توزیع α - پایدار

مهرناز محمدپور [۱]

چکیده

در این مقاله با معرفی توزیع‌های α - پایدار به بررسی و کنکاش بیشتر این کلاس از توزیعها پرداخته شده است.

واژه های کلیدی : چولگی - تابع مشخصه - توزیع لوی - نمودار Q-Q - همگرایی در احتمال.

۱. مقدمه

توزیع‌های α- پایدار (α–stable) کلاس بسیار وسیعی از توزیعها را تشکیل می‌دهند و به علت جرم موجود در دمهای تابع چگالی این گروه از توزیعها، به توزیع‌های سنگین دم نیز معروف می‌باشند.

علت نامگذاری این گروه از توزیعها به توزیع‌های پایدار به دلیل خصوصیتی است که این گروه از متغیرهای تصادفی دارند که به ازای هر $n \geq ۲$ ، ثابت $C_n > ۰$ و ثابت حقیقی D_n وجود دارد بطوریکه

$$X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n \overset{d}{=} C_n X + D_n$$

$X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع از X می‌باشند.

مطالعه روی این گروه از توزیعها از سال ۱۹۲۰ توسط Paul Levy آغاز شد. محققان با مطالعه روی میدان جاذبه ستارگان، نوفه‌های موجود در وسایل ارتباطی و موارد تجربی مانند موارد اقتصادی و مالی به خصوص در کشورهای دارای تورم به وجود چنین توزیع‌هایی پی بردند.

۲. معرفی توزیع α- پایدار

تاکنون چهار نوع پارامتربندی برای این توزیع توسط افراد مختلف مطرح شده است و از آنجا که فرم بسته‌ایی برای تابع چگالی این گروه از توزیعها وجود ندارد، در مطالعات با مشکلاتی مواجه می‌شویم به طوری که تنوع پارامتربندی مطالعه آنها را راحت‌تر می‌سازد.

کاربرد بعضی از این انواع پارامتربندی در موارد نظری و تئوری و کاربرد بعضی دیگر در موارد عملی و شبیه‌سازی، پیچیدگی‌های موجود را می‌کاهد.

دراین مقاله پارامتربندی که توسط سامورودنیتسکی و تاکو (Samorodnitsky, Taqqu) ارائه شده،بیان می‌شود.

---

[۱] دانشجوی دکتری، بخش آمار، دانشگاه شیراز

توزیع α- پایدار توسط چهار پارامتر مشخص می‌شود و به اختصار آن را به این صورت نمایش می‌دهیم.

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

α: اندیس پایداری این توزیع بوده و هر اندازه α کمتر باشد جرم موجود در دمها بیشتر می‌شود، $\alpha \in (0,2]$ است.

β : چولگی توزیع را مشخص می‌کند و $\beta \in [-1,1]$ است.

σ : پارامتر مقیاس می‌باشد و $\sigma \in (0,\infty)$ است.

μ : پارامتر مکان می‌باشد و $\mu \in (-\infty,\infty)$ است.

چون فرم بسته‌ایی برای تابع چگالی توزیع α- پایدار وجود ندارد به راحتی نمی‌توان تابع چگالی را رسم کرده و نقش پارامترهای موجود در این توزیع را دید.

در سال ۱۹۹۷، Nolan با نوشتن الگوریتمی مشکل موجود را از بین برد و حال با استفاده از برنامه اجرایی Nolan، رسم نمودار تابع چگالی میسر شده است. در نمودار ۱ تغییرات این چهار پارامتر بررسی شده است.

تعریف ۲-۱: متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر به ازای هر ثابت مثبت A وB، یک ثابت مثبت C و ثابت حقیقی D وجود داشته باشد به قسمی که

$$AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D$$

زمانی که X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی و یک کپی از X است. متغیر تصادفی X اکیداً پایدار نامیده می‌شود، اگر رابطه بالا برقرار و $D = 0$ باشد.

قضیه ۲-۱: برای هر متغیر تصادفی پایدار، ثابت $\alpha \in (0,2]$ وجود دارد به قسمی که ثابت C در تعریف بالا به صورت $C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$ می‌باشد.

اثبات: قضیه ۵.۱ [۲] .

مثال ۲-۱: فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. در این صورت X یک متغیر تصادفی پایدار با $\alpha = 2$ می‌باشد زیرا

$$AX_1 + BX_2 \sim N\left((A+B)\mu \,, (A^2+B^2)\sigma^2\right)$$

بنا به تعریف ۲-۱،

$$C = (A^2+B^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad D = (A+B-C)\mu \,.$$

تعریف ۲-۲: متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار می‌باشد اگر و تنها اگر به ازاء هر $n \geq 2$ ، ثابت $C_n > 0$ و ثابت حقیقی D_n وجود داشته باشد به طوری که

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \overset{d}{=} C_n X + D_n$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی و یک کپی از X می‌باشند.

با مراجعه به قضیه ۵.۱.۱ [۲] نشان داده می‌شود که لزوما $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ می‌باشد.

توجه: تعریف ۲-۱ ، با تعریف ۲-۲ معادل می‌باشد .

تعریف ۲-۳: متغیر تصادفی X دارای توزیع α-پایدار می‌باشد اگر تابع مشخصه آن به این صورت بیان شود که؛

$$Ee^{i\theta X} = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(sign\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\} & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta.\frac{2}{\pi}(sign\theta)\ln|\theta|) + i\mu\theta\} & \alpha = 1 \end{cases}$$

در توزیع‌های α- پایدار تنها در سه حالت فرم بسته تابع چگالی وجود دارد. زمانی که $\alpha = 2$، توزیع مربوطه نرمال، زمانیکه $\alpha = 1$ توزیع مربوطه کوشی و زمانی که $\alpha = \frac{1}{2}$ توزیع مربوطه لوی(levy) خواهد شد.

توجه: تعریف ۲-۳، با تعریف ۲-۲ معادل است.

۳. بررسی دقیق‌تر توزیع‌های پایدار

از آنجا که فرم بسته‌ایی برای تابع چگالی توزیع‌های پایدار وجود ندارد برای دیدن شکل توزیع و بررسی رفتارهای آن کارهای متفاوتی می‌توان انجام داد.

- شبیه‌سازی
- محاسبه تابع چگالی

۱.۳ شبیه‌سازی

با شبیه‌سازی این گروه از توزیعها، تا حدی مشکلات موجود کاسته می‌شود. در اغلب موارد برای شبیه‌سازی از پارامتربندی که توسط Zolotarev (1986) [۲] انجام شده استفاده می‌شود زیرا پارامتربندی Samorodnitsky و Taqqu (1994) بیشتر برای زمانی که $\beta = 0$ است استفاده می‌شود.

قضیه ۳-۱: فرض کنید متغیر تصادفی γ دارای توزیع یکنواخت روی $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ و W متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱ و متغیرهای تصادفی γ و W از هم مستقل باشند در این صورت

$$X = \frac{\sin\alpha\gamma}{(\cos\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\cos((1-\alpha)\gamma)}{W}\right)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}$$

$$\sigma X + \mu \sim S_{\alpha}(\sigma, 0, \mu)$$

می‌باشد.

اثبات: به [۲] مراجعه کنید.

۲.۳ محاسبه تابع چگالی

برای محاسبه تابع چگالی این کلاس از متغیرها فعالیت‌هایی از سال ۱۹۷۳ توسط Crow و Holt آغاز شد، تا این که کاملترین الگوریتم در سال ۱۹۹۷ توسط Nolan نوشته شد.

از طریق این برنامه اجرایی محاسبه تابع چگالی، تابع توزیع، محاسبه چندک‌ها، شبیه‌سازی داده‌ها و کارهای جالب دیگر می‌توان انجام داد. با ورود به صفحه خانه‌ایی J.P. Nolan [۳] می‌توان به این برنامه اجرایی دسترسی پیدا کرد.

با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده توزیع α - پایدار در S-plus و یا در برنامه اجرایی (1997) Nolan، می‌توان در S-plus با استفاده از تابع ((plot (density (file.name، تابع چگالی این مجموعه داده‌ها را رسم کرد. از طرفی در برنامه اجرایی Nolan، رسم تابع چگالی متغیرهای تصادفی پایدار برحسب پارامترهای مختلف میسر می‌باشد.

بنابراین با توجه به نمودار شماره ۲ می‌توان دید که نمودار تابع چگالی داده‌های شبیه سازی شده پایدار برآورد خوبی برای نمودار تابع چگالی این گروه از توزیعها می‌باشد و از این نظر مشکلات مربوط به عدم دسترسی فرم بسته تابع چگالی کاهش می‌یابد. (تمام این نمودارها توسط برنامه اجرایی Nolan و S-plus انجام شده است).

٤. تمایز توزیع‌های α- پایدار $(0 < \alpha < 2)$ از توزیع نرمال

تاکنون روش دقیقی برای شناسایی این گروه از توزیعها موجود نمی‌باشد. حال زمانی که α به ۲ نزدیک می‌شود، راههای متفاوتی برای تمایز این توزیعها از توزیع نرمال وجود دارد.

- رسم Q-Q plot
- رسم $S_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$ بر حسب N.

با افزایش اندازهٔ نمونه N , S_N^2 به مقدار ثابتی همگرا نمی‌باشد و به علت نامتناهی بودن واریانس، $S_N^2 \xrightarrow{\ p\ } \sigma^2$ ((Clives (1972)) .

۵. قضیه حد مرکزی در توزیع‌های پایدار

قضیه حد مرکزی کلاسیک به این صورت مطرح می‌شود که توزیع حدی استاندارد شده مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (i.i.d) با واریانس متناهی، نرمال می‌باشد.

حال اگر فرض متناهی بودن واریانس را حذف کنیم، در این صورت تنها توزیع حدی، توزیع پایدار می‌باشد. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۵-۱: متغیرهای تصادفی i.i.d , $X_1, X_2, \ldots$ را در نظر می‌گیریم، حال داریم که

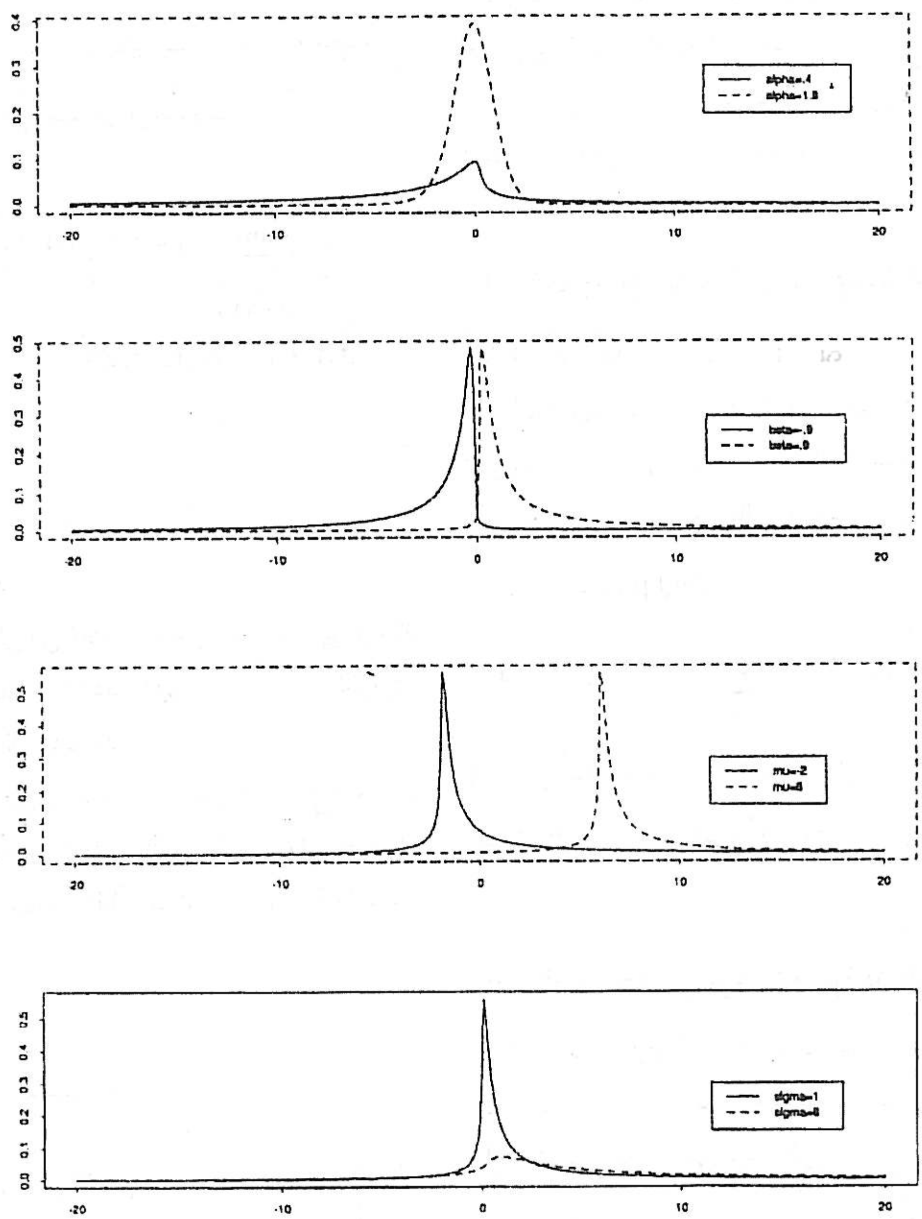
---

[۲]
$$Ee^{i\theta X} = \begin{cases} \exp\{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}[1 - i\beta(\tan\frac{\pi\alpha}{2})(sign\,\theta)] \\ \quad + i[\mu - \beta(\tan\frac{\pi\alpha}{2})\sigma]\theta\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma|\theta|[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign\,|\theta|)] + i[\mu - \beta\frac{2}{\pi}\sigma\ln\sigma]\theta\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

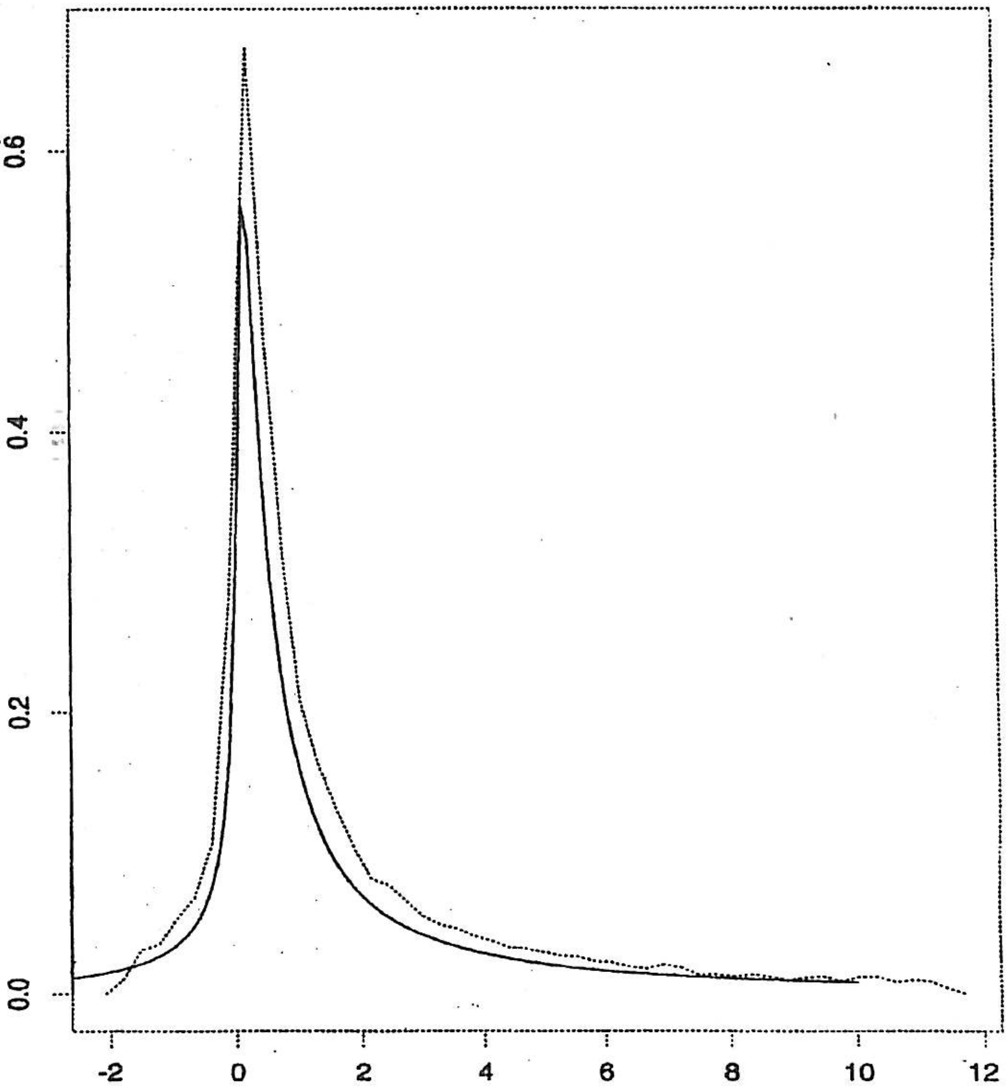
[۳] (John P. Nolan homepage)

$a_n(X_1+X_2+\cdots+X_n)-b_n \xrightarrow{\ell} Z$ و $a_n>0,\ b_n\in\Re$ اگر و تنها اگر Z متغیر تصادفی پایدار باشد. در این حالت لزوماً $a_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}$ و $0<\alpha\leq 2$ می‌باشد.(برای اثبات مراجع [۲]، [۳]، [۶] و [۸] را ببینید).

نمودار ۱- بررسی پارامترهای توزیع پایدار



نمودار ۲- تابع چگالی و تابع چگالی داده‌های شبیه‌سازی‌شده متغیرهای تصادفی α - پایدار با $\alpha = ۰/۵$



مراجع

[1] Clive, W.J., Granger and Daniel Orr, 1972. *Infinite Variance and Research Strategy in Time Series Analysis*, J. of the Amer. Stat. Assoc, 87, pp. 275-285.
[2] Feller, W., 1975. *An Introduction to Probability Theory and It's Applications*, Vol II, 2nd ed., Wiley, New York.
[3] Gnednko, B. and Kolmogorov, A., 1968. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Varaiables,* Addison- Wiley, Reading.
[4] Holt, D. and Crow, E., 1973. *Tables and Graphs of the Stable Probability Density Function*, J. Research Nat. Bureau of Standards, B. Math. Sci., 77B, pp.143-198.
[5] Levy, P., 1924. *Theorie de L'addition des Variables Aleatoires,* Bulletin de la Societe de France 52, pp. 49-85.
[6] Meerschaert, M. and Scheffler, H.P., 2001. *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variable Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice,* Wiley, New York.