کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای انحراف استاندارد و آزمون آن در توزیع نرمال

نبز اسمعیل‌زاده،[۱] خسرو فضلی [۲]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۰۲

چکیده:

در این مقاله بر اساس نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال با پارامترهای مجهول، کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای پارامتر انحراف استاندارد را با استفاده از انحراف استاندارد نمونه به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم این بازه اطمینان را نمی‌توان با گرفتن ریشه دوم از نقاط انتهایی کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای واریانس که به‌وسیله *تَیت و کلِت* ارائه‌شده است، به دست آورد. همچنین جدولی برای محاسبه این بازه اطمینان برحسب چند اندازه نمونه و ضریب اطمینان رایج ارائه می‌دهیم. با توجه به ارتباط بازه اطمینان با مسئله آزمون فرض، عملکرد توان چند آزمون ساخته‌شده بر اساس بازه‌های اطمینان ذکرشده مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: طول بازه اطمینان، انحراف استاندارد، بازه اطمینان نااریب

۱ مقدمه

فرض کنید X_1، X_2، ...، X_N یک نمونه تصادفی با اندازه N از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ با پارامترهای مجهول μ و σ^2 است. استنباط آماری درباره این پارامترها مسئله‌ای قدیمی است که در متون کلاسیک آماری از زوایای مختلف به آن پرداخته شده است. در این مقاله پارامتر انحراف استاندارد را موردبررسی قرار می‌دهیم. به‌منظور مطالعه این موضوع، به‌طور سنتی استنباط‌هایی مانند ساخت یک بازه اطمینان برای پارامتر σ^2 بر اساس برخی بهینگی‌ها انجام می‌گیرد و برای پارامتر σ یعنی انحراف استاندارد معمولاً از ریشه دوم کران‌های اطمینان بالا و پایین بازه اطمینان متناظر برای واریانس استفاده می‌شود. اما همان‌گونه که در این مقاله نشان می‌دهیم بسته به نوع بهینگی، ممکن است یک بازه اطمینان بهینه برای σ^2 لزوماً با گرفتن ریشه دوم کران‌های آن، یک بازه اطمینان بهینه را برای σ نتیجه ندهد.

همان‌طور که می‌دانیم انحراف استاندارد برخلاف واریانس دارای واحد اندازه‌گیری یکسان با داده‌ها می‌باشد؛ بنابراین دارای معنی و تعبیری سرراست‌تر و طبیعی‌تر در مقایسه با واریانس است که واحد اندازه‌گیری آن مربع واحد اندازه‌گیری داده‌ها می‌باشد. علیرغم اهمیت ذاتی انحراف استاندارد، مسئله ساخت بازه اطمینان به‌طور مستقیم برای σ موردتوجه قرار نگرفته است. در این مقاله به این موضوع می‌پردازیم.

قرار دهید $n = N - 1$. بازه‌های اطمینان I برای σ^2 به‌صورت

$$I = \left(\frac{1}{b_n} nS^2, \frac{1}{a_n} nS^2\right), \qquad (1)$$

در [۴] در نظر گرفته‌شده‌اند که در آن $S^2 = (N-1)^{-1}\Sigma_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2$ واریانس نمونه، $\bar{X}$ میانگین نمونه و مخرج‌های $a_n < b_n$ اعدادی ثابت و مثبت هستند. برای ضریب اطمینان داده شده $1-\alpha$، چند نوع بهینگی از جمله بازه اطمینان با کمترین طول و بازه اطمینان نااریب به‌طور یکنواخت دقیق‌ترین (UMAU) برای پارامتر واریانس σ^2 موردبررسی قرار گرفته است [۱-۴]. همچنین در [۴] جدولی برای مخرج‌های a_n و b_n بر اساس اندازه نمونه، ضریب اطمینان و نوع بهینگی ارائه‌شده است. در این مقاله به‌جای واریانس، پارامتر انحراف استاندارد یعنی σ را در نظر می‌گیریم و بررسی مشابهی را برای انحراف استاندارد انجام می‌دهیم.

ابتدا بر اساس انحراف استاندارد نمونه یک بازه اطمینان با کوتاه‌ترین طول را برای انحراف استاندارد به دست می‌آوریم. سپس نشان می‌دهیم که این بازه کوتاه‌تر از بازه‌های به‌دست‌آمده از ریشه دوم کران‌های بازه اطمینان برای واریانس است. همچنین جدولی برای کمیت‌های مورداستفاده در محاسبه این بازه بر اساس اندازه نمونه و

[۱] گروه آمار دانشگاه کردستان
[۲] گروه آمار دانشگاه کردستان (نویسنده مسئول: khfazli@uok.ac.ir)

ضریب اطمینان‌های رایج تهیه می‌شود.

با توجه به اینکه هر بازه اطمینان معادل یک مسئله آزمون فرض است، در این مقاله آزمون فرض برای انحراف استاندارد بر اساس بازه‌های اطمینان مورد مطالعه را نیز در نظر می‌گیریم و آن‌ها را بر اساس توان آزمون مقایسه می‌کنیم. نتایج برای چند اندازه نمونه و مقادیر مختلف انحراف استاندارد به‌صورت نمودارهایی ارائه می‌شود.

سازمان‌دهی مقاله به این صورت است که در بخش ۲ کوتاه‌ترین بازه اطمینان را برای σ به دست می‌آوریم. در بخش ۳ بر اساس بازه‌های اطمینان بررسی‌شده، مسئله آزمون فرض برای انحراف استاندارد را با بررسی عملکرد توان آن‌ها در نظر می‌گیریم.

۲ کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای انحراف استاندارد

نخست بازه اطمینان نااریب به‌طور یکنواخت دقیق‌ترین با ضریب اطمینان $1-\alpha$ را برای σ^2 در نظر می‌گیریم که طبق تعریف بازه اطمینانی است که عبارت

$$P_{(\mu,\sigma^2)}\left\{\sigma'^2 \in I\right\}, \quad \forall\mu, \forall\sigma \neq \sigma',$$

را به‌طور یکنواخت در بین همه بازه‌های اطمینان I که در شرایط

$$P_{(\mu,\sigma^2)}\left\{\sigma^2 \in I\right\} = 1-\alpha, \qquad \forall\mu,\ \forall\sigma^2,$$

و

$$P_{(\mu,\sigma^2)}\left\{\sigma'^2 \in I\right\} \leq 1-\alpha, \quad \forall\mu, \forall\sigma \neq \sigma',$$

صدق می‌کنند، مینیمم می‌سازد ([۴] و [۱]). این بازه را با I_{SU} نمایش می‌دهیم. در [۴] نشان داده شده است که یک بازه اطمینان I_{SU} به‌صورت (۱) است که مخرج‌های a_n و b_n در معادلات

$$\begin{aligned} f_{n+2}(a_n) &= f_{n+2}(b_n) \\ \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx &= 1-\alpha, \end{aligned} \tag{۲}$$

صدق می‌کنند. در اینجا $f_n(x)$ تابع چگالی توزیع کای دو با $n = N-1$ درجه آزادی است، یعنی

$$f_n(x) = \frac{x^{n/2-1}\, e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}}, \qquad x > 0.$$

جدولی از مقادیر این مخرج‌ها برای اندازه نمونه‌ها و ضرایب اطمینان مختلف در [۴] داده شده است.

فرض کنید $0 \leq L \leq U$ دو آماره هستند. با توجه به تساوي پیشامدهاي $(L \leq \sigma^2 \leq U) = (\sqrt{L} \leq \sigma \leq \sqrt{U})$ نتیجه می‌شود که هر بازه اطمینان برای σ^2 معادل یک بازه اطمینان برای σ است؛ بنابراین با توجه به تعریف فوق، یک بازه اطمینان نااریب به‌طور یکنواخت دقیق‌ترین برای انحراف استاندارد ، با گرفتن ریشه دوم کران‌های اطمینان بازه متناظر برای واریانس حاصل خواهد شد.

همچنین به‌سادگی دیده می‌شود بازه اطمینان با دم‌های برابر برای انحراف استاندارد برابر است با

$$I_{ET} = \left(\frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n)}}, \frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}}\right) \tag{۳}$$

که از ریشه دوم بازه اطمینان با دم‌های برابر برای واریانس به دست می‌آید. در اینجا منظور از $\chi^2_\alpha(n)$، چندک بالایی مرتبه α برای توزیع کای دو با n درجه آزادی است.

در [۴] نشان داده شده است که مخرج‌های a_n و b_n برای کوتاه‌ترین بازه اطمینان به‌صورت (۱) با ضریب $1-\alpha$ برای σ^2 در معادلات

$$\begin{aligned} f_{n+4}(a_n) &= f_{n+4}(b_n) \\ \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx &= 1-\alpha, \end{aligned} \tag{۴}$$

صدق می‌کنند. بازه متناظر را با I_{ML} نمایش می‌دهیم. جدولی از مقادیر a_n و b_n برای اندازه نمونه‌ها و ضرایب اطمینان مختلف در [۴] داده شده است. اینک به مسئله یافتن بازه اطمینان با کمترین طول برای انحراف استاندارد در بین بازه‌های اطمینان به‌صورت

$$I = \left(\frac{1}{d_n}\sqrt{n}S\,, \frac{1}{c_n}\sqrt{n}S\right), \tag{۵}$$

می‌پردازیم. برای این کار باید طول بازه اطمینان (۵)، یعنی

$$\left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{d_n}\right)\sqrt{n}S,$$

را با توجه به قید

$$\int_{c_n}^{d_n} g_n(x)dx = 1-\alpha,$$

مینیمم کنیم که در آن g_n تابع چگالی $\frac{\sqrt{n}S}{\sigma}$ است که هم‌توزیع با متغیر تصادفی $\sqrt{\chi^2(n)}$ می‌باشد. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ برای تابع

$$\begin{aligned} \phi(c_n, d_n, \lambda) = &\left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{d_n}\right)\sqrt{n}S + \\ &\lambda\left(\int_{c_n}^{d_n} g_n(x)dx - 1 + \alpha\right), \end{aligned}$$

به دستگاه معادلات غیرخطی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} c_n^{۲}\ g_n(c_n) &= d_n^{۲}\ g_n(d_n), \\ \int_{c_n}^{d_n} g_n(x)dx &= ۱-\alpha. \end{aligned} \tag{۶}$$

با توجه به تساوی‌های

$$\begin{aligned} g_n(x) =& ۲x f_n(x^{۲}), \\ \int_{c_n}^{d_n} g_n(x) =& \int_{c_n^{۲}}^{d_n^{۲}} f_n(x)dx, \end{aligned}$$

معادلات (۶) معادل‌اند با

$$\begin{aligned} c_n^{۳}\ f_n(c_n^{۲}) &= d_n^{۳}\ f_n(d_n^{۲}), \\ \int_{c_n^{۲}}^{d_n^{۲}} f_n(x)dx &= ۱-\alpha. \end{aligned} \tag{۷}$$

با قرار دادن $C = c_n^{۲}$ و $D = d_n^{۲}$ معادلات (۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} C^N\ e^{-C} &= D^N\ e^{-D}, \\ \int_{C}^{D} f_n(x)dx &= ۱-\alpha. \end{aligned} \tag{۸}$$

اینک ابتدا ثابت می‌کنیم این معادلات دارای جواب‌های منحصربه‌فرد هستند. سپس نشان می‌دهیم این جواب‌ها با ریشه دوم جواب‌های معادله (۴) که مخرج‌های متناظر برای بازه اطمینان با کوتاه‌ترین طول برای $\sigma^{۲}$ است، برابر نیستند.

قضیهٔ ۱.۲. *دستگاه معادلات (۸) دارای جواب‌های یکتا است.*

اثبات. تابع $g(x) = x^N e^{-x},\ x > ۰$ را در نظر بگیرید. این تابع در بازه $[۰, N]$ اکیداً صعودی و در بازه $[N, \infty]$ اکیداً نزولی است؛ بنابراین معادله $g(x) = l$ برای $۰ < l \leq N^N e^{-N}$ دارای دو جواب C و D است به‌طوری‌که $۰ \leq C \leq N \leq D$. پس تابع اکیداً نزولی $D = h(C),\ ۰ \leq C \leq N$ را داریم که

$$\lim_{C \to ۰^+} h(C) = \infty, \quad \lim_{C \to N^-} h(C) = N.$$

شکل ۱ را ببینید؛ بنابراین رابطه

$$H(C) = \int_{C}^{h(C)} f_n(x)dx$$

تابعی اکیداً نزولی از C را تعریف می‌کند که $H(N) = ۰$ و

$$H(۰^+) = \lim_{C \to ۰^+} H(C) = \int_{۰}^{+\infty} f_n(x)dx = ۱.$$

پس با توجه به اینکه $۱ > ۱-\alpha > ۰$، نتیجه می‌گیریم که معادله

$$\begin{aligned} H(C) &= \int_{C}^{h(C)} f_n(x)dx \\ &= \int_{C}^{D} f_n(x)dx = ۱-\alpha, \end{aligned}$$

دارای یک جواب یکتای C و در نتیجه یک جواب یکتای $D = h(C)$ می‌باشد.

□

بنابراین جواب‌های منحصربه‌فرد $c_n = C$ و $d_n = D$ را داریم که کمترین طول را در بین بازه‌های اطمینان به فرم (۵) دارد. این بازه را با I_{SD} نشان می‌دهیم. جدولی از زوج مقادیر (c_n, d_n) برای چند n و $۱-\alpha$ در جدول ۲ داده شده است.

در ادامه نشان می‌دهیم جواب‌های فوق با ریشه دوم مقادیر متناظر برای پارامتر واریانس برابر نیستند.

گزارهٔ ۲.۲. *فرض کنید a_n و b_n مخرج‌های کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای $\sigma^{۲}$ هستند. در این صورت $\sqrt{a_n}$ و $\sqrt{b_n}$ مخرج‌های کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای σ نیستند.*

اثبات. مقادیر a_n و b_n باید در تساوی (۴) صدق کنند که پس از ساده کردن معادل است با

$$a_n^{N+۱} e^{-a_n} = b_n^{N+۱} e^{-b_n}.$$

اینک فرض کنید ریشه دوم آن‌ها، یعنی $\sqrt{a_n}$ و $\sqrt{b_n}$ برای انحراف استاندارد نیز بهینه باشند؛ بنابراین باید در تساوی (۷) نیز صدق کنند. پس از ساده کردن به برابری زیر می‌رسیم:

$$a_n^N\ e^{-a_n} = b_n^N\ e^{-b_n}.$$

با تقسیم طرفین دو تساوی اخیر بر هم به رابطه $a_n = b_n$ می‌رسیم که تناقض است زیرا باید تساوی زیر برقرار باشد

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx = ۱-\alpha,$$

و این یعنی

$$\frac{۱}{c_n} - \frac{۱}{d_n} < \frac{۱}{\sqrt{a_n}} - \frac{۱}{\sqrt{b_n}}.$$

□

از بحث فوق این نتیجه ضمنی نیز گرفته می‌شود که توان دوم بازه اطمینان با کمترین طول برای انحراف استاندارد، نمی‌تواند برای واریانس دارای کمترین طول باشد.

مثال ۳.۲. *برای $n = N - ۱ = ۸$ ، $۱ - \alpha = ۰/۹۵$ ، کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای واریانس، به ازای مخرج‌های $a_n = ۲/۷۰۲۷$ و $b_n = ۲۴/۹۱۴۷$ به دست می‌آید ([۴]، جدول ۶۷۸)؛ اما ریشه دوم این مقادیر، یعنی $\sqrt{a_n} = ۱/۶۴۳۹$ و $\sqrt{b_n} = ۴/۹۹۱۴$ با جواب‌های بهینه $c_n = ۱/۶۱۹۷$ و $d_n = ۴/۶۴۷۱$، متناظر با کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای انحراف استاندارد، برابر نیستند. همچنین برای فاصله اطمینان با دم‌های برابر، مخرج درکران بالای بازه اطمینان $\sqrt{\chi^2_{۰/۹۷۵}(۸)} = ۱/۴۷۶۴$ و درکران پایین برابر $\sqrt{\chi^2_{۰/۰۲۵}(۸)} = ۴/۱۸۷۴$ می‌باشد.*

مثال ۴.۲. *قرار دهید $۱ - \alpha = ۰/۹۵$. برای یک نمونه $N = ۹$ تایی از توزیع نرمال $N(۵,۴)$ داده‌های زیر مشاهده‌شده است*

$$۲/۱۹۳۶, ۷/۴۰۹۴, ۶/۲۶۱۴, ۲/۱۰۳۷, ۸/۴۷۲۶,$$

$$۲/۹۷۶۸, ۹/۴۵۰۷, ۳/۵۵۶۱, ۱/۳۱۳۶$$

که میانگین و مجموع توان دوم انحرافات از میانگین آن‌ها برابر است با

$$\bar{x} = ۴/۸۵۹۸, \qquad \sum_{i=۱}^{۹}(x_i - \bar{x})^۲ = ۷۵/۱۱۹۲.$$

بازه‌های اطمینان مشاهده‌شده برای این داده‌ها در جدول ۱ داده شده است. در ردیف دوم این جدول منظور از $\sqrt{I_{ML}}$ بازه اطمینانی است که نقاط ابتدایی و انتهایی آن ریشه دوم نقاط متناظر کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای $\sigma^۲$ هستند. همان‌طورکه انتظار می‌رود طول آن بیشتر از بازه اطمینان ردیف اول است.

۳ مقایسه توان‌های چند آزمون برای انحراف استاندارد

یکی از روش‌های انجام آزمون یک فرض آماری بر اساس یک بازه اطمینان ساخته‌شده برای پارامتر موردعلاقه است. در این بخش بر اساس نتایج بخش ۲ به معرفی و مقایسه توان چند آزمون آماری برای فرض‌های

$$H_۰ : \sigma = \sigma_۰ \quad \text{vs} \quad H_۱ : \sigma \neq \sigma_۰ \qquad (۹)$$

بر اساس نمونه تصادفی $X_۱, ..., X_N$ از توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ با پارامترهای مجهول μ و $\sigma^۲$ می‌پردازیم که در آن $\sigma_۰$ یک مقدار معلوم و مثبت می‌باشد. می‌دانیم که برای مسئله فوق هیچ آزمون به‌طور یکنواخت پرتوان‌ترین (UMP) وجود ندارد، اما در کلاس آزمون‌های نااریب، به‌طور یکنواخت پرتوان‌ترین آزمون (UMPU) وجود دارد [۱]. آزمون‌های موردنظر در این قسمت بر اساس بازه‌های اطمینانی هستند که در بخش ۲ برای σ یا $\sigma^۲$ معرفی‌شده‌اند.

فرض کنید F_n تابع توزیع متغیر تصادفی کای دو با n درجه آزادی است. ابتدا آزمون بر اساس کوتاه‌ترین بازه اطمینان با ضریب $۱ - \alpha$ را برای انحراف استاندارد یعنی I_{SD} در نظر می‌گیریم. آزمون ساخته‌شده بر اساس این بازه اطمینان فرض صفر را رد می‌کند هرگاه $\sigma_۰ \notin I_{SD}$. پس توان آزمون در نقطه $\sigma^۲$ برابر است با

$$\Pi_{SD}(\sigma^۲) = P_\sigma(\sigma_۰ \notin I_{SD}) = F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}c_n^۲) + ۱ - F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}d_n^۲),$$

که در آن c_n و d_n جواب‌های منحصربه‌فرد معادلات (۷) هستند.

واضح است که فرض‌های (۹) با

$$H_۰ : \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \quad \text{vs} \quad H_۱ : \sigma^۲ \neq \sigma_۰^۲ \qquad (۱۰)$$

معادل هستند. پس بر اساس کوتاه‌ترین بازه اطمینان با ضریب اطمینان $۱ - \alpha$ برای $\sigma^۲$، فرض $H_۰$ در سطح α رد می‌شود هرگاه $\sigma_۰^۲ \notin I_{ML}$. بنابراین توان آزمون در نقطه $\sigma^۲$ برابر است با

$$\Pi_{ML}(\sigma^۲) = P_\sigma(\sigma_۰^۲ \notin I_{ML}) = F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}a_n) + ۱ - F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}b_n).$$

اگر ناحیه رد آزمون $H_۰$ را بر اساس بازه اطمینان نااریب به‌طور یکنواخت دقیق‌ترین در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که تابع توان می‌شود

$$\Pi_{SU}(\sigma^۲) = P_\sigma(\sigma_۰^۲ \notin I_{SU}) = F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}a_n) + ۱ - F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}b_n)$$

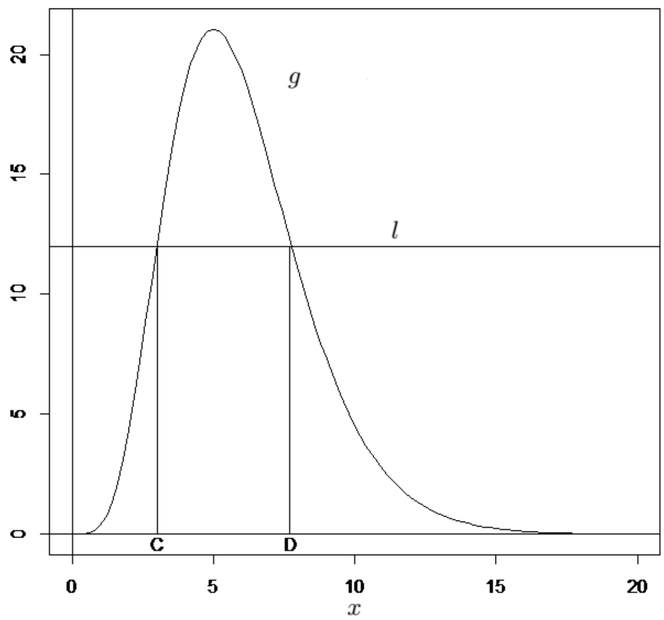
که در آن a_n و b_n جواب‌های منحصربه‌فرد معادلات (۲) هستند. این آزمون در واقع UMPU است ([۱]، [۳]).

تابع توان بر اساس بازه اطمینان با دم‌های برابر براي $\sigma^۲$ در (۳) عبارت است از

$$\Pi_{ET}(\sigma^۲) = P_\sigma(\sigma_۰^۲ \notin I_{ET}) = F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}a_n) + ۱ - F_n(\frac{\sigma_۰^۲}{\sigma^۲}b_n)$$

که در آن $a_n = \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n)$ و $b_n = \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}}(n)$. با توجه به اینکه بازه اطمینان با دم‌های برابر برای انحراف استاندارد از ریشه دوم بازه اطمینان با دم‌های برابر برای واریانس به دست می‌آید، بنابراین تنها بررسی آزمون بر اساس بازه اطمینان با دم‌های برابر برای $\sigma^۲$ کفایت می‌کند.

به‌منظور مقایسه عملکرد توان آزمون‌های ذکرشده، توابع توان برای مقادیر مختلف n و $\sigma_۰^۲$ در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده‌اند. برای مقادیر $\sigma_۰^۲ > \sigma^۲$ آزمون بر اساس کوتاه‌ترین بازه اطمینان براي $\sigma^۲$ دارای



شکل ۱: نمودار تابع g در قضیه ۱.۲

بیشترین توان و آزمون بر اساس بازه اطمینان با دم‌های برابر دارای کمترین توان است. برای $\sigma^2 > \sigma_0^2$ نتایج عکس می‌شوند. تابع توان دو آزمون دیگر در بین این دو قرار می‌گیرند به‌طوری‌که برای $\sigma^2 < \sigma_0^2$ آزمون بر اساس بازه اطمینان نااریب به‌طور یکنواخت دقیق‌ترین از توان آزمون بر اساس کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای σ کمتر است. این برای $\sigma^2 > \sigma_0^2$ کاملاً برعکس است. به‌طور خلاصه برای $\sigma^2 < \sigma_0^2$

$$\Pi_{ET}(\sigma^2) \leq \Pi_{SU}(\sigma^2) \leq \Pi_{SD}(\sigma^2) \leq \Pi_{ML}(\sigma^2),$$

و برای $\sigma^2 > \sigma_0^2$

$$\Pi_{ML}(\sigma^2) \leq \Pi_{SD}(\sigma^2) \leq \Pi_{SU}(\sigma^2) \leq \Pi_{ET}(\sigma^2).$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌جز آزمون بر اساس بازه اطمینان I_{SU} که UMPU است، سایر آزمون‌ها نااریب نیستند؛ زیرا توان آن‌ها برای برخی مقادیر σ^2 از توان آزمون UMPU بیشتر است. این مطلب برای هر مقدار n و σ^2 درست است.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله ساخت بازه اطمینان به‌طور مستقیم برای پارامتر انحراف استاندارد در توزیع نرمال موردبحث قرار گرفت. نشان دادیم که کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای این پارامتر از روی بازه اطمینان برای پارامتر واریانس به دست نمی‌آید. همچنین از مقایسه توان آزمون بر اساس کوتاه‌ترین بازه اطمینان برای انحراف استاندارد با توان چند آزمون رایج مشاهده کردیم که هرکدام از آزمون‌ها برای برخی از مقادیر پارامتر توان بیشتری نسبت به سایر آزمون‌ها دارد.

تشکر و قدردانی

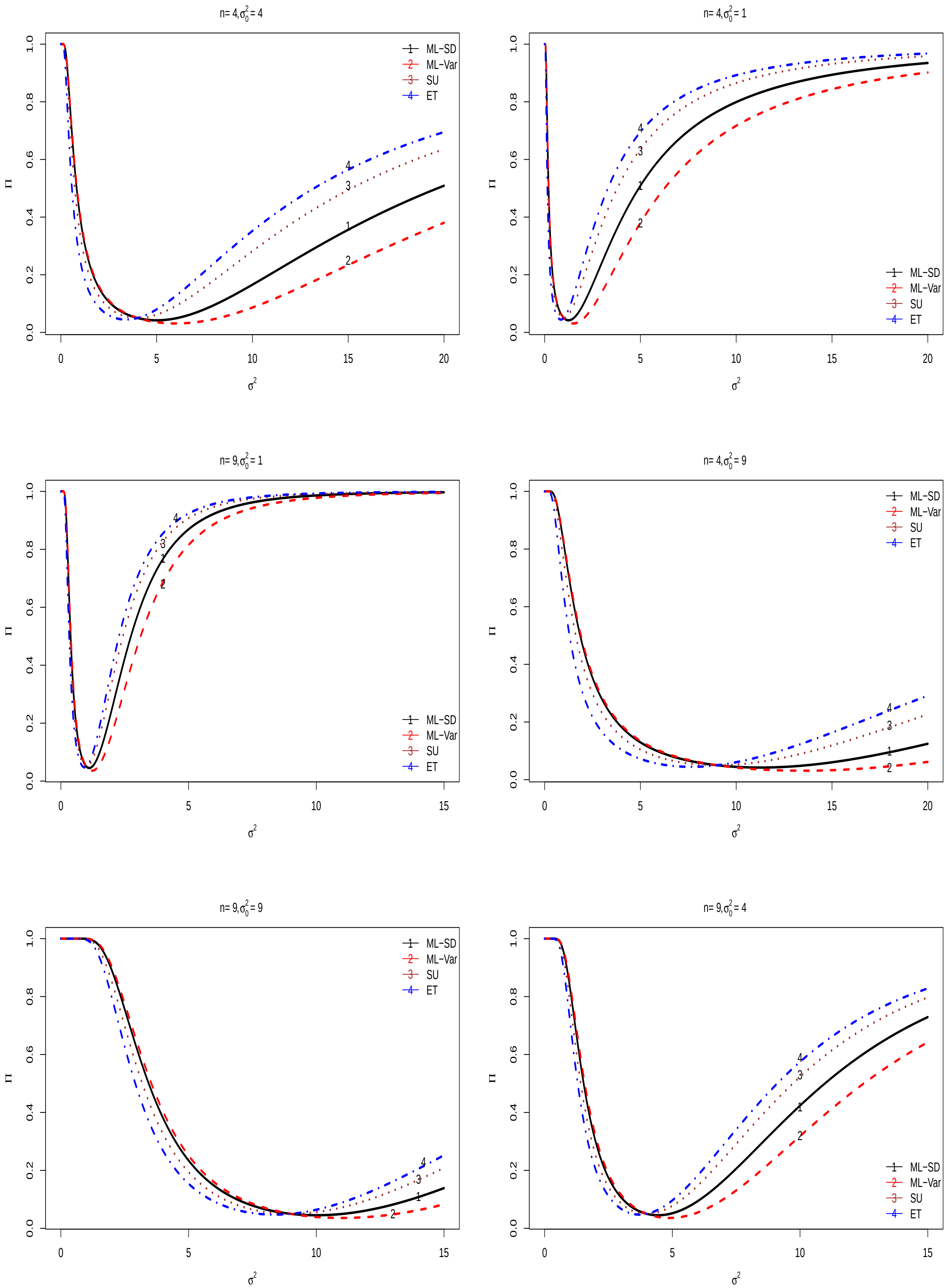
از داوران محترم که پیشنهادهایشان باعث بهبود در نگارش مقاله شد سپاسگزاریم. همچنین زحمات هیئت تحریریه محترم مجله را ارج می‌نهیم.

جدول ۱: بازه‌های اطمینان در مثال ۴.۲

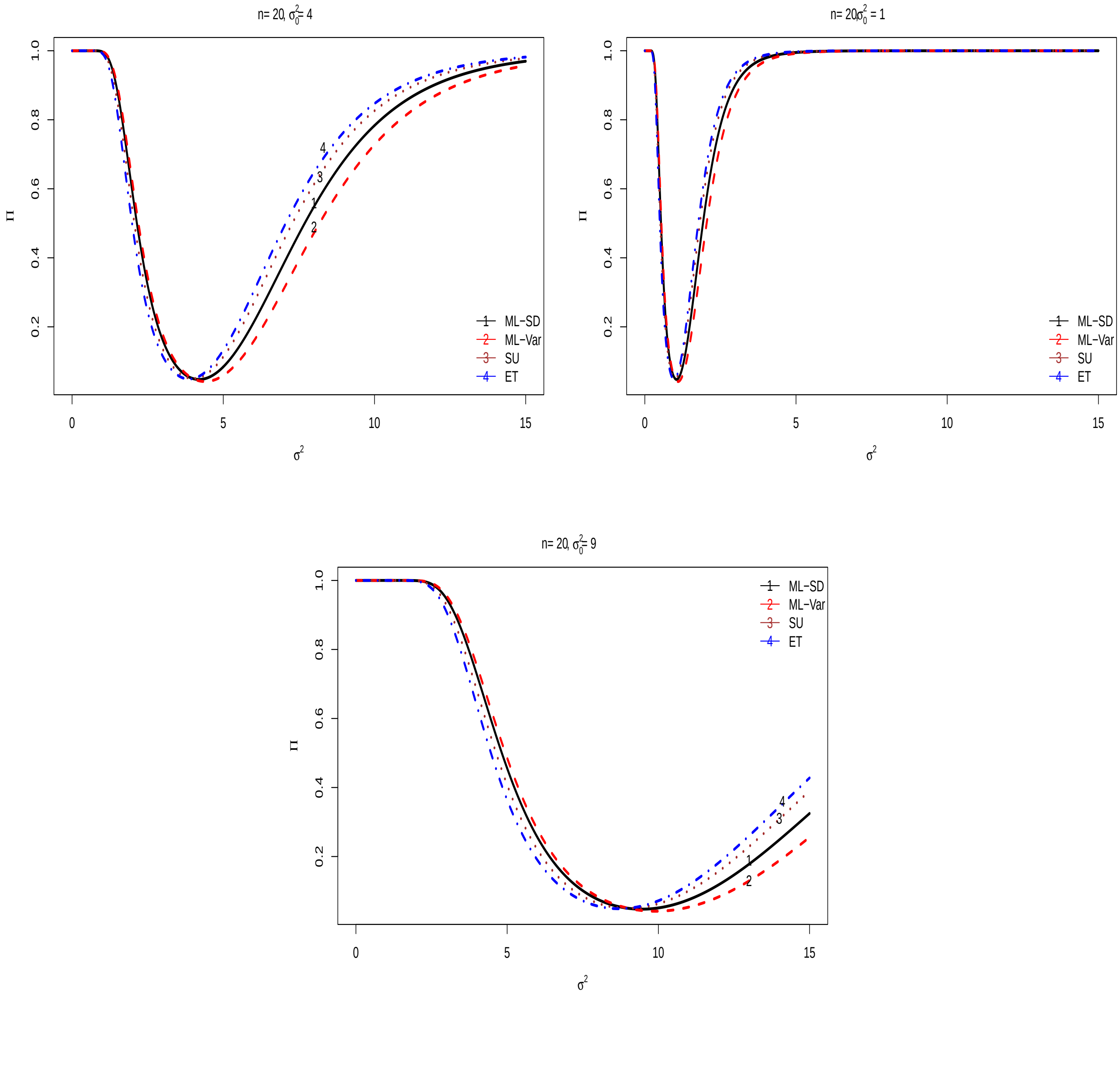
نوع بازه	بازه اطمینان مشاهده‌شده	طول
I_{SD}	(۱/۸۶۵۰, ۵/۳۵۱۸)	۳/۴۸۶۸
$\sqrt{I_{ML}}$	(۱/۷۳۶۴, ۵/۲۷۲۳)	۳/۵۳۵۹
I_{SU}	(۱/۹۹۵۷, ۵/۵۷۸۴)	۳/۵۸۲۶
I_{ET}	(۲/۰۶۹۸, ۵/۸۷۰۴)	۳/۸۰۰۶

جدول ۲: مخرج‌های (c_n, d_n) بازه اطمینان برای برخی مقادیر n و $۱ - \alpha$

$n = N - ۱$	$۱ - \alpha = ۰/۹۰$	$۱ - \alpha = ۰/۹۵$	$۱ - \alpha = ۰/۹۹$
۱	(۰/۱۲۵۴, ۳/۶۷۸۶)	(۰/۰۶۲۶, ۴/۰۸۸۷)	(۰/۰۱۲۵, ۴/۸۸۴۹)
۲	(۰/۴۵۴۴, ۳/۵۳۸۶)	(۰/۳۱۸۶, ۳/۸۸۷۳)	(۰/۱۴۱۶, ۴/۵۶۷۷)
۳	(۰/۷۵۱۹, ۳/۶۲۶۷)	(۰/۵۸۷۳, ۳/۹۴۸۳)	(۰/۳۳۷۶, ۴/۵۷۹۷)
۴	(۱/۰۰۹۹, ۳/۷۶۵۶)	(۰/۸۳۱۷, ۴/۰۷۱۰)	(۰/۵۴۲۰, ۴/۶۷۳۱)
۵	(۱/۲۳۹۰, ۳/۹۱۷۹)	(۱/۰۵۳۲, ۴/۲۱۲۳)	(۰/۷۳۸۹, ۴/۷۹۴۳)
۶	(۱/۴۴۶۷, ۴/۰۷۱۹)	(۱/۲۵۶۰, ۴/۳۵۸۴)	(۰/۹۲۵۶, ۴/۹۲۵۶)
۷	(۱/۶۳۷۹, ۴/۲۲۳۶)	(۱/۴۴۳۹, ۴/۵۰۴۰)	(۱/۱۰۲۰, ۵/۰۵۹۹)
۸	(۱/۸۱۶۱, ۴/۳۷۱۵)	(۱/۶۱۹۷, ۴/۶۴۷۱)	(۱/۲۶۹۱, ۵/۱۹۳۷)
۹	(۱/۹۸۳۵, ۴/۵۱۴۹)	(۱/۷۸۵۳, ۴/۷۸۶۶)	(۱/۴۲۸۱, ۵/۳۲۵۸)
۱۰	(۲/۱۴۲, ۴/۶۵۴۰)	(۱/۹۴۲۳۸, ۴/۹۲۲۴۳)	(۱/۵۷۹۸, ۵/۴۵۵۳)
۱۱	(۲/۲۹۲۹, ۴/۷۸۸۸)	(۲/۰۹۲۱, ۵/۰۵۴۵)	(۱/۷۲۵۱, ۵/۵۸۱۹)
۱۲	(۲/۴۳۷۱, ۴/۹۱۹۵)	(۲/۲۳۵۳, ۵/۱۸۲۸)	(۱/۸۶۴۷, ۵/۷۰۵۶)
۱۳	(۲/۵۷۵۶, ۵/۰۴۶۴)	(۲/۳۷۲۹, ۵/۳۰۷۷)	(۱/۹۹۹۹, ۵/۸۲۶۴)
۱۴	(۲/۷۰۸۹, ۵/۱۶۹۸)	(۲/۵۰۵۵, ۵/۴۲۹۲)	(۲/۱۲۹۱, ۵/۹۴۴۴)
۱۵	(۲/۸۳۷۶, ۵/۲۸۹۸)	(۲/۶۳۳۵, ۵/۵۴۷۷)	(۲/۲۵۴۷, ۶/۰۵۹۶)
۲۰	(۳/۴۲۵۸, ۵/۸۴۷۳)	(۳/۲۱۹۴, ۶/۰۹۹۳)	(۲/۸۳۲۱, ۶/۵۹۹۲)
۲۵	(۳/۹۴۵۲, ۶/۳۴۸۱)	(۳/۷۳۷۳, ۶/۵۹۶۲)	(۳/۳۴۴۶, ۷/۰۸۸۲)
۳۰	(۴/۴۱۵۷, ۶/۸۰۶۰)	(۴/۲۰۶۷, ۷/۰۵۱۴)	(۳/۸۱۰۱, ۷/۵۳۷۷)



شکل ۲: تابع توان آزمون‌ها برای $n = ۴, ۹$ و $\alpha = ۰/۰۵$



شکل ۳: تابع توان آزمون‌ها برای $n =$ ۲۰ و $\alpha =$ ۰٫۰۵

مراجع

[1] Lehmann, E.L., Romanov, J.P. (2005). *Testing Statistical Hypotheses*, third ed. Springer.

[2] Neyman,J.and Pearson,E. S. (1936). Contributions to the theory of testing statistical hypotheses I. *Statistical Research Memoirs*, **1**, 1-37.

[3] Srivastava, M.K. and Srivastava, N. (2009). *Statistical Inference: Testing of Hypotheses*, PHI, New Delhi.

[4] Tate, R. F. and Klett, G. W. (1959). Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. *Journal of the American Statistical Association* **54**, 674–682.

The shortest confidence interval and its test for the standard deviation in the normal distribution

N. Esmailzadeh, [1] **Kh. Fazli** [2]

Abstract:

In this article, based on a random sample from a normal distribution with unknown parameters, we obtain the shortest confidence interval for the standard deviation parameter using the sample standard deviation. We show that this confidence interval cannot be obtained by taking the square root of the endpoints of the shortest confidence interval for the variance given by Tate and Klett. A table is provided to calculate the confidence interval for several sample sizes and three common confidence coefficients. Also, the power performance of the tests made based on the mentioned confidence intervals is considered.

Keywords: Confidence interval length, Standard deviation, Unbiased confidence interval.

[1] **n.esmailzadeh@uok.ac.ir**
[2] **KhFazli@uok.ac.ir**