

حالت‌های مرزی لم نیمن پیرسن

سعید اخلاقی^۱ عبد الحمید رضایی رکن آبادی^۲

چکیده

علیرغم آنکه لم نیمن پیرسن یکی از اساسی ترین نتایج مربوط به تئوری آزمون فرضیه های آماری است، به حالت‌های خاص آن که مقدار بحرانی آزمون مقادیر صفر یا بینهایت شود، کمتر پرداخته شده است. بررسی این حالت‌های مرزی دریافت عمیق تری از مفاهیم مربوط به این لم اساسی را فراهم می سازد، که در این مقاله مفصلاً آنرا مورد بحث قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: لم نیمن پیرسون، آزمون های فرض، پرتوان ترین آزمون، مقادیر بحرانی

۱. مقدمه

اکنون فرض کنید

$$\Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$$

برای طرح حالت‌های خاص مجموعه محدب نقاط خطا در لم نیمن پیرسن لازم است در ابتدا تعاریف، مفاهیم و قضایای مربوط به آن را مطرح کنیم.

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_{\theta_1}(\mathbf{x})}{f_{\theta_0}(\mathbf{x})} = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$$

فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از خانواده توزیع ها با چگالی $\{f_\theta, \theta \in \Omega\}$ ، $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ ، باشد؛

قضیه ۱-۱ (لم اساسی نیمن-پیرسن)

الف: هر آزمون ψ به شکل

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \lambda(\mathbf{x}) > k \\ \gamma(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) = k \\ 0 & \lambda(\mathbf{x}) < k \end{cases} \quad (1)$$

به ازای لا اقل یک $0 \leq k < \infty$ و $0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1$ ، یک آزمون MP در سطح α ($\alpha = E_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X}))$) برای آزمودن فرضیه ساده $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1: \theta = \theta_1$ است و اگر $k = \infty$ باشد آزمون

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & f_0 = 0 \\ 0 & f_0 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

پرتوان ترین آزمون در اندازه $\alpha = 0$ برای آزمودن H_0 در مقابل H_1 است.

ب: به ازاء هر $0 \leq \alpha \leq 1$ آزمونی MP به شکل (۱) یا (۲) با $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma$ (یک ثابت است) وجود دارد به طوری که:

تعریف ۱-۱: ψ را یک آزمون در سطح α برای فرضیه $H_0: \theta \in \Omega_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1: \theta = \theta_1$ گوییم هرگاه:

$$E_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X})) \leq \alpha$$

برای هر $\theta \in \Omega_0$.

$$E_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X})) \leq$$

تعریف ۱-۲: ψ^* را پرتوان ترین آزمون (آزمون MP) در سطح α برای فرضیه $H_0: \theta \in \Omega_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1: \theta = \theta_1$ گوییم هرگاه به ازای هر آزمون در سطح α ی دیگری مانند ψ برای H_0 در مقابل H_1

$$E_{\theta_1}(\psi^*(\mathbf{X})) \geq E_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))$$

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

$$\begin{aligned} C^* &= \{x | \lambda(x) > 0\} = \{x | f_0(x) \geq 0 \& f_1(x) > 0\} \\ &= \{x | \mathfrak{R}^n \& f_1(x) > 0\} = \{x | f_1(x) > 0\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^* &= \{x | \lambda(x) = 0\} = \{x | f_0(x) > 0 \& f_1(x) = 0\} \\ &= \{x | \chi \& f_1(x) = 0\} = \{x | f_1(x) = 0\} \quad (8) \end{aligned}$$

در نتیجه خطای نوع اول و دوم ψ_γ^* به ترتیب به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma^* &= E_{\theta_\gamma}(\psi_\gamma^*(X)) + P_{\theta_\gamma}(\gamma(X) > 0) + \gamma P_{\theta_\gamma}(\lambda(X) = 0) \\ &= P_{\theta_\gamma}(f_1(X) > 0) + \gamma P_{\theta_\gamma}(f_1(X) = 0) \\ &\geq P_{\theta_\gamma}(f_1(X) > 0) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_\gamma^* &= E_{\theta_\gamma}(1 - \psi_\gamma^*(X)) = (1 - \gamma) P_{\theta_\gamma}(\lambda(X) = 0) \\ &= (1 - \gamma) P_{\theta_\gamma}(f_1(X) = 0) \\ &= (1 - \gamma) \int_{\{x | f_1(x) = 0\}} f_1(x) dx = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $\beta_\gamma^* = 0$ است پس توان آزمون ψ_γ^* مساوی یک است. بنابراین علاوه بر اینکه ψ_γ^* یک آزمون MP در سطح α_γ^* است یک آزمون MP در سطح یک نیز می باشد.

۲- اگر $k = \infty$ و $\gamma(X) = \gamma$ فرض شود آزمون (۱) معرفی شده در لم نیمین- پیرسن به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma & \lambda(x) = \infty \\ 0 & \lambda(x) < \infty \end{cases} \quad (11)$$

بنابراین طبق نکته ۱-۱ نواحی قبول و تصادفی شده ψ_γ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} A &= \{x | \lambda(x) < \infty\} = \{x | f_0(x) > 0 \& f_1(x) \geq 0\} \\ &= \{x | f_0(x) > 0 \& \mathfrak{R}^n\} = \{x | f_0(x) > 0\} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \{x | \lambda(x) = \infty\} = \{x | f_0(x) = 0 \& f_1(x) > 0\} \\ &= \{x | f_0(x) = 0 \& \chi\} = \{x | f_0(x) = 0\} \quad (13) \end{aligned}$$

همچنین خطای نوع اول و دوم ψ_γ به ترتیب به صورت زیر می باشند:

$$E_{\theta_0}(\psi(X)) = \alpha$$

پ: آزمون داده شده بوسیله (۱) یا (۲) یکتاست (مگر روی یک مجموعه با اندازه صفر). یعنی اگر ψ آزمونی MP، در اندازه α برای H_0 در مقابل H_1 باشد باید به شکل (۱) یا (۲) باشد مگر روی مجموعه ای مانند N طوری که $i = 0, 1$ $P_{\theta_i}(N) = 0$ در آزمون ψ نواحی بحرانی، تصادفی شده و پذیرش به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C = \{x | \psi(x) = 1\} = \{x | \lambda(x) > k\} \quad (3)$$

$$R = \{x | \psi(x) = \gamma\} = \{x | \lambda(x) = k\} \quad (4)$$

$$A = \{x | \psi(x) = 0\} = \{x | \lambda(x) < k\} \quad (5)$$

اینک به منظور فهم بهتر لم نیمین پیرسن به بررسی آزمون (۱)، معرفی شده در قسمت (الف) لم نیمین پیرسن، به ازای مقادیر مرزی $k = 0$ و $k = \infty$ با $\gamma(X) = \gamma$ می پردازیم.

۱- وقتی $k = 0$ و $\gamma(X) = \gamma$ باشد، در این حالت آزمون (۱) معرفی شده در لم نیمین پیرسن بصورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi_\gamma^*(x) = \begin{cases} 1 & \lambda(x) > 0 \\ \gamma & \lambda(x) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

نکته ۱-۱: با توجه به آنکه یکی از دو فرضیه H_0 یا H_1 حتما برقرار است پس به ازای هر x لااقل یکی از دو مقدار $f_0(x)$ یا $f_1(x)$ حتما اکیدا مثبت است و هیچگاه هر دو با هم صفر نخواهند بود. به عبارت دیگر در حالت کلی

$$\chi = \{x | f_0(x) > 0\} \cup \{x | f_1(x) > 0\}$$

و اگر بدانیم $f_0(x) = 0$ است آنگاه

$$\chi = \{x | f_1(x) > 0\}$$

و همچنین اگر بدانیم $f_1(x) = 0$ است آنگاه

$$\chi = \{x | f_0(x) > 0\}$$

بنابراین طبق نکته ۱-۱ نواحی بحرانی و تصادفی شده ψ_γ^* به ترتیب عبارتند از:

$$\alpha_\gamma = E_{\theta_0}(\psi_\gamma(X)) = \gamma P_{\theta_0}(\lambda(X) = \infty)$$

(۱۴)

$$= \gamma P_{\theta_0}(f_0(X) = 0) = \gamma \int_{\{x|f_0=0\}} f_0(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \beta_\gamma &= E_{\theta_1}(1 - \psi_\gamma(X)) = (1 - \gamma) P_{\theta_1}(\lambda(X) = \infty) \\ &\quad + P_{\theta_1}(\lambda(X) < \infty) \\ &= (1 - \gamma) P_{\theta_1}(f_0(X) = 0) + P_{\theta_1}(f_0(X) > 0) \\ &\geq P_{\theta_1}(f_0(X) > 0) \end{aligned} \quad (15)$$

و در این حالت اگر $P_{\theta_1}(f_0(X) = 0) > 0$ باشد، با یک دسته از آزمونهای اندازه صفر روبرو هستیم که در این دسته، آزمون

$$\psi_\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \lambda(x) = \infty \\ 0 & \lambda(x) < \infty \end{cases} \quad (16)$$

که نواحی بحرانی و پذیرش آن طبق نکته ۱-۱ به ترتیب عبارتند از :

$$\begin{aligned} C &= \{x | \lambda(x) = \infty\} = \{x | f_0(x) = 0 \& f_1(x) > 0\} \\ &= \{x | f_0(x) = 0 \& \mathcal{X}\} = \{x | f_0(x) = 0\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A &= \{x | \lambda(x) < \infty\} = \{x | f_0(x) > 0 \& f_1(x) \geq 0\} \\ &= \{x | f_0(x) > 0 \& \mathcal{X}^n\} = \{x | f_0(x) > 0\} \end{aligned} \quad (18)$$

آزمون MP در اندازه صفر است. برای اثبات MP بودن آزمون (۱۶) در اندازه صفر، فرض کنید ψ آزمون دیگری در اندازه صفر برای H_0 در مقابل H_1 باشد. بنابراین

$$E_{\theta_0}(\psi(X)) = \int \psi(x) f_0(x) dx \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\{x|f_0=0\}} \psi(x) f_0(x) dx \\ &\quad + \int_{\{x|f_0>0\}} \psi(x) f_0(x) dx \\ &= \int_{\{x|f_0>0\}} \psi(x) f_0(x) dx = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه هنگامی که $f_0(x) > 0$ ، داریم :

$$\psi(x) = 0$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_1}(\psi(X)) &= \int \psi(x) f_1(x) dx \\ &= \int_{\{x|f_0=0\}} \psi(x) f_1(x) dx + \\ &= \int_{\{x|f_0>0\}} \psi(x) f_1(x) dx \\ &= \int_{\{x|f_0=0\}} \psi(x) f_1(x) dx \\ &\leq \int_{\{x|f_0=0\}} f_1(x) dx = \int_{\{x|f_0=0\}} \psi_1(x) f_1(x) dx \end{aligned} \quad (20)$$

در نتیجه:

$$E_{\theta_1}(\psi(X)) \leq E_{\theta_1}(\psi_1(X))$$

و این نامساوی اثبات را کامل می کند

قضیه ۱-۲: مجموعه نقاط خطای کلیه آزمونهای ممکن (E) برای فرضیه ساده $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل فرضیه ساده دیگر $H_1: \theta = \theta_1$

الف: مجموعه ای محدب است که داخل مربع واحد قرار گرفته .

ب: شامل نقاط $(0,1)$ و $(1,0)$ می باشد .

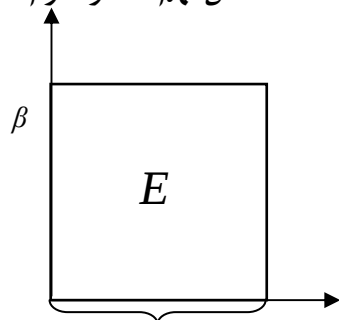
پ: نسبت به نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ متقارن است .

ت: مجموعه ای بسته است.

این قضیه را می توان در منبع [۴] یافت.

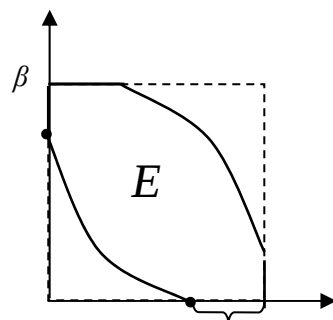
۲. حالت های خاص مجموعه محدب خطا

حال با استفاده از بخش یک به بررسی اشکال مختلف مجموعه محدب خطا در حالت های مرزی لم نیم پیرسن خواهیم پرداخت. به طور کلی پنج حالت متمایز زیر را می توان برای مجموعه محدب خطا بر اساس رفتار آنها در نقاط مرزی متصور شد .



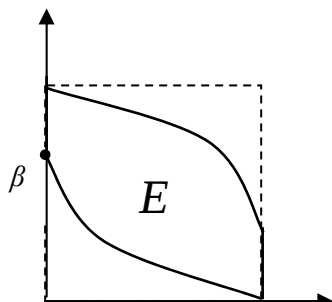
(الف)

نقطه خطای آزمونه‌ای MP در سطح ۱

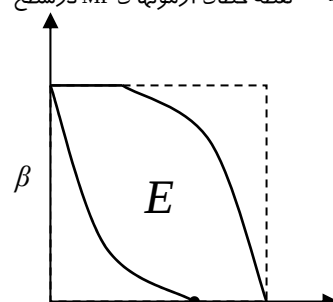


(ب)

نقطه خطای آزمونه‌ای MP در سطح ۱

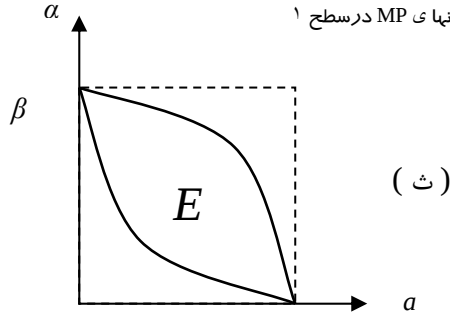


(پ)



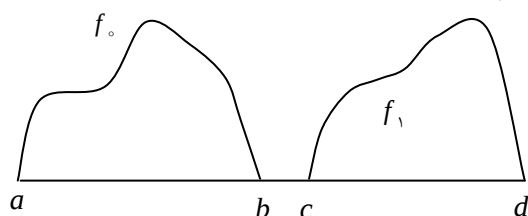
(ت)

نقطه خطای آزمونه‌ای MP در سطح ۱

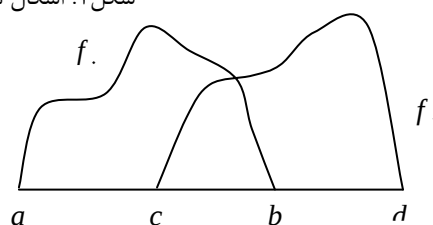


(ث)

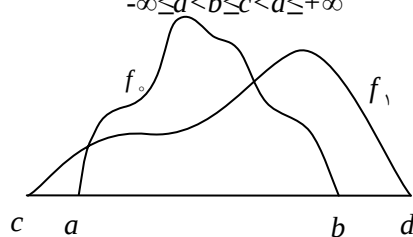
شکل ۱: اشکال مختلف مجموعه محدب نقاط خطا



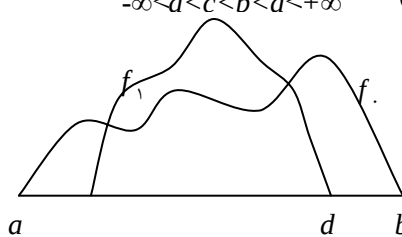
(الف) $-\infty \leq a < b < c < d \leq +\infty$



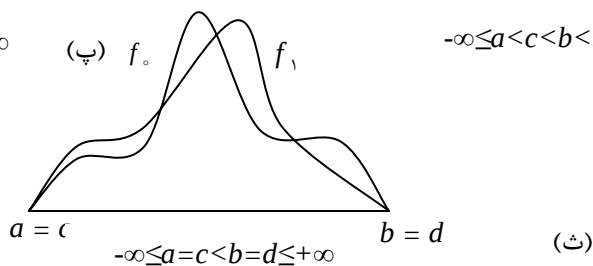
(ب) $-\infty < a < c < b < d < +\infty$



(پ) $-\infty \leq c < a < b < d \leq +\infty$



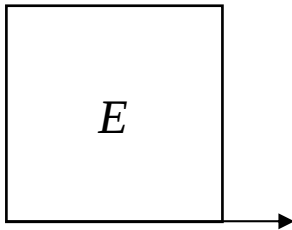
(ت) $-\infty \leq a < c < b < d \leq +\infty$



(ث)

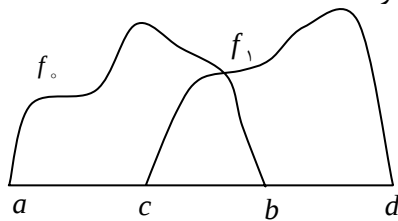
شکل ۲: نمودارهای پنجگانه توابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X

بنابراین سه نقطه $(0,0)$ ، $(0,1)$ و $(1,0)$ ، طبق روابط بالا و قضیه ۲-۱، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر می باشد.



شکل ۴: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty \leq a < b \leq c < d \leq +\infty$

۲- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل ۵: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty \leq a < c < b < d \leq +\infty$

$$\begin{aligned}\alpha_0^* &= E_{\theta_0}(\psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) > 0) = (P_{\theta_0}(c < X < d))^n = (P_{\theta_0}(c < X < b))^n\end{aligned}$$

و از آنجا که $c < b$ است پس $0 < P_{\theta_0}(c < X < b) < 1$ است.

$$\begin{aligned}\beta_0^* &= E_{\theta_0}(1 - \psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) = 0) = (P_{\theta_0}(a < X < c))^n = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= E_{\theta_1}(\psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = 0) = (P_{\theta_1}(b < X < d))^n = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= E_{\theta_1}(1 - \psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) > 0) = (P_{\theta_1}(a < X < b))^n \\ &= (P_{\theta_1}(c < X < b))^n\end{aligned}$$

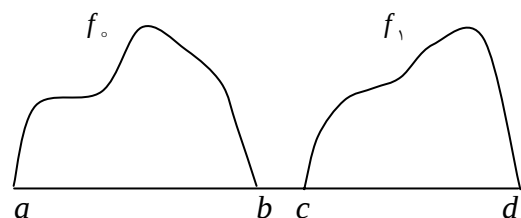
در اینجا نیز به دلیل اینکه $c < b$ است پس $0 < P_{\theta_1}(c < X < b) < 1$ است.

برای بدست آوردن مجموعه نقاط فوق نیاز به انتخاب توابع چگالی مناسب تحت برای H_0 و H_1 داریم. حال ببینیم تابع چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 چگونه باید انتخاب گردند تا مجموعه های مختلف فوق حاصل شوند. در هر یک از حالت هایی که برای f_0 و f_1 در نظر خواهیم گرفت فرض می کنیم که تکیه گاه متغیر تصادفی پیوسته X بازه هایی حقیقی به شکل (a, b) و (c, d) به ترتیب، تحت H_0 و H_1 باشند. در این صورت نمودار توابع چگالی احتمال f_0 و f_1 به یکی از پنج حالت در نمودار (۲) خواهد بود.

برای پی بردن به چگونگی رفتار مجموعه محدب خطا در نقاط مرزی لم نیمن پیرسن برای هر یک از موارد فوق باید نقاط خطای دسته آزمونهای ψ_γ و ψ_γ^* (آزمونهای (۶) و (۱۱)) را مورد بررسی قرار دهیم. اما به دلیل تحدب این مجموعه نقاط کافیسست وضعیت نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* (آزمون ψ_γ^* به ازای $\gamma = 0$) و ψ_1 (آزمون (۱۶)) را تعیین کنیم.

حال به بررسی وضعیت نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 در هر یک از موارد فوق می پردازیم.

۱- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل ۳: نمودار چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty \leq a < d \leq c < b \leq +\infty$

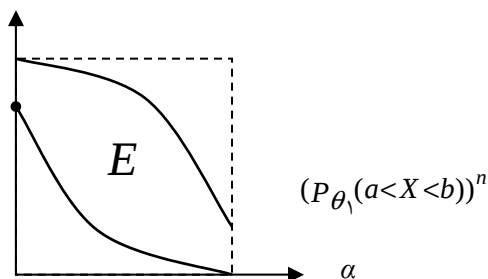
$$\begin{aligned}\alpha_0^* &= E_{\theta_0}(\psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) > 0) = (P_{\theta_0}(c < X < d))^n = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= E_{\theta_1}(1 - \psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = 0) = (P_{\theta_1}(a < X < b))^n = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= E_{\theta_1}(\psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = 0) = (P_{\theta_1}(a < X < b))^n = 0\end{aligned}$$

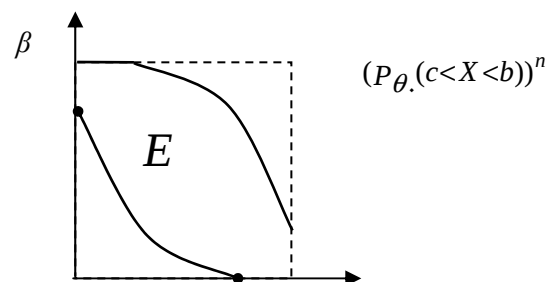
$$\begin{aligned}\beta_1 &= E_{\theta_1}(1 - \psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = 0) = (P_{\theta_1}(c < X < d))^n = 0\end{aligned}$$

محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه‌های فوق به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۸: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty \leq c < a < b < d \leq +\infty$

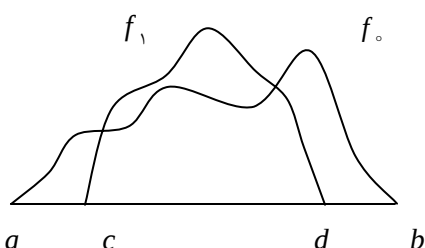
بنابراین چهار نقطه $(1, 0)$ ، $((P_{\theta_0}(c < X < b))^n, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(0, (P_{\theta_1}(c < X < b))^n)$ ، طبق روابط بالا و قضیه ۱-۲، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه‌های فوق به صورت زیر می‌باشد.



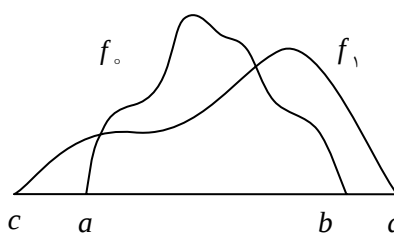
شکل ۹: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty \leq a < c < b < d \leq +\infty$

۴- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه

۳- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونه‌های ψ_1^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل ۱۰: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty \leq a < c < d < b \leq +\infty$



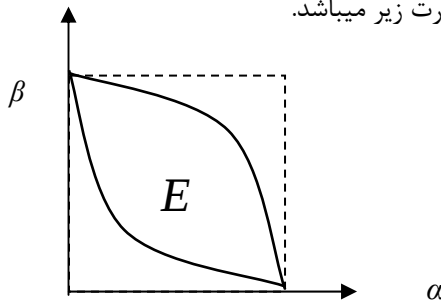
شکل ۱۱: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty \leq c < a < b < d \leq +\infty$

$$\begin{aligned} \alpha_0^* &= E_{\theta_0}(\psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) > 0) = (P_{\theta_0}(c < X < d))^n \\ &\quad \text{و } 0 < P_{\theta_0}(c < X < d) < 1 \text{، زیرا } a < c \text{ و } d < b \text{ است.} \\ \beta_0^* &= E_{\theta_0}(1 - \psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) = 0) \\ &= (P_{\theta_0}(a < X < c) + P_{\theta_0}(d < X < b))^n = 0 \\ \alpha_1 &= E_{\theta_1}(\psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = 0) = (P_{\theta_1}(X \in \emptyset))^n = 0 \\ \beta_1 &= E_{\theta_1}(1 - \psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) > 0) = (P_{\theta_1}(a < X < b))^n \\ &= (P_{\theta_1}(c < X < d))^n = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) > 0) \\ &= (P_{\theta_0}(c < X < d))^n = (P_{\theta_0}(a < X < b))^n = 1 \\ \beta_0^* &= E_{\theta_0}(1 - \psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) = 0) = (P_{\theta_0}(X \in \emptyset))^n = 0 \\ \alpha_1 &= E_{\theta_1}(\psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) = 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = 0) \\ &= (P_{\theta_1}(c < X < a) + P_{\theta_1}(b < X < d))^n = 0 \\ \beta_1 &= E_{\theta_1}(1 - \psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) > 0) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) > 0) = (P_{\theta_1}(a < X < b))^n \\ &\quad \text{که } 0 < P_{\theta_1}(a < X < b) < 1 \text{، زیرا } c < a \text{ و } b < d \text{ است.} \end{aligned}$$

بنابراین سه نقطه $(1, 0)$ ، $((P_{\theta_1}(a < X < b))^n, 0)$ و $(0, 1)$ ، طبق روابط بالا و قضیه ۱-۲، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه

نتیجه شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر میباشد.



شکل ۱۲: مجموعه محدب نقاط خطای وقتی $-\infty \leq a=c < b=d \leq +\infty$

۳. مثالها و نکته ها

اینک به عنوان مثالی از موارد فوق حالت های زیر را در نظر بگیرید.

۱- $H_0: X \sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X \sim U(1,2)$

۲- $H_0: X \sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X \sim U(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

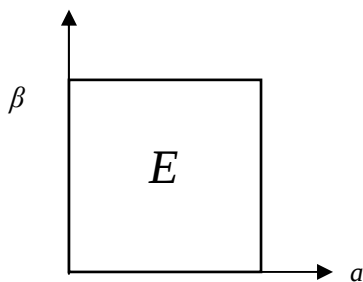
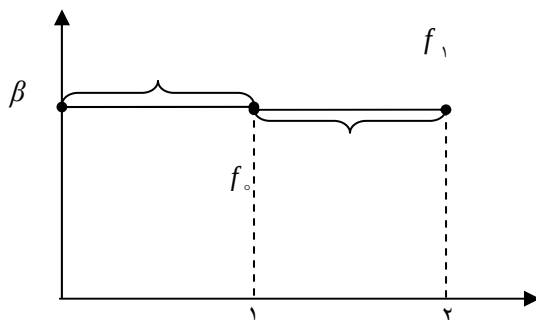
۳- $H_0: X \sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X \sim U(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

۴- $H_0: X \sim U(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ در مقابل $H_1: X \sim U(0,1)$

۵- $H_0: X \sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X \sim N(1,1)$

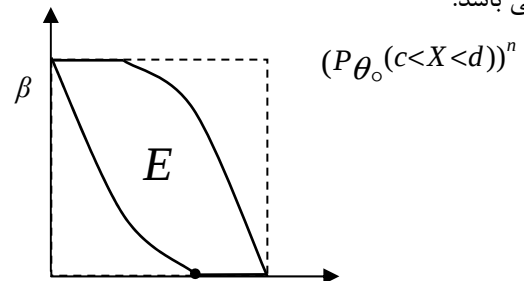
در مثال (۱) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت H_1 و H_0 منطبق بر شکل ۳ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت

زیر می باشد



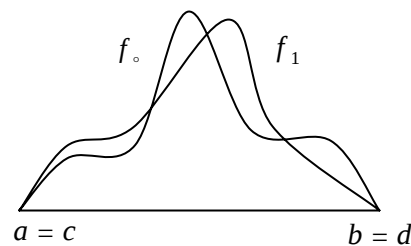
شکل ۱۳: نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۱)

بنابراین سه نقطه $(0, \circ)$ ، $(1, \circ)$ ، $((P_{\theta_0}(c < X < d))^n, \circ)$ و $(\circ, 1)$ ، طبق روابط بالا و قضیه ۱-۲، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر می باشد.



شکل ۱۰: مجموعه محدب نقاط خطای وقتی $-\infty \leq a < c < d < b \leq +\infty$

۵- اگر چگالی f_θ تحت H_1 و H_0 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهای ψ_1^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:

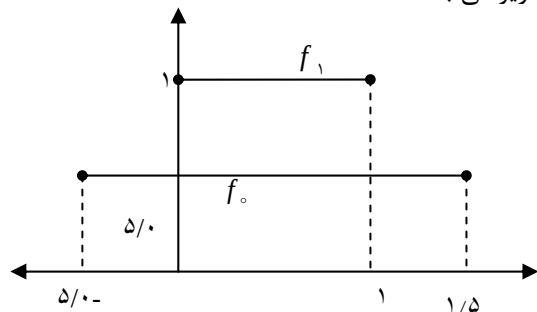
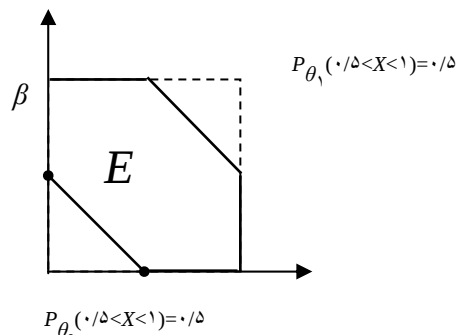


شکل ۱۱: نمودار توابع چگالی f_1 و f_0 وقتی $-\infty \leq a=c < b=d \leq +\infty$

$$\begin{aligned} \alpha_0^* &= E_{\theta_0}(\psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) > \circ) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) > \circ) = (P_{\theta_0}(c < X < d))^n \\ &= (P_{\theta_0}(a < X < b))^n = 1 \\ \beta_0^* &= E_{\theta_0}(1 - \psi_0^*(\mathbf{X})) = P_{\theta_0}(f_0(\mathbf{X}) = \circ) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_0}(f_0(X_i) = \circ) = (P_{\theta_0}(X \in \emptyset))^n = 0 \\ \alpha_1 &= E_{\theta_1}(\psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) = \circ) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) = \circ) = (P_{\theta_1}(X \in \emptyset))^n = 0 \\ \beta_1 &= E_{\theta_1}(1 - \psi_1(\mathbf{X})) = P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X}) > \circ) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{\theta_1}(f_1(X_i) > \circ) = (P_{\theta_1}(a < X < b))^n \\ &= (P_{\theta_1}(c < X < d))^n = 1 \end{aligned}$$

بنابراین دو نقطه $(0,1)$ و $(1,0)$ متعلق به مجموعه E است و مجموع نقاط خطا در هیچ نقطه دیگری محور α و β را قطع نمی کند در

در مثال (۲) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت H_1 و H_0 متناظر بر شکل ۵ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.

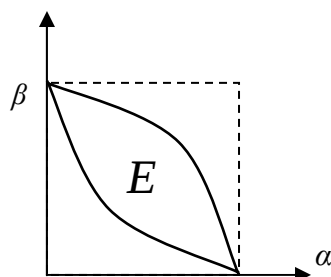
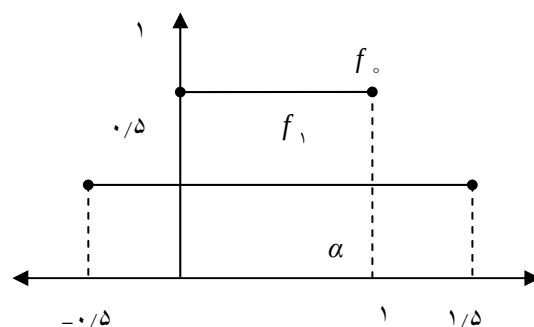
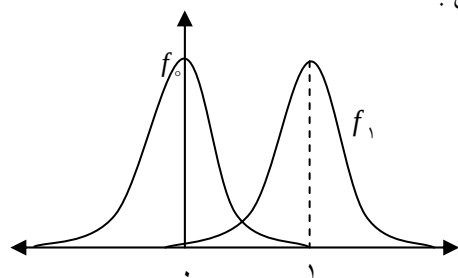
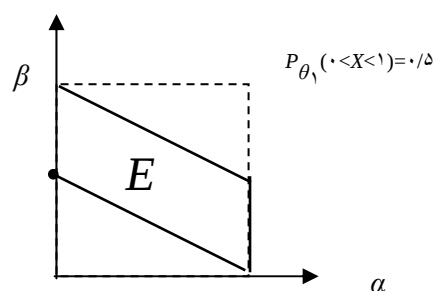


شکل ۱۴: نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۲)

شکل ۱۶: نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۴)

در مثال (۳) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت H_1 و H_0 متناظر بر شکل ۷ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.

در مثال (۳) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت H_1 و H_0 متناظر بر شکل ۷ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.

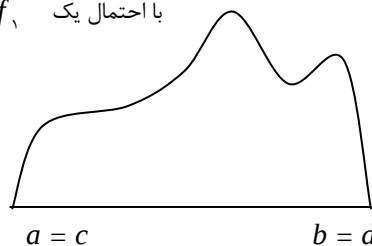


شکل ۱۵: نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۳)

شکل ۱۷: نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۵)

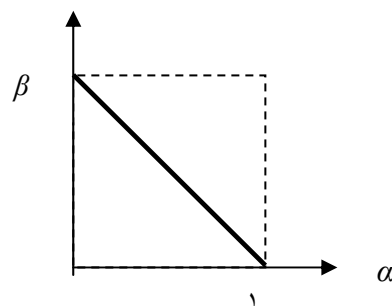
نکته ۳-۱: فرض کنید با احتمال یک $f_0 = f_1$ ،

با احتمال یک $f_0 = f_1$



شکل ۱۸: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی با احتمال یک $f_0 = f_1$

در این صورت مجموعه محدب نقاط خطا برای فرضیه $H_0: f_\theta = f_0$ در مقابل $H_1: f_\theta = f_1$ ، خط واصل بین نقاط $(0, 1)$ و $(1, 0)$ در شکل زیر است:



شکل ۱۹: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی با احتمال یک $f_0 = f_1$

زیرا طبق لم نیمین پیرسن، آزمون $\psi(\mathbf{x}) = \gamma$ به ازای هر $0 \leq \gamma \leq 1$ آزمون MP در سطح γ برای H_0 در مقابل H_1 است. قابل ذکر است مجموعه محدب فوق تمام شرایط قضیه ۱-۲ را داراست و همچنین هر آزمون، برای H_0 در مقابل H_1 ، MP، سطح α (که α اندازه آزمون مورد نظر است) می باشد و در تمام این آزمونها $\alpha = 1 - \beta$ است.

نکته ۳-۲: مساحت مجموعه نقاط E

الف: با میزان انطباق f_0 و f_1 رابطه معکوس دارد.

ب: با حجم نمونه رابطه مستقیم دارد.

نکته ۳-۳: در دو حالت زیر حجم نمونه هیچگونه تاثیری در مساحت مجموعه نقاط E ندارد.

الف: با احتمال یک $f_0 = f_1$. زیرا نقطه خطای آزمونهای آن به حجم نمونه بستگی ندارد.

ب: تکیه گاه X تحت f_0 و f_1 با احتمال یک مجزا باشند (شکل ۲-الف). زیرا در این صورت مجموعه E کل مربع واحد را شامل می شود.

نکته ۳-۴: اگر $P_{\theta_1}(f_0(\mathbf{X}) > 0) = 1$ باشد، باید تغییراتی در صورت لم نیمین پیرسن اعمال کنیم تا به بهترین و ساده ترین شکل ممکن در آید. در این حالت کفایت فقط قسمت (الف)، در لم نیمین پیرسن را به صورت زیر بازنویسی کنیم؛

الف: هر آزمون ψ به شکل

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \lambda(\mathbf{x}) > k \\ \gamma(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) = k \\ 0 & \lambda(\mathbf{x}) < k \end{cases} \quad (1)$$

به ازای لا اقل یک $0 \leq k \leq \infty$ و $0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1$ ، یک آزمون MP در سطح α ($\alpha = E_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))$) برای آزمودن فرضیه ساده $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1: \theta = \theta_1$ است.

مراجع

- [1] Bickel, P.J. and Duksum, K.A. (1977). "Mathematical Statistics". Holden-Day, Inc., Okland.
- [2] Casella, G. and Berger, R.L., (1990). "Statistical Inference". Duxbury Press, California.
- [3] Lehman, E.L. (1983). "Theory of Point Estimation". Wiley, New York.
- [4] Lehman, E.L. (1986). "Testing Statistical Hypotheses", 2nd Edition. Wiley, New York.
- [5] Rohatgi, V.K. and Ehsanes Saleh, A.K.Md, (2001). "An Introduction to Probability and Statistics", 2nd Edition. John Waily & Sons, New York.

[۶] پارسیان، احمد، (۱۳۷۸). "مبانی آمار ریاضی". اصفهان، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.

[۷] مشکانی، علی، (۱۳۷۷). "مقدمه ای بر نظریه آمار (ترجمه)". انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.