخش ۳ گشتاورها و معیارهای مرتبط با توزیع  $UGG$  را بررسی می‌کنیم. بخش ۴ آنتروپی‌های تی سالیس و رنی روش  $UGG$  را محاسبه می‌کند. برآورد پارامترها در بخش ۵ ارائه شده است. مطالعه شبیه‌سازی و کاربردهای داده واقعی در بخش‌های ۶ و ۷ ارائه شده است.

## ۲ توزیع گومپرتز تعمیم یافته یکه

فرض کنید  $Y$  یک متغیر تصادفی نامنفی با توزیع  $GG$  و تابع چگالی و توزیع معرفی شده در (۱) باشد. با در نظر گرفتن تبدیل  $X := e^{-Y}$  توزیع  $UGG$  را بدست می‌آوریم. تابع چگالی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \theta \lambda x^{-(c+1)} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)} [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^{c-1},$$

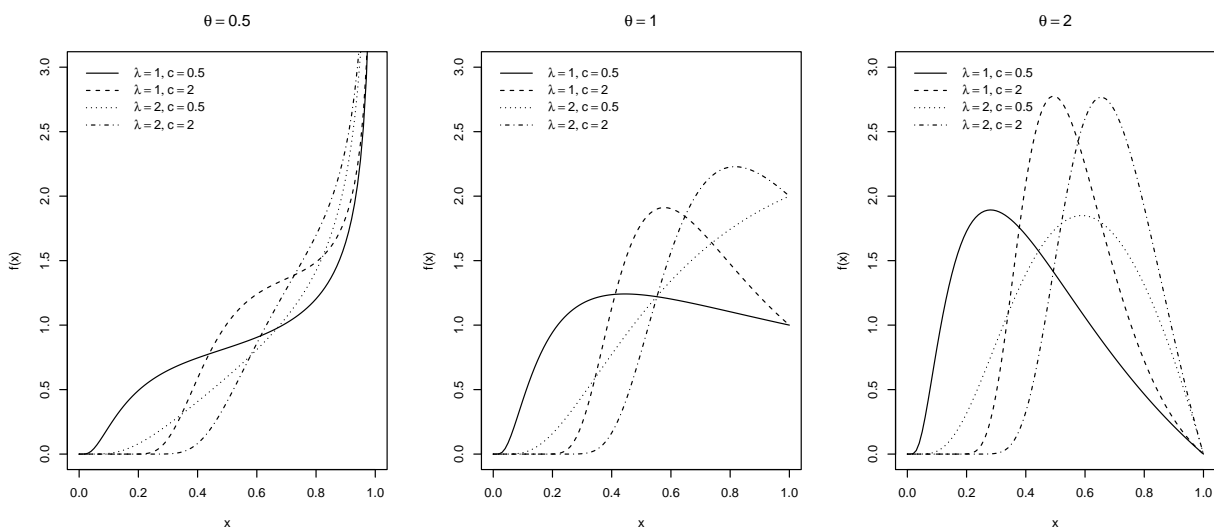
$$0 < x < 1, \theta > 0, \lambda > 0, c > 0. \quad (2)$$

شکل ۱، منحنی‌های مختلف تابع چگالی توزیع  $UGG$  به ازای مقادیر مختلف  $\theta, c, \lambda$  نشان می‌دهد. همچنین شکل ۱ نشان می‌دهد که توزیع  $UGG$  می‌تواند غیر نزولی،  $J$ -شکل معکوس<sup>۹</sup>، تک نمایی و چوله به چپ باشد.

توزیع گومپرتز تعمیم یافته معرفی شده در [۵] به عنوان توزیع پایه استفاده خواهیم کرد. با توجه به انعطاف پذیری بیشتر توزیع گومپرتز تعمیم یافته نسبت به توزیع گومپرتز، انتظار داریم که توزیع یکه حاصل نیز نسبت به توزیع گومپرتز یکه معرفی شده در [۹] انعطاف پذیری بیشتری داشته باشد. این موضوع در مثال کاربردی به وضوح قابل مشاهده خواهد بود و همچنین در گزاره ۱۰۲ مشاهده خواهیم کرد که توزیع گومپرتز یکه یکی از حالت‌های خاص توزیع گومپرتز تعمیم یافته یکه جدید است.

یکی از مشکلاتی که در تحلیل داده‌های واقعی وجود دارد پیدا کردن توزیع مناسب داده‌ها است. از این رو معرفی توزیع‌های انعطاف پذیری که بتوانند مجموعه داده‌های بیشتری برازش داده شوند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این موضوع برای داده‌های دارای دامنه محدود شده به بازه  $(0, 1)$  پررنگ‌تر است زیرا تعداد توزیع‌های معرفی شده برای چنین داده‌هایی نسبت به حالت‌های کلی محدودتر بوده و کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. به همین دلیل در این مقاله تلاش شده است توزیعی معرفی شود که بتواند به دامنه نسبتاً وسیعی از چنین داده‌هایی برازش یابد.

این توزیع به دلیل دارا بودن سه پارامتر از انعطاف پذیری بیشتری نسبت به توزیع‌های دو پارامتری برخوردار است. شکل این توزیع و تابع خطر آن بسیار انعطاف پذیرتر از توزیع‌های مشابه است. این انعطاف پذیری موجب عملکرد بهتر مدل‌سازی برخی از مدل‌های بیولوژیکی و صنعتی می‌شود. همچنین به دلیل انعطاف پذیری خوب تابع چگالی، این توزیع قابلیت مدل‌سازی توزیع‌های متقارن و همچنین



شکل ۱. تابع چگالی توزیع  $UGG$  به ازای  $\theta = 0.5, 1, 2$

<sup>9</sup> Reverse J-shaped

از سوی دیگر، برای  $y > 0$  داریم:  $y < 1 - e^{-y}$ . با فرض  $y \equiv \frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)$ ، به رابطه  $1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)} < \frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)$  دست می‌یابیم؛ بنابراین روابط زیر به دست می‌آید:

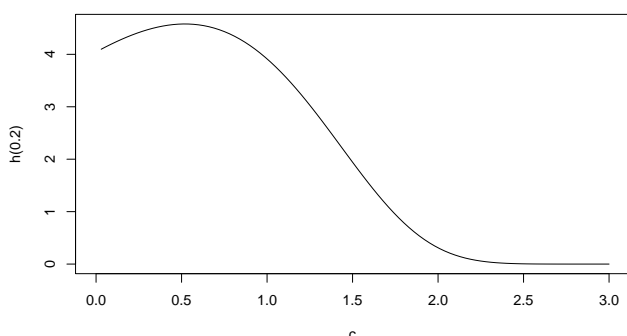
$$\frac{c}{\lambda} < \frac{x^{-c} - 1}{1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}$$

$$\frac{c}{\lambda} < (x^{-c} - 1) \left( 1 + \frac{e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}} \right).$$

در نتیجه (۶) عبارتی منفی است و تابع خطر نسبت به  $\lambda$  به طور یکنواخت نزولی است.

(ii) با توجه به (۵) بدیهی است. ■

شکل ۲ تابع خطر را در  $x = 0.2$  به ازای  $\theta = 2$  و  $\lambda = 0.5$  نشان می‌دهد. واضح است که در شکل ۲، تابع خطر نسبت به  $c$  رفتار یکنواختی ندارد.



شکل ۲. تابع خطر در  $x = 0.2$  به ازای  $\theta = 2$  و  $\lambda = 0.5$

شکل ۳ نیز منحنی‌های مختلف تابع خطر توزیع  $UGG$  را به ازای مقادیر مختلف  $\lambda, \theta$  و  $c$  نشان می‌دهد.

همچنین تابع توزیع متناظر می‌تواند به صورت زیر ارائه شود:

$$F(x) = 1 - [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^\theta, \quad 0 < x < 1, \theta > 0, \lambda > 0, c > 0. \quad (3)$$

گزاره زیر نشان می‌دهد که توزیع‌های بقای تعمیم یافته و گومپرتز یک حالت‌های خاصی از این توزیع هستند.

گزاره ۱.۰۲. تابع چگالی توزیع  $UGG$  دارای ویژگی‌های زیر است:

- (i) هرگاه  $c \rightarrow 0$ ، توزیع  $UGG(\theta, \lambda, c)$  به توزیع  $GB(\lambda, 1, 0, 1, \theta)$ <sup>۱۰</sup> تبدیل می‌شود.
- (ii) هرگاه  $\theta = 1$ ، توزیع  $UGG(\theta, \lambda, c)$  به توزیع  $UG(\frac{\lambda}{c}, c)$ <sup>۱۱</sup> معرفی شده در [۹] تبدیل می‌شود.

با معکوس کردن معادله (۳)، تابع چنک  $x = Q(p) = F^{-1}(p)$

توزیع  $UGG$  برای  $0 < p < 1$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q(p) = \left( 1 - \frac{c}{\lambda} \log(1 - (1-p)^{1/\theta}) \right)^{-1/c}. \quad (4)$$

یکی از ویژگی‌های پرکاربرد در قابلیت اطمینان تابع خطر است که برای توزیع  $UGG$  توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\theta \lambda x^{-(c+1)} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}. \quad (5)$$

ویژگی‌های رفتاری این تابع در گزاره زیر بیان شده است که انعطاف‌پذیری و پوشش فرم‌های متفاوت را منعکس می‌سازد.

گزاره ۲.۰۲. با توجه به رابطه (۵)، تابع خطر این توزیع دارای ویژگی‌های زیر است:

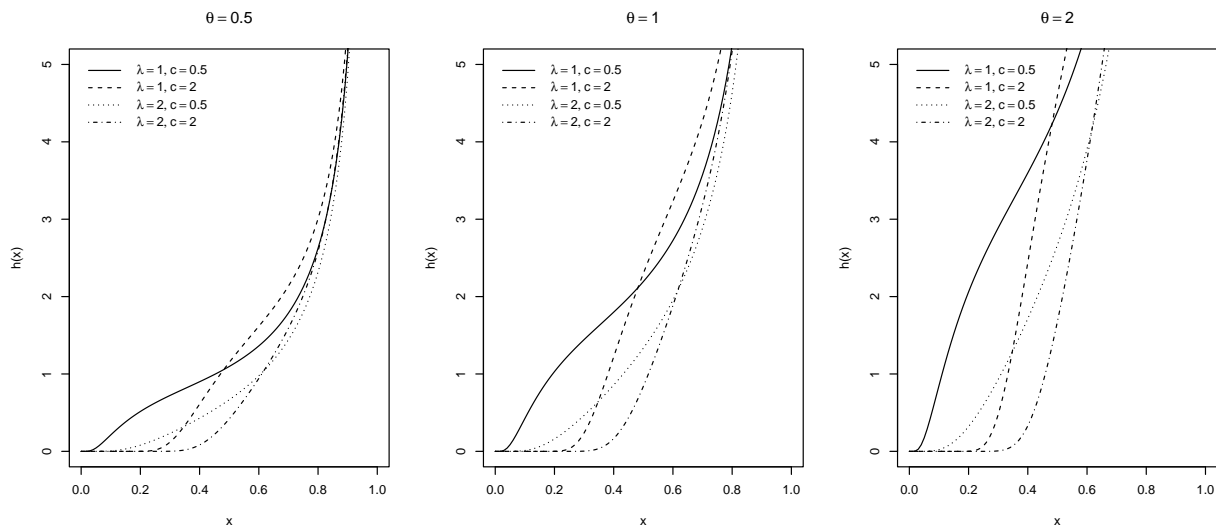
- (i) تابع خطر نسبت به  $\lambda$  به طور یکنواخت نزولی می‌یابد.
- (ii) تابع خطر نسبت به  $\theta$  به طور یکنواخت صعودی می‌یابد.

اثبات (i) رابطه زیر را داریم:

$$\frac{\partial \ln(h(X))}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{x^{-c} - 1}{c} - \frac{\frac{1}{c}(x^{-c} - 1)e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}. \quad (6)$$

<sup>10</sup>Generalized Beta Distribution

<sup>11</sup>Unit Gompertz Distribution



شکل ۳. تابع خطر توزیع UGG به ازای  $\theta = 0.5, 1, 2$

### ۳ گشتاورها و معیارهای مرتبط

کرد:

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) \\ &= \theta \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1/c} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\theta-1}{j} e^{\frac{\lambda(j+1)}{c}} \\ &\quad \times (j+1)^{1/c-1} \Gamma\left(\frac{\lambda(j+1)}{c}, \frac{1}{c} + 1\right). \\ \sigma^2 &= \theta \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{2/c} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\theta-1}{j} e^{\frac{\lambda(j+1)}{c}} \\ &\quad \times (j+1)^{2/c-1} \Gamma\left(\frac{\lambda(j+1)}{c}, \frac{2}{c} + 1\right) \\ &\quad - \left[ \theta \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1/c} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\theta-1}{j} e^{\frac{\lambda(j+1)}{c}} \right. \\ &\quad \left. \times (j+1)^{1/c-1} \Gamma\left(\frac{\lambda(j+1)}{c}, \frac{1}{c} + 1\right) \right]^2. \end{aligned}$$

متغیر تصادفی X با توزیع UGG را در نظر بگیرید. گشتاور  $r$ ام آن حول صفر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mu'_r &= E(X^r) \\ &= \theta \lambda \int_0^1 x^{r-c-1} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)} [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^{\theta-1} dx. \end{aligned}$$

با توجه به بسط دو جمله‌ای می‌توان نشان داد که

علاوه بر این، اندازه‌های کشیدگی و چولگی از روابط زیر به دست

می‌آیند:

$$\begin{aligned} \text{Kurtosis}(X) &= \frac{\mu'_4 - 4\mu'_2\mu + 6\mu'_2\mu^2 - 3\mu^4}{\sigma^4}, \\ \text{Skewness}(X) &= \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^3}{\sigma^3}. \end{aligned}$$

در شکل ۴، منحنی‌های مختلف توابع کشیدگی و چولگی توزیع UGG به ازای مقادیر مختلف  $\lambda, \theta, c$  رسم شده است. می‌توان مشاهده کرد که این توزیع هم چولگی مثبت و منفی و هم حالت متقارن را پوشش می‌دهد و از طرف دیگر همواره برجستگی مثبت دارد.

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \theta \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{r/c} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\theta-1}{j} e^{\frac{\lambda(j+1)}{c}} \\ &\quad \times (j+1)^{r/c-1} \Gamma\left(\frac{\lambda(j+1)}{c}, \frac{r}{c} + 1\right) \end{aligned}$$

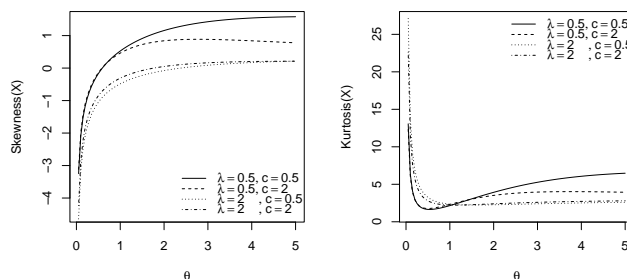
که در آن  $\Gamma(x, \alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  تابع گاما ناقص بالایی<sup>۱۲</sup> است.

بنابراین، میانگین و واریانس را می‌توان به صورت زیر محاسبه

<sup>12</sup> Upper incomplete gamma function

همچنین برای توزیع  $UGG$  آنتروپی رنی از مرتبه  $\alpha$  ( $\alpha > \frac{1}{c+1}$ ) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_R(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \log(\theta\lambda) + \frac{1}{\alpha - 1} \log \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda(j+\alpha)}{c}}}{\lambda(j+\alpha)} \left( \frac{c}{\lambda(j+\alpha)} \right)^{\alpha + \frac{\alpha-1}{c} - 1} \times \Gamma\left(\frac{\lambda(j+\alpha)}{c}, \alpha + \frac{\alpha-1}{c}\right) \right).$$



شکل ۴. کشیدگی و چولگی توزیع  $UGG$

## ۵ برآورد و استنباط

یکی از مسایل مهم در استنباط آماری برآورد پارامترها است. در این بخش، برآورد نقطه‌ای پارامترهای  $\theta, \lambda, c$  توزیع  $UGG$  را به سه روش بررسی می‌کنیم و یک فاصله اطمینان مجانبی نیز ارائه می‌دهیم.

### ۱.۵ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی

در زیر بخش حاضر، ابتدا برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی ( $ML$ ) را بررسی می‌کنیم و سپس با استفاده از این بخش، ماتریس اطلاعات فیشر مشاهده شده را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور، فرض کنید که  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  یک نمونه تصادفی با اندازه  $n$  از توزیع  $UGG$  با بردار پارامترهای  $\underline{\eta} = (\theta, \lambda, c)$  است. تابع لگاریتم درست‌نمایی توزیع  $UGG$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$l(\underline{\eta}) = \log L(\underline{x} | \underline{\eta}) = n \log(\theta\lambda) - (c+1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{\lambda}{c} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-c} - n \right) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}).$$

با گرفتن مشتقات جزئی تابع فوق نسبت به  $\theta, \lambda$  و  $c$ ، به ترتیب معادلات زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\underline{\eta})}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log(1 - A), \\ \frac{\partial l(\underline{\eta})}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-c} - n}{c} + \frac{(\theta - 1)}{c} \sum_{i=1}^n \frac{A(x_i^{-c} - 1)}{1 - A}, \\ \frac{\partial l(\underline{\eta})}{\partial c} &= - \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \frac{\lambda}{c^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-c} - n \right) + \frac{\lambda}{c} \sum_{i=1}^n x_i^{-c} \log(x_i) \\ &\quad - \frac{\lambda(\theta - 1)}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A(x_i^{-c}(1 + c \log(x_i)) - 1)}{1 - A}, \end{aligned}$$

## ۴ آنتروپی تی سالیس و رنی

آنتروپی یک متغیر تصادفی نقش مهمی در اندازه‌گیری عدم قطعیت و کاربردهای زیادی در مطالعات علوم و مهندسی دارد. آنتروپی شانون<sup>۱۳</sup> متغیر تصادفی  $X$  که با  $I_S$  نشان داده می‌شود و به صورت  $I_S = E(-\log(f(X)))$  تعریف می‌شود. دو تعمیم مهم آنتروپی شانون آنتروپی‌های تی سالیس و رنی هستند. برای متغیر تصادفی پیوسته  $X$ ، آنتروپی‌های تی سالیس و رنی از مرتبه  $\alpha$  به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I_T(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \left( \int f^\alpha(x) dx - 1 \right), \quad (7)$$

$$I_R(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \left( \int f^\alpha(x) dx \right). \quad (8)$$

اگر  $\alpha \rightarrow 1$ ، آنگاه (۷) و (۸) به آنتروپی شانون تبدیل می‌شوند. اکنون برای توزیع  $UGG$  آنتروپی‌های تی سالیس و رنی را ارائه می‌دهیم. اگر  $\theta > 1$  و  $\alpha(\theta - 1)$  عدد حقیقی غیرصحيح باشد، آنگاه آنتروپی تی سالیس از مرتبه  $\alpha$  ( $\alpha > \frac{1}{c+1}$ ) برای توزیع  $UGG$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$I_T(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \left( (\theta\lambda)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda(j+\alpha)}{c}}}{\lambda(j+\alpha)} \left( \frac{c}{\lambda(j+\alpha)} \right)^{\alpha + \frac{\alpha-1}{c} - 1} \times \Gamma\left(\frac{\lambda(j+\alpha)}{c}, \alpha + \frac{\alpha-1}{c}\right) - 1 \right).$$

<sup>13</sup> Shanon entropy

که در آن  $A = e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}$

که در آن ها

$$\begin{aligned} F'_\theta(x) &= -[1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^\theta \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}), \\ F'_\lambda(x) &= -\frac{\theta(x^{-c}-1)}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)} [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^{\theta-1}, \\ F'_c(x) &= \frac{\theta\lambda}{c^2} (cx^{-c} \log(x) + x^{-c} - 1) e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)} \\ &\quad \times [1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^{\theta-1}. \end{aligned}$$

با قرار دادن  $\frac{\partial l(\eta)}{\partial \theta} = \frac{\partial l(\eta)}{\partial \lambda} = \frac{\partial l(\eta)}{\partial c} = 0$  و حل همزمان این معادلات برآوردگر  $ML$  پارامترهای  $\theta$ ،  $\lambda$  و  $c$  به دست می آید. برآوردگر  $ML$ ، پارامتر  $\theta$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\hat{\theta} = \frac{-\sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)})}{n}.$$

بنابراین جواب همزمان این معادلات غیرخطی به ترتیب عبارتند از  $\hat{\theta}_{MPS}$ ،  $\hat{\lambda}_{MPS}$  و  $\hat{c}_{MPS}$ .

شایان ذکر است که برآوردگرهای  $\lambda$  و  $c$  فرم بسته نداشته و به روش عددی به دست می آیند.

## ۲.۵ برآوردگرهای ماکسیم حاصل ضرب فاصله ها

### ۳.۵ روش نمونه گیری خودگردان

ایده این نمونه گیری خودگردان  $(BS)^{15}$  استنباط در برآورد پارامتر جمعیت  $\theta$  بر روی داده های نمونه است. در این روش با نمونه برداری مجدد از نمونه موجود، نقاط داده جدیدی ایجاد می کنیم که به ما امکان استنباط می دهد. مراحل این روش به شرح زیر است:

(۱) محاسبه برآورد ماکسیم درستنمایی پارامترهای  $\theta$ ،  $\lambda$  و  $c$  و جایگذاری آن ها به ترتیب در  $\hat{\theta}$ ،  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{c}$ .

(۲) تولید نمونه تصادفی به کمک توزیع  $UGG$  از پارامترهای  $\hat{\theta}$ ،  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{c}$ .

(۳) محاسبه برآورد پارامترها با استفاده از نمونه تصادفی تولید شده در گام ۲ و نامگذاری آن ها به عنوان  $\hat{\theta}^{(b)}$ ،  $\hat{\lambda}^{(b)}$  و  $\hat{c}^{(b)}$ .

(۴) تکرار گام های ۲ و ۳ به تعداد ۱۰,۰۰۰ بار.

(۵) محاسبه برآوردگرهای کلی با استفاده از نمونه های تصادفی تولید شده در گام ۳ به عنوان  $\hat{\theta}$ ،  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{c}$ .

در این زیر بخش، برای برآورد پارامتر بردار مجهول توزیع  $UGG$  از روش ماکسیم حاصل ضرب فاصله ها  $(MPS)^{14}$  پیشنهاد شده در [۲] استفاده می کنیم که این روش بر اساس تفاوت بین مقادیر تابع توزیع در نقاط متوالی عمل می کند. فرض کنید  $x_{1:n}, x_{2:n}, \dots, x_{n:n}$  نمونه ای مرتب شده با اندازه  $n$  از توزیع  $UGG$  است.

برآوردگر  $MPS$  برای  $\theta$ ،  $\lambda$  و  $c$  (به ترتیب با نمادهای  $\hat{\theta}_{MPS}$ ،  $\hat{\lambda}_{MPS}$  و  $\hat{c}_{MPS}$  نشان داده شده) با به حداکثر رساندن میانگین هندسی تفاوت ها به دست می آید. با لگاریتم گرفتن از میانگین هندسی داریم:

$$\log GM = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \log(F(x_{i:n}) - F(x_{i-1:n}))$$

که در آن  $F(x_{n+1:n}) = 1$  و  $F(x_{0:n}) = 0$ . حال می خواهیم  $\log GM$  را نسبت به  $\theta$ ،  $\lambda$  و  $c$  ماکسیم کنیم. با گرفتن مشتقات جزئی نسبت به  $\theta$ ،  $\lambda$  و  $c$  از معادله فوق به ترتیب معادلات زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial \log GM}{\partial \theta} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F'_\theta(x_{i:n}) - F'_\theta(x_{i-1:n})}{F(x_{i:n}) - F(x_{i-1:n})} = 0,$$

$$\frac{\partial \log GM}{\partial \lambda} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F'_\lambda(x_{i:n}) - F'_\lambda(x_{i-1:n})}{F(x_{i:n}) - F(x_{i-1:n})} = 0,$$

$$\frac{\partial \log GM}{\partial c} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F'_c(x_{i:n}) - F'_c(x_{i-1:n})}{F(x_{i:n}) - F(x_{i-1:n})} = 0,$$

### ۴.۵ فاصله اطمینان مجانبی

در این زیر بخش، برای محاسبه فواصل اطمینان مجانبی پارامترهای مدل، از رفتار مجانبی برآوردگرهای  $ML$  استفاده می کنیم. مشتق دوم لگاریتم درستنمایی برای محاسبه ماتریس هسین و ماتریس اطلاعات فیشر مشاهده شده ضروری است که از روابط زیر به دست می آید:

<sup>14</sup> Maximum product spacing

<sup>15</sup> Bootstrap

## ۵.۵ فواصل اطمینان خودگردان

در این زیر بخش برای محاسبه فاصله اطمینان خودگردان از دو روش خودگردان صدکی و خطای استاندارد ( $SE$ ) استفاده می‌کنیم. در روش خودگردان صدکی  $\% (1-\gamma) 100$  برای  $\theta$  به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\left( \hat{\theta}_{((B+1)\frac{\gamma}{2})}^{(b)}, \hat{\theta}_{((B+1)(1-\frac{\gamma}{2}))}^{(b)} \right).$$

همچنین فاصله اطمینان در روش خودگردان  $SE$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left( \hat{\theta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\hat{se}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\hat{se}(\hat{\theta})} \right)$$

که در آن  $\hat{se}(\hat{\theta})$  به صورت زیر است:

$$\hat{se}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}^{(b)} - \hat{\theta})^2}.$$

بدیهی است که فواصل اطمینان سایر پارامترها نیز به صورت مشابه تعریف می‌شوند.

## ۶ مطالعه شبیه‌سازی

اکنون می‌توانیم تا روش‌های برآورد پارامترهای مختلف را با استفاده از شبیه‌سازی مقایسه کنیم. بدین منظور، ابتدا نمونه‌های تصادفی از توزیع  $UGG$  را با استفاده از روش تابع توزیع معکوس (۴) و با کمک اعداد تصادفی تولید شده از توزیع یکنواخت استاندارد تولید می‌کنیم. پارامترها به صورت  $\lambda = 1, 2, 3$  و  $c = 0.5, 2$ ،  $\theta = 0.5, 1, 3$  تنظیم شده‌اند. حجم نمونه برابر با  $n = 20, 50, 100$  در نظر گرفته شد و هر نمونه ۱۰۰۰ بار تکرار شد. در هر سناریو، پارامترها با استفاده از روش‌های  $ML$ ،  $MPS$  و  $BS$  برآورد شده‌اند. برای شبیه‌سازی و برآورد پارامتر از نرم‌افزار R نسخه ۴٫۱٫۰ استفاده شد. نتایج در جداول ۱ و ۲ آورده شده است.

در جدول ۱ آریبی و میانگین مربعات خطا ( $MSE$ ) برآوردها برای روش‌های  $ML$ ،  $MPS$  و  $BS$  ارائه شده است. در روش  $ML$  دقت برآوردها با افزایش حجم نمونه افزایش می‌یابد. روش  $MPS$  یک  $MSE$  بزرگ برای مقادیر کوچک  $\theta$  می‌دهد که با افزایش حجم نمونه کاهش می‌یابد. روش  $ML$  نسبت به هر دو روش  $MPS$  و  $BS$  آریبی کوچک‌تری دارد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \theta^2} &= -\frac{n}{\theta^2}, \\ \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{n}{\lambda^2} - \frac{(\theta-1)}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A(x_i^{-c}-1)(1-Ax_i^{-c})}{(1-A)^2}, \\ \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial c^2} &= \frac{-2\lambda}{c^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-c} - n \right) - \frac{2\lambda}{c^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-c} \log(x_i) \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-c} \log(x_i)^2 \right) \\ &\quad - \frac{(\theta-1)\lambda}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A}{1-A} \left\{ \frac{-2}{c} (x_i^{-c}-1) \right. \\ &\quad \left. - 2x_i^{-c} \log(x_i) - cx_i^{-c} \log(x_i)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{(\theta-1)\lambda^2}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A}{1-A} \left\{ x_i^{-c} - 1 + cx_i^{-c} \log(x_i) \right\}^2 \\ &\quad - \frac{(\theta-1)\lambda^2}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A^2}{(1-A)^2} \left\{ \frac{x_i^{-c}-1}{c} \right. \\ &\quad \left. + x_i^{-c} \log(x_i) \right\}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \theta \partial \lambda} &= \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \lambda \partial \theta} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n \frac{A(x_i^{-c}-1)}{1-A}, \\ \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \theta \partial c} &= \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial c \partial \theta} = -\frac{\lambda}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A}{1-A} (x_i^{-c}(1+c \log(x_i)) - 1), \\ \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial c \partial \lambda} &= \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \lambda \partial c} = \frac{1}{c^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-c} - n \right) + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n x_i^{-c} \log(x_i) \\ &\quad + \frac{\theta-1}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{A}{1-A} (x_i^{-c} - 1 + cx_i^{-c} \log(x_i)) \\ &\quad \times \left( -1 + \frac{2\lambda(x_i^{-c}-1)}{c(1-A)} \right), \end{aligned}$$

که در آن  $A = e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}$ . بر این اساس ماتریس اطلاعات فیشر به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{I}(\eta) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \theta \partial \lambda} & \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \theta \partial c} \\ \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \lambda \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial \lambda \partial c} \\ \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial c \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial c \partial \lambda} & \frac{\partial^2 l(\eta)}{\partial c^2} \end{bmatrix}$$

لذا توزیع مجانبی درست‌نمایی ماکسیم  $ML$  پارامتر ( $\hat{\eta}$ ) تحت شرایط نظم خفیف به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\sqrt{n}(\hat{\eta} - \eta) \rightarrow N(0, \dot{I}^{-1}(\eta)).$$

بر این اساس می‌توان فاصله اطمینان مجانبی پارامترها را محاسبه کرد.

جدول ۱۰۱ آریبی و (MSE) برای برآورد پارامترهای UGG در روش های مختلف

$\theta = 2$			$\theta = 1$			$\theta = 0.5$			روش	c	$\lambda$	n
c	$\lambda$	$\theta$	c	$\lambda$	$\theta$	c	$\lambda$	$\theta$				
۰.۹۶۶ (۰.۸۵۹)	۰.۱۳۰ (۰.۲۵۰)	۰.۱۰۳۳ (۰.۱۲۳۳)	۰.۱۲۴۰ (۰.۱۰۲۵)	۰.۰۲۲ (۰.۲۶۲)	۰.۳۵۲ (۰.۲۴۲)	۰.۱۲۲۳ (۰.۱۱۶۳)	۰.۱۳۳ (۰.۲۸۳)	۰.۱۲۲ (۰.۵۷)	ML	۲	۱	۲۰
۰.۲۰۶۲ (۰.۷۹۵۱)	۰.۵۶۱۹ (۰.۳۸۷۱)	۳.۲۴۵۵ (۱.۹۴۸۴)	۰.۲۲۳۸ (۰.۷۷۸۸)	۰.۲۱۱۱ (۱.۵۰۸۳)	۰.۹۳۷ (۰.۹۲۳۸)	۰.۲۳۶۵ (۱.۶۶۶۴)	۴.۴۱۱۳ (۱.۱۹۸۰)	۰.۲۲۰ (۰.۱۱۷۲)	MPS			
۰.۸۷۵۰ (۰.۳۳۸۸)	۲.۰۱۲۲ (۰.۰۶۱)	۰.۱۲۵۱ (۰.۷۷۷)	۱.۱۵۰۵ (۰.۳۳۹)	۰.۱۱۵ (۰.۶۹)	۰.۳۹۴ (۰.۰۸۶)	۱.۶۶۰۶ (۰.۳۵۸)	۰.۵۲۱۵ (۰.۰۷۱)	۰.۱۲۴ (۰.۰۲۰)	BS			
۰.۳۵۲ (۰.۰۸۶)	۰.۲۲۳ (۰.۷۱۴)	۰.۱۲۹۲ (۰.۲۴۹۰)	۰.۳۵۱ (۰.۰۹۰)	۰.۴۳۵ (۰.۹۸۴)	۰.۲۷۳ (۰.۲۳۰)	۰.۴۲۴ (۰.۰۹۲)	۰.۵۳۲ (۰.۱۱۸)	۰.۱۵۶ (۰.۵۷)	ML	۰.۵	۲	
۰.۹۰۷ (۱.۱۱۹۱)	۰.۳۵۹۳ (۰.۱۰۹۱)	۱.۷۳۶۰ (۰.۸۹۳۲)	۰.۹۸۵ (۰.۲۲۰۱۱)	۰.۷۶۶۴ (۱.۴۹۱۱)	۰.۳۹۹ (۰.۶۰۲۰)	۰.۶۶۰۵ (۰.۳۱۵۱۶)	۹.۰۳۶۲ (۲.۵۹۲۶۷)	۰.۳۷۱۳ (۰.۳۵۲۷)	MPS			
۲.۴۶۴۰ (۰.۰۲۱)	۰.۸۷۰۳ (۰.۳۲۸)	۰.۱۳۳۵ (۰.۶۶۶۰)	۰.۴۶۰۶ (۰.۰۲۲)	۱.۰۴۹۹ (۰.۳۲۶)	۰.۳۰۲ (۰.۰۷۴)	۰.۳۵۰ (۰.۰۲۵)	۱.۵۵۹۹ (۰.۲۷۸)	۰.۱۵۰ (۰.۰۱۹)	BS			
۰.۱۱۲۷ (۱.۱۱۵۱)	۰.۲۴۶ (۰.۱۷۶۷)	۰.۱۱۸۱ (۰.۲۵۱۲)	۰.۱۳۳۲ (۰.۱۳۱۱)	۰.۲۷۷ (۰.۲۲۳)	۰.۲۶۹ (۰.۲۴۶)	۰.۱۵۵۰ (۰.۱۳۷۶)	۰.۳۵۹ (۰.۲۴۸۷)	۰.۱۱۶ (۰.۰۵۴)	ML	۲	۳	
۰.۳۵۹۳ (۰.۱۴۵۰)	۰.۶۲۵۶ (۱.۲۸۹)	۱.۶۸۸۴ (۰.۷۶۳۹۵)	۰.۳۲۱۱ (۰.۳۲۱۲)	۰.۲۸۳۶ (۰.۷۱۳۲۷)	۰.۳۹۹ (۰.۵۳۶۳)	۰.۲۴۱۵ (۰.۵۲۸۰۵)	۶.۳۰۵ (۲.۵۵۹۳۲)	۰.۱۲۵ (۰.۰۸۷۵)	MPS			
۰.۸۶۷۷ (۰.۳۳۵)	۰.۰۳۲ (۰.۶۹۸)	۰.۱۲۵۳ (۰.۷۷۵)	۱.۱۵۲۸ (۰.۰۲۰۳)	۲.۰۶۵۸ (۰.۷۴۲)	۰.۲۱۳ (۰.۰۸۲)	۱.۶۶۹۴ (۰.۴۱۹)	۲.۵۷۶۹ (۰.۶۲۳)	۰.۱۴۰ (۰.۰۱۸)	BS			
۰.۶۸۰ (۰.۰۶۹۲)	۰.۱۱۹ (۰.۲۵۴)	۰.۷۴۱ (۰.۲۰۳۹)	۰.۵۹۱ (۰.۰۸۶۳)	۰.۰۶۷ (۰.۲۵۱)	۰.۳۵۸ (۰.۱۹۲)	۰.۹۳۷ (۰.۰۹۰۷)	۰.۰۲۲ (۰.۲۷۴)	۰.۰۶۷ (۰.۰۴۱)	ML	۲	۱	۵۰
۰.۲۴۴ (۰.۱۹۱۶)	۰.۲۱۴۶ (۰.۸۵۷۴)	۰.۶۹۹۴ (۱.۱۳۸۴)	۰.۱۲۵ (۰.۸۱۹۷)	۰.۷۶۰ (۰.۳۳۶۶)	۰.۱۲۴ (۰.۱۸۹)	۰.۱۸۷ (۱.۶۲۱۹)	۰.۳۳۴۴ (۰.۸۵۶۸۷)	۰.۰۹۵ (۰.۲۲۰)	MPS			
۰.۹۰۵۵ (۰.۳۱۳)	۲.۰۱۷۳ (۰.۰۲۴)	۰.۱۰۱۰ (۰.۷۱۲)	۱.۰۹۹۳ (۰.۳۲۲)	۰.۰۱۲ (۰.۰۵۰)	۰.۲۸۵ (۰.۰۸۵)	۱.۶۲۱۱ (۰.۳۷۲)	۰.۵۱۱۶ (۰.۰۶۴)	۰.۱۰۲ (۰.۰۲۱)	BS			
۰.۲۰۵ (۰.۰۸۲)	۰.۱۳۱ (۰.۵۲۲)	۰.۰۸۰ (۰.۲۰۱۶)	۰.۲۷۸ (۰.۰۸۵)	۰.۲۵۹ (۰.۷۰۷)	۰.۱۷۹ (۰.۱۸۳)	۰.۳۰۸ (۰.۰۸۷)	۰.۳۳۹ (۰.۸۹۶)	۰.۱۰۵ (۰.۰۴۲)	ML	۰.۵	۲	
۰.۰۰۱۸ (۰.۲۸۵۵)	۰.۹۲۷ (۰.۸۹۹۳)	۰.۱۹۹۴ (۰.۳۰۱۶۱)	۰.۰۵۳ (۰.۳۹۸۴)	۰.۰۸۹ (۰.۶۶۹۱)	۰.۳۲۲ (۰.۷۴۴)	۰.۰۶۱ (۰.۰۲۳)	۰.۱۳۹۲ (۰.۲۰۴۵)	۰.۰۸۵ (۰.۲۸۴)	MPS			
۲.۴۷۳۶ (۰.۰۱۶)	۰.۸۸۱۲ (۰.۲۶۶)	۰.۱۰۴۰ (۰.۷۲۸)	۰.۴۶۹۶ (۰.۱۶)	۱.۰۳۹۸ (۰.۲۹۶)	۰.۲۲۲ (۰.۰۸۱)	۰.۳۴۱ (۰.۰۱۸)	۱.۵۴۳۵ (۰.۳۳۶)	۰.۱۱۷ (۰.۰۲۱)	BS			
۰.۸۰۵ (۰.۰۵۸)	۰.۱۳۰ (۰.۱۵۵۰)	۰.۵۴۹ (۰.۲۱۳۷)	۰.۸۲۲ (۰.۱۶۵)	۰.۳۶۴ (۰.۱۸۲۲)	۰.۲۲۶ (۰.۱۸۱)	۰.۹۸۱ (۰.۱۲۹۱)	۰.۲۹۵ (۰.۲۰۰۵)	۰.۰۹۳ (۰.۰۲۲)	ML	۲	۳	
۰.۷۵۲ (۱.۷۷۸۲)	۰.۹۱۲۴ (۰.۱۵۵۵)	۰.۲۶۹۱ (۰.۵۴۳۵)	۰.۲۵۷ (۰.۲۶۱)	۰.۰۰۰۴ (۱.۸۴۱۳)	۰.۳۱۰ (۰.۰۸۳۵)	۰.۰۰۰۸ (۰.۲۹۱۲۳)	۰.۹۴۸ (۰.۵۶۰۵۹)	۰.۰۹۵ (۰.۱۴۱)	MPS			
۰.۸۹۹۸ (۰.۳۰۳)	۰.۰۰۳ (۰.۳۰۶)	۰.۰۹۰۶ (۰.۶۹۸)	۱.۱۱۶۹ (۰.۳۱۳)	۲.۰۲۹۹ (۰.۶۲۱)	۰.۲۶۹ (۰.۰۸۱)	۱.۶۳۱۴ (۰.۳۳۸)	۲.۵۶۹۹ (۰.۶۷۳)	۰.۱۱۰ (۰.۰۲۱)	BS			
۰.۴۴۶ (۰.۵۵۲)	۰.۰۶۳ (۰.۲۵۴)	۰.۵۲۶ (۰.۱۸۱۵)	۰.۴۷۸ (۰.۶۸۹)	۰.۰۲۰ (۰.۲۴۸)	۰.۱۰۰ (۰.۱۳۹)	۰.۶۶۳ (۰.۷۹۸)	۰.۱۷ (۰.۲۴۱)	۰.۰۵۰ (۰.۰۳۰)	ML	۲	۱	۱۰۰
۰.۰۰۲۴ (۰.۰۵۴)	۰.۹۳۳ (۰.۳۰۸۹)	۰.۲۳۵۷ (۰.۲۳۱۴)	۰.۰۰۱ (۰.۳۳۰۷)	۰.۲۱۷ (۰.۴۴۷)	۰.۱۳۶ (۰.۴۳۱)	۰.۲۸۶ (۰.۳۸۵۶)	۰.۲۷۹ (۰.۱۵۵۶)	۰.۰۵۰ (۰.۰۸۰)	MPS			
۰.۸۳۱۲ (۰.۲۴۴)	۲.۰۱۵۳ (۰.۰۳۴)	۰.۰۶۶۶ (۰.۵۵۶)	۱.۰۷۲۴ (۰.۲۶۲)	۰.۰۳۵ (۰.۰۳۵)	۰.۱۶۳ (۰.۰۶۹)	۱.۵۹۱۲ (۰.۳۰۳)	۰.۵۰۳۲ (۰.۰۵۲)	۰.۰۸۲ (۰.۰۱۸)	BS			
۰.۱۳۶ (۰.۰۸۰)	۰.۱۵۴ (۰.۴۱۶)	۰.۶۵۸ (۰.۱۵۲۲)	۰.۱۲۳ (۰.۰۸۱)	۰.۲۹۵ (۰.۵۵۳)	۰.۱۷۶ (۰.۱۳۷)	۰.۱۸۵ (۰.۰۸۵)	۰.۲۹۰ (۰.۷۱۵)	۰.۰۷۳ (۰.۰۲۹)	ML	۰.۵	۲	
۰.۱۴۶ (۰.۱۲۵۵)	۰.۲۷۰ (۰.۳۷۱)	۰.۵۲۱ (۰.۸۷۸)	۰.۳۷۷ (۰.۱۶۸۵)	۰.۲۲۳ (۰.۲۷۶۱)	۰.۰۹۷ (۰.۳۳۴)	۰.۵۳۲ (۰.۲۵۰۲)	۰.۳۳۸ (۰.۳۳۷۱)	۰.۰۶۸ (۰.۰۶۴)	MPS			
۲.۴۷۹۹ (۰.۰۱۳)	۰.۸۸۲۳ (۰.۱۷۲)	۰.۰۸۲۶ (۰.۷۲۷)	۰.۴۷۶۷ (۰.۰۱۲)	۱.۰۳۳۴ (۰.۲۷۷)	۰.۲۱۱ (۰.۰۸۰)	۰.۲۶۴ (۰.۰۱۳)	۱.۵۴۶۶ (۰.۳۳۴)	۰.۰۹۱ (۰.۰۱۸)	BS			
۰.۳۷۱ (۰.۰۹۵۵)	۰.۰۶۵ (۰.۱۵۵۳)	۰.۳۹۰ (۰.۱۸۳۳)	۰.۵۳۷ (۰.۱۰۰۳۳)	۰.۱۴۶ (۰.۱۶۲۲)	۰.۱۰۹ (۰.۱۳۵)	۰.۷۰۷ (۰.۱۱۶۱)	۰.۲۰۹ (۰.۱۶۶۱)	۰.۰۶۸ (۰.۰۲۹)	ML	۲	۳	
۰.۲۰۲ (۰.۶۷۴۱)	۰.۱۱۰۴ (۱.۲۵۱۸)	۰.۰۸۲۸ (۱.۳۴۳۵)	۰.۷۷۰ (۰.۸۲۷۵)	۰.۲۱۶ (۰.۸۳۴۰)	۰.۳۱۴ (۰.۳۹۲)	۰.۴۹۲ (۱.۱۳۶۵)	۰.۱۱۲ (۰.۸۸۹۳)	۰.۰۷۴ (۰.۰۵۸)	MPS			
۰.۸۲۸۷ (۰.۲۵۹)	۰.۰۰۰۷ (۰.۳۱۲)	۰.۶۵۸ (۰.۶۶۱)	۱.۰۸۳۵ (۰.۲۵۱)	۲.۰۱۳۰ (۰.۵۲۸)	۰.۱۷۲ (۰.۰۷۳)	۱.۵۹۹۹ (۰.۲۷۶)	۲.۵۴۶۶ (۰.۶۱۹)	۰.۰۹۲ (۰.۰۱۸)	BS			

جدول ۲ میانگین طول و درصد پوشش فاصله اطمینان را در سناریوهای نشان می دهد. ما از دو روش BS، صدک و SE در محاسبه فاصله اطمینان خودگردان استفاده کرده ایم. در مقایسه، همه روش ها دارای احتمال پوشش بالا و فاصله متوسط کوتاه هستند. به طور کلی، با مقایسه روش های مختلف برآورد، روش ML برآوردهای دقیق تری نسبت به روش های BS و MPS دارد.

پتانسیل مدل UGG، برازش های توزیع UGG را با این توزیع ها مقایسه می کنیم.

مجموعه داده واقعی که ما استفاده کردیم شامل فرم های سه بعدی است که با استفاده از روش مبتنی بر الگوریتم خط دیفرانسیل (DLA)<sup>۱۶</sup> ایجاد و توسط مک کورمک و کرویز گامباردلا (۲۰۲۱) [۸] گزارش شده است. در این روش تصاویر پرسپکتیو یا تصاویر قائم بر صفحه  $x - y$  به تصاویر قابل چاپ سه بعدی تبدیل می شوند. این مجموعه داده ها از ستون تحذب DLA نشانی اینترنتی زیر است:

[https://figshare.com/articles/dataset/DLA\\_Form](https://figshare.com/articles/dataset/DLA_Form)

\_Generation\_dataset/۱۳۶۶۳۴۰۰=file?۲۶۲۳۳۷۰۱

## ۷ کاربردها

می دانیم که توزیع های گومپرتز یکه، بتا و کوماراسوامی معمولاً برای مدل سازی مجموعه های داده محدود استفاده می شوند. برای نشان دادن

<sup>16</sup>Differential Line Algorithm



جدول ۰۲. میانگین عرض و (درصد پوشش) برآورد *UGG* در روش های مختلف

$\theta = 2$			$\theta = 1$			$\theta = 0.5$			روش	c	$\lambda$	n
$\hat{c}$	$\lambda$	$\theta$	c	$\lambda$	$\theta$	c	$\lambda$	$\theta$				
۰.۳۳۵ (۰.۳۹)	( )	۳.۱۳۰۲ (۰.۹۹۹۹)	۳.۸۲۳۷ (۰.۹۹۹۹)	۲.۴۳۹۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۰۸۰۷ (۰.۸۶۱۷)	۲.۷۸۱۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۹۷۲۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۸۶۷ (۰.۹۹۹۹)	ML	۲	۱	۲۰
۰.۷۷۷۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۰.۸۲۸۰ (۰.۹۹۳)	۰.۵۳۰۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۶۶۰۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۹۳۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۵۹۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۲۵۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۰۵۴۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۸۸۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۵۹۳ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۲.۳۶۱۵ (۰.۹۹۹۹)	۲.۶۱۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۳.۸۶۱۱ (۰.۹۸۵۸)	۴.۱۷۲۵ (۰.۹۹۹۹)	۵.۰۹۲۸ (۰.۹۹۹۹)	۱.۶۴۲۹ (۰.۸۷۹۵)	۳.۳۱۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۰۶۲۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۰۰۷ (۰.۸۸۱۸)	ML	۰.۵	۲	
۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۰.۳۱۳۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۹۰۶ (۰.۸۸۲)	۱.۶۶۶۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۱۱۷ (۰.۹۹۹۹)	۱.۰۵۱۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۳۳۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۱۸۸ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۵۷۵ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۶۱۳ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۰.۳۶۷۷ (۰.۶۳۴)	( )	۲.۹۱۸۰ (۰.۹۹۸)	۰.۹۵۴۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۹۶۸۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۷۹۸۶ (۰.۹۷۸۴)	۰.۶۲۱۸۷ (۰.۹۹۹۹)	۴.۰۹۴۱ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۱۷۹ (۰.۹۹۹۹)	ML	۲	۳	
۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۷۱۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۱.۱۱۰۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۴۰۱۴ (۰.۹۹۹۹)	۱.۶۵۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۶۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۱.۵۸۸۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۲۷۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۱.۷۳۸۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۶۳۳ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۰.۲۸۳۱ (۰.۳۱۵)	( )	۱.۹۵۱۱ (۰.۹۹۹۹)	۲.۶۲۶۴ (۰.۹۹۹۹)	۱.۶۸۷۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۳۷ (۰.۸۲۹۸)	۱.۶۱۸۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۶۱۱۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۰۳۲ (۰.۹۹۹۹)	ML	۲	۱	۵۰
۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۸۵۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۴۶۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۱۹۸ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۰.۸۶۵۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۳۷۲ (۰.۹۹۹۹)	۱.۵۱۵۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۴۲۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۲۵۱ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴۵۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۹۷۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۵۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۱۶۴ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۱.۳۵۲۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۴۲۵۲ (۰.۹۹۹۹)	۱.۸۰۳۷ (۰.۹۲۸۶)	۲.۳۳۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۳.۰۶۰۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۹۹۱ (۰.۹۹۳۴)	۱.۶۰۵۹ (۰.۹۷۶۶)	۷.۸۶۲۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۸۱۳ (۰.۸۲۵۶)	ML	۰.۵	۲	
۰.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۴۰۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۹۵۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۰.۳۱۵۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۸۵۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۵۰۰۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۲۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۲۱۱ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴۵۳۱ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۲۸۶ (۰.۹۹۹۹)	۱.۰۰۰۸۱ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۱۳۳ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۰.۲۰۶۴ (۰.۰۰۰۸۵)	( )	۱.۷۸۷۵ (۰.۹۹۵)	۵.۳۹۶۶ (۰.۹۹۹۹)	۵.۷۶۲۸ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۴۹۴ (۰.۹۹۸۶)	۳.۴۸۶۴ (۰.۹۹۹۹)	۲.۷۰۲۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۳۷۷ (۰.۹۹۹۹)	ML	۲	۳	
۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۹۷۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۶۲۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۸۲ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۱.۰۹۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۳۵۶۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۵۳۳۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۵۰۷ (۰.۹۹۹۹)	۱.۴۴۹۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴۵۲۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۸۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۱.۵۵۵۵ (۰.۹۹۹۹)	۰.۲۱۴۸ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۰.۱۹۹۹ (۰.۲۴)	( )	۱.۳۶۶۵ (۰.۸۸۵)	۲.۰۲۸۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۳۲۵۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۶۷۷۵ (۰.۸۲۷۸)	۱.۱۱۷۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴۳۰۱ (۰.۷۵۵)	۰.۲۱۲۵ (۰.۹۴۵)	ML	۲	۱	۱۰۰
۰.۵۰۹۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۲۱۵ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۲۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۲۶۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۶۶۵ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۰.۸۱۹۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۵۳۵ (۰.۹۹۹۹)	۱.۴۵۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۹۳۷ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۳۷۵ (۰.۹۹۹۹)	۰.۴۰۵۱ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۴۸۷ (۰.۹۹۹۹)	۰.۵۳۰۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۸۲۲ (۰.۹۹۲)	SE			
۰.۹۵۰۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۹۲۲ (۰.۹۹۲۲)	۱.۳۰۷۰ (۰.۸۴۶۵)	۱.۵۹۳۵ (۰.۹۹۹۹)	۲.۱۶۶۲ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۰۸۷ (۰.۹۹۸۹)	۰.۸۹۵۴ (۰.۹۹۲۹)	۱.۱۵۷۰ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۸۷۲ (۰.۸۵۱۱)	ML	۰.۵	۲	
۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۰۳۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۶۰۲۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۰۹۷۳ (۰.۰۰۰۵)	Perc			
۰.۳۱۴۶ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۱۶۱ (۰.۹۹۹۹)	۱.۳۵۸۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۳۶۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۰۸۰ (۰.۸۹۳)	۰.۳۸۶۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۳۱۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۸۷۸ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۸۱۷ (۰.۹۹۹۹)	SE			
۰.۱۳۶۷ (۰.۰۰۰۰۵)	( )	۱.۲۵۶۸ (۰.۸۵۲)	۳.۰۱۵۰ (۰.۹۹۹۹)	۳.۴۳۳۴ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۷۶۲ (۰.۹۹۵۳)	۲.۳۷۱۴ (۰.۹۹۹۹)	۱.۸۸۲۶ (۰.۸۱۶)	۰.۲۳۰۲ (۰.۸۵۹)	ML	۲	۳	
۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۸۱۰۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۹۴۲۳ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۳۱۵ (۰.۹۹۹۹)	۰.۷۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۹۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۱۶۵ (۰.۹۹۹۹)	Perc			
۱.۰۵۷۷ (۰.۹۹۹۹)	۱.۳۳۰۳ (۰.۹۹۹۹)	۱.۴۱۵۰ (۰.۹۹۹۹)	۱.۱۲۵۹ (۰.۹۹۹۹)	۱.۳۵۳۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۳۹۶۷ (۰.۹۹۹)	۱.۱۵۵۶ (۰.۹۹۹۹)	۱.۲۳۹۹ (۰.۹۹۹۹)	۰.۱۸۳۷ (۰.۹۹۹۹)	SE			

چهار توزیع فوق به این مجموعه داده برازش داده شد و پارامترها با معیارها در جدول ۴ گزارش شده‌اند. استفاده از روش *ML* برآورد شدند.

جدول ۰۴. معیارهای نیکویی برازش و آماره مبتنی بر احتمال

BIC	AIC	AD	CvM	KS	UGG
-۱۵۸.۰۷۸	-۱۵۹.۰۶۴۲	۰.۵۳۱	۰.۱۰۵	۰.۰۵۳	گوامپرتز یک
-۱۴۵.۱۰۲۴	-۱۴۵.۸۰۶۷	۱.۱۷۶۸	۱.۹۳۶	۰.۱۴۴	بتا
-۱۵۷.۹۴۲۷	-۱۵۸.۶۴۷۰	۰.۹۲۹	۰.۱۷۵	۰.۰۵۹	کوماراسوامی
-۱۵۸.۰۶۳	-۱۵۸.۷۱۰۶	۱.۰۶۷	۰.۱۹۴	۰.۰۷۳	

در پایان، شکل‌های ۵-۷ نمودارهای احتمال-احتمال  $(p-p)$ ، توابع چگالی برازش یافته و هیستوگرام همه مدل‌های برازش شده را نشان می‌دهند. با مقایسه مجموعه داده‌ها، توزیع *UGG* نسبت به سایر توزیع‌ها از نظر معیارهای *BIC* و *AIC* و نتیجه آزمون‌های نیکویی برازش *AD*، *CvM*، *KS* عملکرد بهتری دارد. این موضوع توسط نمودارهای احتمال نرمال و همچنین چگالی داده‌های برازش داده شده هم تایید می‌شود.

برای تمامی محاسبات از نرم‌افزار R نسخه ۴.۱.۰ استفاده شده است. جدول ۳، برآوردهای *ML* و خطاهای استاندارد مربوط به آن‌ها را در داخل پرانتز برای توزیع‌های برازش نشان می‌دهد.

جدول ۰۳. برآورد ماکسیم درستیابی و (خطاهای استاندارد)

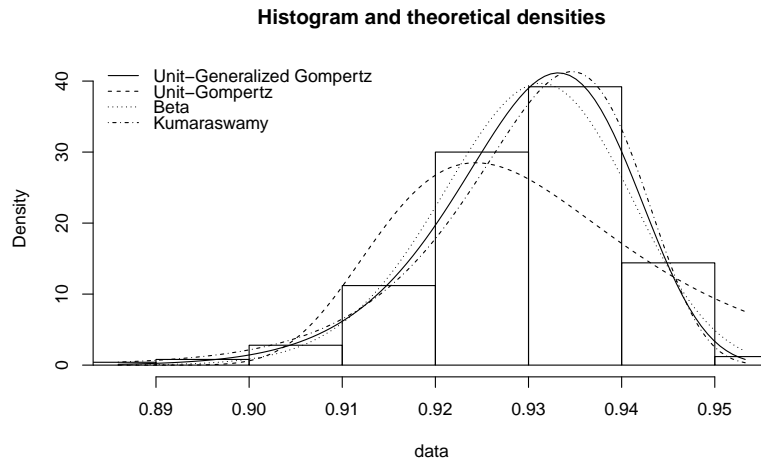
$\hat{c}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	UGG
۱۱.۱۶۸ (۶.۰۴۵)	۴۸.۴۰۲ (۲۰.۸۹۰)	۱۳۷.۶۸۸ (۴۰.۲۰۵۳)	گوامپرتز یک
-	۷۱.۳۴۹ (۷۸.۰۴)	۰.۰۰۳ (۰.۰۰۰۱)	بتا
-	۴۴.۵۲۹ (۳۹.۶۷)	۵۹۱.۲۶۱ (۵۲.۸۵۸)	کوماراسوامی
-	۱۱۹.۴۳۳ (۳۸۱.۸۳۴)	۱۰.۴۹۹۶ (۴.۹۶۱)	

برای مقایسه مدل‌ها، معیار اطلاعات بیزی (*BIC*)، آماره مبتنی بر احتمال معیار اطلاعات آکائیکه (*AIC*) و همچنین آزمون‌های نیکویی برازش مانند آماره‌های کولموگروف-اسمیرنوف (*KS*)، اندرسون-دارلینگ (*AD*) و کرامر-فون میزس (*CvM*) در نظر گرفته شد.

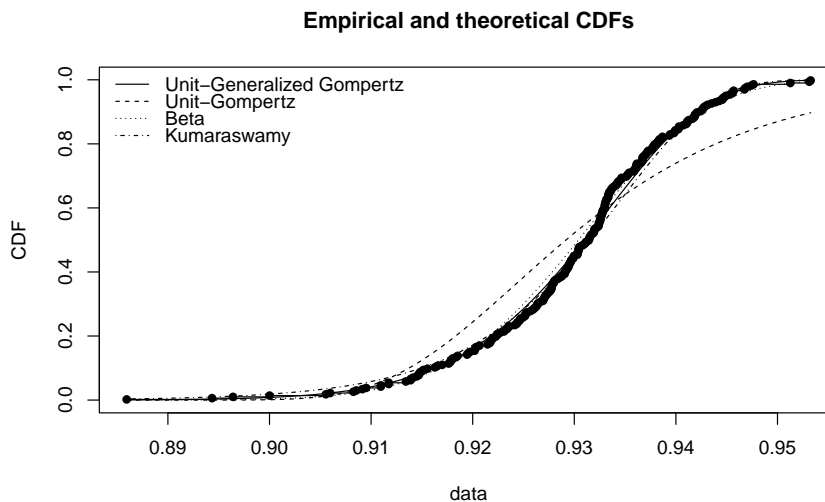
## ۸ بحث و نتیجه گیری

است و با توجه به این که دارای سه پارامتر می باشد نسبت به سایر توزیع های مشابه از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار است. برای نشان دادن پتانسیل مدل جدید در مقایسه با توزیع های گومپرتز یکه، بتا و کوماراسوامی، مثالی از مجموعه داده های واقعی ارائه و نشان دادیم که این توزیع نسبت به توزیع های دیگر برازش بهتری را به دست می دهد.

در این مقاله، توزیع جدیدی پیشنهاد شد که می تواند برای بازنگری مدل سازی داده های در بازه (۰, ۱) مفید باشد. برآورد پارامترهای این توزیع با روش های  $ML$ ،  $MPS$  و  $BS$  به دست آوردیم. نشان دادیم که توزیع  $UGG$  دارای فرم بسته برای توابع توزیع، چگالی و خطر



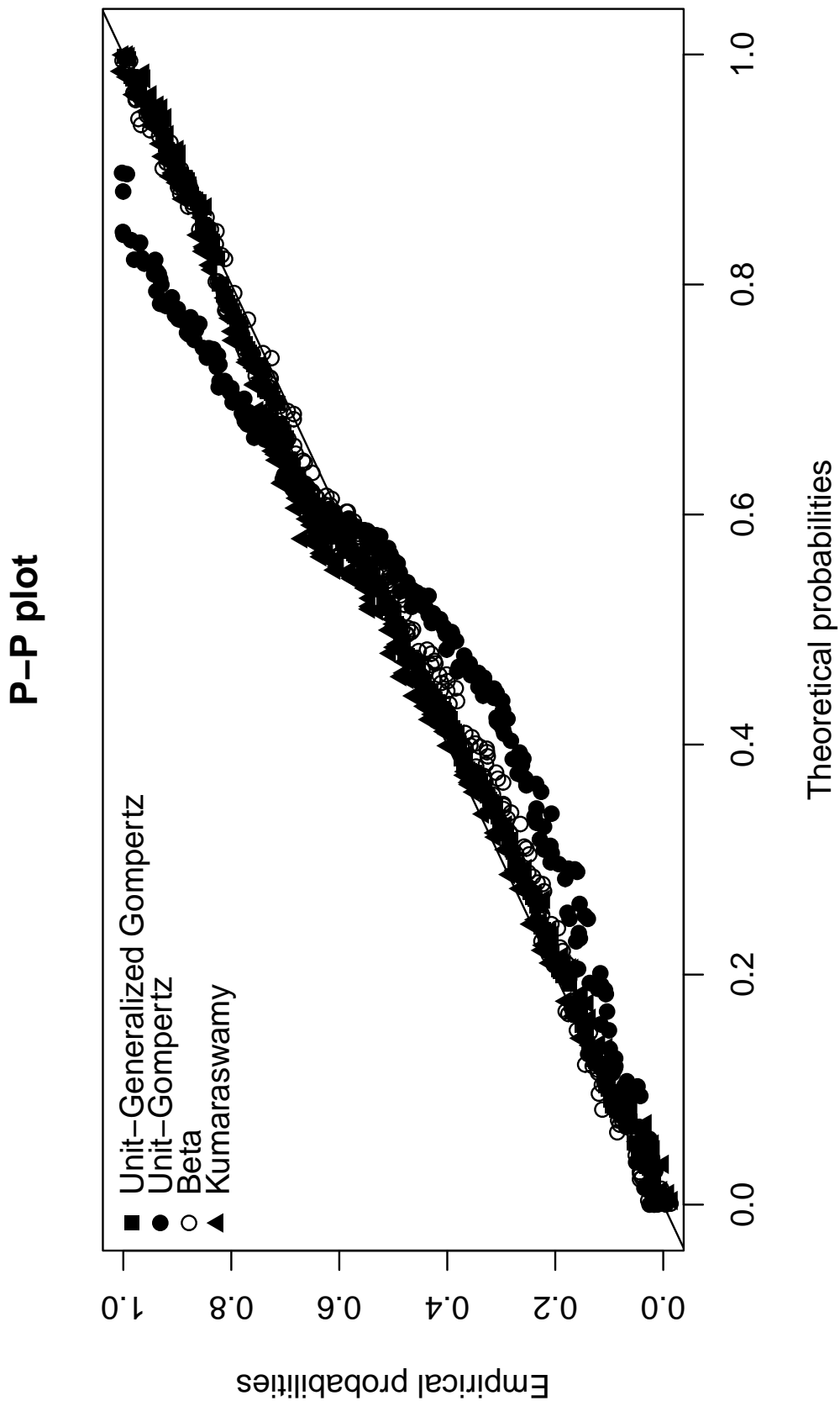
شکل ۵. برازش مدل ها به داده های  $DLA$



شکل ۶. تابع توزیع مدل ها بر داده های  $DLA$

## مراجع

- [1] Bemmaor, A. C., and Glady, N. (2012). Modeling purchasing behavior with sudden “death”: A flexible customer lifetime model. *Management Science*, **58**(5), 1012–1021.



شکل ۰۷. احتمالات نظری و تجربی مدل‌ها بر داده‌های *DIA*

- [2] Cheng, R. C. H., and Amin, N. A. K. (1983). Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **45(3)**, 394–403.
- [3] Cordeiro, G. M., Alizadeh, M., Nascimento, A. D., and Rasekhi, M. (2016). The Exponentiated Gompertz Generated Family of Distributions: Properties and Applications. *Chilean Journal of Statistics (ChJS)*, **7(2)**, 29–50.
- [4] Economos, A. C. (1982). Rate of aging, rate of dying and the mechanism of mortality. *Archives of Gerontology and Geriatrics*, **1(1)**, 3–27.
- [5] El-Gohary, A., Alshamrani, A., and Al-Otaibi, A. N. (2013). The generalized Gompertz distribution. *Applied Mathematical Modelling*, **37(1-2)**, 13–24.
- [6] Gupta, R. D., and Kundu, D. (1999). Theory & methods: Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **41(2)**, 173–188.
- [7] Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions*. volume 2, John Wiley & sons, Chapel Hill, NC, United State.
- [8] McCormack, J., and Cruz Gambardella, C., (2021). DLA Form Generation dataset. Monash University. Dataset. <https://doi.org/10.26180/13663400.v1>
- [9] Mazucheli, J., Menezes, A. F., and Dey, S. (2019). Unit-Gompertz distribution with applications. *Statistica*, **79(1)**, 25–43.
- [10] Ohishi, K., Okamura, H., and Dohi, T. (2009). Gompertz software reliability model: Estimation algorithm and empirical validation. *Journal of Systems and software*, **82(3)**, 535–543.
- [11] Willekens, F. (2001). Gompertz in context: the Gompertz and related distributions. *In Forecasting Mortality in Developed Countries*, 105–126, Springer, Dordrecht.

## Unit generalized Gompertz distribution and its application

Azam Karandish Marvasti<sup>1</sup> Ehsan Ormoz<sup>2</sup> and Maryam Basirat<sup>3</sup>

Abstract:

In this paper, the concept of unit generalized Gompertz (UGG) distribution will be introduced as a new transformed model of the Gompertz distribution. We calculate explicit expressions for the moments, moment generating, quantile, and hazard functions, and Tsallis and Rényi entropy. To estimate the unknown parameters of the model, the maximum likelihood, maximum product spacings, and bootstrap sampling have been discussed, and also approximate confidence interval is presented. Finally, a simulation study and an application to a real data set are given.

**Keywords:** Generalized Gompertz distribution, Moments, Maximum likelihood, Maximum product spacing.

---

<sup>1</sup>Department Mathematics and Statistics, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

<sup>2</sup>Department Mathematics and Statistics, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

<sup>3</sup>Department Mathematics and Statistics, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.