ساخت بازه اطمینان برای قابلیت اعتماد تجربی یک قطعه (احتمال بقاء) با استفاده از توزیع F

محمود چلویان[1]

چکیده

برای تعیین قابلیت اعتماد[2] (احتمال بقاء) یک قطعه یا محصول در روشهای معمول اطلاع از توزیع طول عمر قطعات الزامیست. در مواردی که این توزیع نامشخص است، استفاده از قابلیت اعتماد تجربی توصیه می شود. برآورد نقطه ای برای قابلیت اعتماد تجربی (R) بصورت $\hat{R}=1-\hat{p}=1-x/n$ تعریف می شود ،که در آن x تعداد قطعه ازکار افتاده از n قطعه آزمایش شده است ، به تفسیر دیگر $\hat{p}$ برآورد نقطه ای پارامتر توزیع دوجمله ای(p) است. در این بحث یک بازه اطمینان با استفاده از توزیع F برای p بدست می آوریم و از روی آن بازه اطمینان R را خواهیم ساخت . مقایسه این بازه با بازه های اطمینان بزرگ نمونه ای[3] نشان می دهد که بازه اطمینان اخیر از دقت بهتری برخوردار است .

واژه های کلیدی: قابلیت اعتماد تجربی، توزیع طول عمر، بازه اطمینان بزرگ نمونه ای، بازه اطمینان دقیق، توزیع F.

۱. مقدمه

با نگاهی دقیق به مراحل تولید یک محصول، از تحقیق و نظرخواهی راجع به نوع محصول (شامل اندازه، رنگ، استانداردها، بازاریابی و .....)، کنترل کیفیت در حین تولید و درخرید مواد اولیه، تا محاسبه قابلیت اعتماد محصول، نقش روشهای آماری در سه مرحله بالابر کسی پوشیده نیست. مسئله قابلیت اعتماد از آنجا دارای اهمیت است که این محصولات در بوته آزمایش قرار گرفته و مثلا در سیستم کنترل هواپیما یا در ابزار دقیق پزشکی یا جراحی و ...... بکار می رود و عدم کارایی و یا اعتماد بیش از حد به آنها خسارات غیر قابل جبرانی را به بار می آورد. برای روشن شدن مطلب و شروع بحث ابتدا به بررسی مفهوم قابلیت اعتماد یک قطعه (محصول) می پردازیم .

۲. تعریف قابلیت اعتماد

اگر متغیر تصادفی T با تابع چگالی احتمال $f(t)$ بیانگر طول عمر یک قطعه باشد قابلیت اعتماد این قطعه $R(t)$ برابر است با

$$R(t)=P(T>t)=۱-P(T\le t)$$

که وابسته به اطلاع از توزیع طول عمر قطعات یعنی $f(t)$ می باشد.

با فرض معلوم بودن نوع توزیع (مثلا نمایی ، وایبول و ..... .) پارامترهای توزیع را می توان از روشهای برآورد (ماکسیمم درستنمایی MLE و ......) بدست آورد. اما روش بالا مستلزم اطلاع از توزیع طول عمر است که در بسیاری از موارد امکان پذیر نبوده و یا به صرفه نخواهد بود. به همین دلیل استفاده از قابلیت اعتماد تجربی یک قطعه که وابسته به توزیع طول عمر نیست مناسب به نظر می رسد.

۱ .۲. تعریف قابلیت اعتماد تجربی

فرض کنید N_0 نمونه ای تصادفی از قطعاتی است که تازمان t مورد آزمایش قرار گرفته اند و N_t تعداد قطعاتی است که تا زمان t هنوز کار می کنند. قابلیت اعتماد تجربی این قطعات یعنی $R^*(t)$ برابر است با

$$R^*(t)=\frac{N_t}{N_.}=\frac{N_.-x}{N_.}=۱-\frac{x}{N_.}=۱-\hat{p}$$

که در آن x تعداد قطعاتی است که تا زمان t از کار افتاده اند. دقت کنید که $\hat{p}=x/N_0$ نسبت قطعات از کار افتاده و یا به عبارت

۱- فوق لیسانس آمار ریاضی از دانشگاه صنعتی امیر کبیر

Reliability - ۲

Large Sample-۳

دیگر برآورد پارامتر p در توزیع دو جمله ای است. بنابراین با ساخت بازه اطمینان برای p می توان بازه اطمینان R را از رابطه $R^* = 1-\hat{p}$ به دست آورد. برای سهولت کار از این پس قابلیت اعتماد تجربی را با همان نماد R نشان می دهیم.

۳. چند بازه اطمینان بزرگ نمونه ای برای p

از روشهای مقدماتی آمار به یاد داریم که بازه اطمینان $(1-\alpha)100$ درصدی برای p بصورت زیر است

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

از روشی دیگر (نگاه کنید به مرجع [1] ص ۴۴۵) این بازه برابر است با

$$\frac{2\hat{p} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n} \pm \sqrt{(2\hat{p} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n})^2 - 4\hat{p}^2(1+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n})}}{2(1+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n})}$$

اما به هر حال بازه های بالا براساس نمونه های بزرگ است این نکته با بررسی تابع هزینه افزایش قابلیت اعتماد یک قطعه در مقادیر بالاتر از ۹۰ درصد مشهود است. برای مثال افزایش قابلیت اطمینان از مقدار ۸۰ درصد به ۹۰ درصد هزینه ای برابر ۱۰۰۰دلار ولی در مقابل، این افزایش برای ۹۰ درصد به ۹۲ درصد هزینه ای برابر ۲۰۰۰ دلار خواهد داشت.

٤. ساخت بازه اطمینان با استفاده از توزیع F

تابع توزیع تجمعی دوجمله ای با پارامترهای n و p عبارت است از

$$B(x;n,p) = \sum_{k=0}^{x} b(k;n,p)$$

که در آن

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

تابع جرم احتمال دو جمله ای است.

ملاحظه می شود که $B(x;n,p)$ یک تابع پیوسته نسبت به p می باشد با مشتق گیری نسبت به p از طرفین داریم:

$$\frac{dB(x;n,p)}{dp} = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$[p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1}(-1) + kp^{k-1}(1-p)^{n-k}]$$

$$= -\sum_{k=0}^{x}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}p^k(1-p)^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{x}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= -\sum_{k=0}^{x}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}p^k(1-p)^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{x}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

اگر در مجموع دوم از رابطه بالا قرار دهیم $k-1=r$

$$\frac{dB(x;n,p)}{dp} = -\sum_{k=0}^{x}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}p^k(1-p)^{n-k-1} + n\sum_{r=0}^{x-1}\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}p^r(1-p)^{n-r-1}$$

با توجه به آنکه r و k در این دو مجموع متغیر ظاهری بوده و مجموع دوم یک جمله از مجموع اول کمتر دارد لذا

$$\frac{dB(x;n,p)}{dp} = -n\frac{(n-1)!}{x!(n-1-x)!}p^x(1-p)^{n-1-x}$$
$$= \frac{-\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x)}p^x(1-p)^{n-1-x}$$

با جایگزینی

$$B(x+1,n-x) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x)}{\Gamma(n+1)}$$

در رابطه فوق داریم:

$$\frac{dB(x;n,p)}{dp} = \frac{-p^x(1-p)^{n-1-x}}{B(x+1,n-x)}$$

حال با انتگرال گیری از دوطرف تساوی بالا و قرار دادن z به عنوان متغیر ظاهری داریم

$$\int_0^p \frac{dB(x;n,z)}{dz}dz = -\int_0^p \frac{z^x(1-z)^{n-x-1}}{B(x+1,n-x)}dz$$
$$B(x;n,p) - B(x;n,0) = -\int_0^p \frac{z^x(1-z)^{n-x-1}}{B(x+1,n-x)}dz$$

با توجه به اینکه $B(x;n,0)=1$

$$B(x;n,p) = 1 - \int_0^p \frac{z^x(1-z)^{n-x-1}}{B(x+1,n-x)}dz \qquad (1)$$
$$= \int_p^1 be(z;x+1,n-x)dz$$

که در آن

$$be(z;a,b)=\frac{z^{a-1}(1-z)^{b-1}}{B(a,b)}$$

تابع چگالی توزسع بتا است.

بنابراین بطور خلاصه می توان گفت وقتی که حدود انتگرال مناسب انتخاب شود قسمت(دم) سمت چپ توزیع دوجمله ای باقسمت(دم) سمت راست توزیع بتا یکسان خواهد بود. یعنی عددی مانند P_2 وجود دارد که

$$\int_{p_2}^{1}\frac{z^{x}(1-z)^{n-x-1}}{B(x+1,n-x)}dz=\alpha/2$$

مقدار p_2 را به عنوان حد بالای بازه اطمینان برای p می توان با استفاده از جداول تابع بتای ناقص[1] یا جداول کافی از توزیع دوجمله ای بدست آورد اما داشتن جداول نامبرده چندان ساده نیست. با استفاده از یک تغییر متغیر بصورت $z=w/(1+w)$ و تبدیل حدود $(p_2,1)$ به $(w_2,+\infty)$ تابع تحت انتگرال به تابع چگالی احتمال توزیع F با درجات آزادی $v_1=2(x+1)$ و $v_2=2(n-x)$ تبدیل خواهد شد . بنابراین حد بالایی بازه اطمینان برای p یعنی p_2 برابراست با

$$p_2=\frac{F_{\alpha/2}(2x+2,2(n-x))}{\frac{n-x}{x+1}+F_{\alpha/2}(2x+2,2(n-x))} \qquad (2)$$

۵. محاسبه حد پائین بازه اطمینان p

با در نظر گرفتن قسمت (دم) سمت راست توزیع دوجمله ای و ارتباط آن با قسمت (دم) سمت چپ توزیع بتا و اعمال تغییر متغیرهای بحث شده در محاسبه p_2 تابع تحت انتگرال به تابع چگالی احتمال توزیع F با درجات آزادی $v_1=2n-2x+2$ و $v_2=2x$ تبدیل خواهد شد بنابراین حد پائینی p برابر است با

$$p_1=\frac{1}{1+\frac{n-x+1}{x}F_{\alpha/2}(2n-2x+2,2x)} \qquad (3)$$

۶. بازه اطمینان دقیق برای p

با توجه به روابط (۲) و (۳) بازه اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصدی برای p بصورت (p_1,p_2) خواهد شد .

$$P(p>p_2)=\alpha/2$$
$$P(p<p_1)=\alpha/2$$
$$P(p_1<P<p_2)=1-\alpha$$

و به تبع آن با استفاده از رابطه $R=1-p$ حد بالا و حد پائین برای بازه اطمینان R برابر است با

$$R_u=\frac{F_{\alpha/2}(2n-2x+2,2x)}{F_{\alpha/2}(2n-2x+2,2x)+\frac{x}{n-x+1}}$$

$$R_l=\frac{1}{1+\frac{x+1}{n-x}F_{\alpha/2}(2x+2,2(n-x))}$$

$$B(x;n,p_2)=\alpha/2$$

حال مقدار مساوی $B(x;n,p)$ را از رابطه (۱) جایگزین می کنیم.

۷. مقایسه بازه های اطمینان

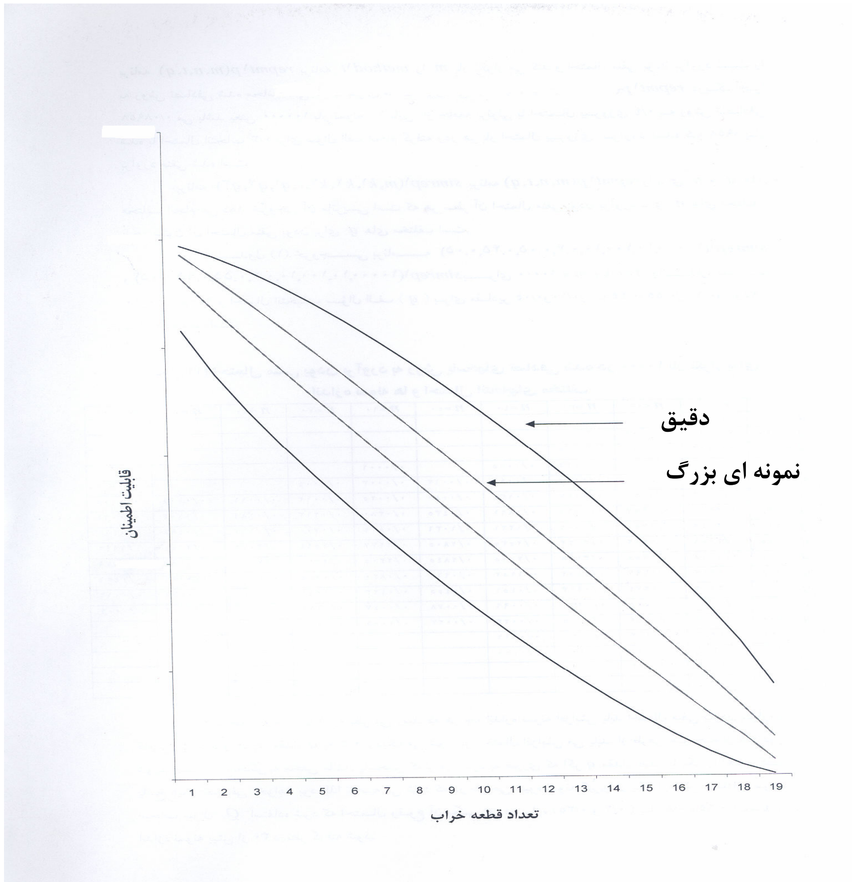
مقادیر بدست آمده از R_l و R_u با مقادیر بدست آمده از بازه های اطمینان نمونه های بزرگ یعنی $LSRL$ [2] و $LSRU$ [3] در جدول (۱) برای تعداد ۲۰ کالای آزمایش شده و برای تعداد خرابی ۱، ۲، ... ، ۲۰ مقایسه شده است. این مقایسه نشان می دهد که بازه های اطمینان نمونه های بزرگ برای قابلیت اعتماد یک قطعه دارای طول کمتری از بازه های اطمینان با روش بدست آمده (روش دقیق) می باشد . به عبارت دیگر میزان قابلیت اعتماد به محصول از طریق روشهای نمونه های بزرگ قابلیت اعتماد بالای کاذبی را ارائه می دهد. نمودار (۱) به خوبی نشانگر آنست که مقادیر بازه اطمینان نمونه های بزرگ در داخل بازه های R_l و R_u قرار گرفته است در صورتی که قابلیت اعتماد کمتر از مقادیر نشان داده شده در حالت نمونه های بزرگ است و باعث ایجاد یک اطمینان کاذب برای محصولات ساخته شده می شود.

۱- Incomlet Beta Function Table

۲- Large Sample Reliability Lower Bound

۳- Large Sample Reliability Upper Bound

شکل (۱)- مقایسه بازه اطمینان نمونه ای بزرگ و دقیق



مراجع

[1] Casella G.and Berger R.L., 1990, *Statistical Inference*, Holden-Day, Okland- California.
[2] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., 1974, *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw–Hill, New York.
[3] Patel, J. K, Kapadia, C.H and.Owen D. B., 1967, *Handbook of Statistical Distributions*, Marcel Dekker, New York.
[4] Barlow, R. E. and Proschan, F., 1965, *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley, New York.
[5] Banday, D. B., 1991, *Statistical Methods in Reliability Theory and Practice*, Horwood, New York.
[6] Crowder, M.S., Kimber, A. C. Smith, R.L. and Sweeting, T. J., 1994, *Statistical Analysis of Reliability Data,* Chapmant and Hall, London.