

## پلی بین فرایندهای ایستا و نایستا: دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب

زهره شیشه‌بر<sup>۱</sup>

### چکیده

در این مقاله ابتدا یک رده خاص از فرایندهای نایستا معرفی شده، سپس نشان داده می‌شود با بهره‌گیری از ارتباط بین آنها و فرایندهای ایستا، چگونه می‌توان از قوانین شناخته شده فرایندهای ایستا برای این رده استفاده کرد. واژه‌های کلیدی: اتورگرسیو- میانگین متحرک، فضای برداری، ضرب داخلی، دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب.

### ۱. مقدمه

رده‌ای از فرایندهای نایستا، دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب، می‌باشند. این فرایندها اولین بار توسط گلادیشف<sup>۲</sup> در سال ۱۹۶۱ مورد مطالعه جدی قرار گرفت [۲] و از آن پس، مقالات زیادی در مورد آنها نوشته شده است. هرد<sup>۳</sup> این رده را پلی بین فرایندهای ایستا و نایستا نام نهاده است [۳]. در سالهای اخیر، این بحث مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. قبل از مطرح کردن موضوع اصلی، لازم است مروری بر تعاریف شناخته شده داشته باشیم.

**تعریف ۱-** فرض کنید  $V$  یک فضای برداری روی اعداد حقیقی باشد. یک ضرب داخلی روی  $V$ ، یک تابع است که به هر زوج مرتب  $(\alpha, \beta)$ ، عدد حقیقی  $\langle \alpha, \beta \rangle$  را نسبت می‌دهد به طوری که برای هر  $\alpha, \beta, \gamma$  در  $V$  و هر عدد حقیقی  $c$  داشته باشیم:

$$\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle \quad (۱)$$

$$\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle \quad (۲)$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad (۳)$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 \text{ و } \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \alpha = 0. \quad (۴)$$

(در این مقاله، امید ریاضی همه متغیرهای تصادفی صفر فرض می‌شود). مجموعه متغیرهای تصادفی همراه با ضرب داخلی

$$(X, X) \rightarrow \langle X, X \rangle$$

را در نظر بگیرید. اندازه یک متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کرده:

$$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$$

و مجموعه فوق را همراه با نقاط حدی آن،  $\mathcal{A}$  بنامید.

**تعریف ۲-** دنباله  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ،  $X_n \in \mathcal{A}$ ، همراه با ضرب

<sup>۱</sup> بخش آمار، دانشگاه شیراز

<sup>۲</sup> Gladyshev

<sup>۳</sup> Hurd

داخلی  $\langle \dots \rangle$  را ایستای ضعیف گوئیم، هرگاه

$$\langle X_n, X_m \rangle = \langle X_{n+1}, X_{m+1} \rangle$$

$$\|X_n\| < \infty; m, n \in \mathbb{Z}$$

( $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح است).

در این مقاله،  $\mathcal{A}$  همراه با ضرب داخلی

$$\langle X_n, X_m \rangle = \text{cov}(X_n, X_m)$$

در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تعریف ۲ منجر به تعریف ایستای ضعیف در کتابهای معمولی سربهای زمانی خواهد شد.

## ۲. دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب

اکنون دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳- دنباله  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$ ، را یک دنباله با همبستگی متناوب گوئیم، هرگاه

$$E(X_n X_m) = E(X_{n+T} X_{m+T}); n, m \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

وقتی که  $T$  یک عدد صحیح و مثبت باشد. کوچکترین  $T > 0$  که در رابطه (۱) صدق کند، را تناوب دنباله گوئیم.

مطالعه دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب اهمیتی خاص دارد. قضیه‌های ۱ و ۲ که در ذیل آمده‌اند، ارتباط این دنباله‌های نایستا را با دنباله‌های ایستا مشخص می‌کنند. با استفاده از آنها می‌توان قضایای شناخته شده مربوط به دنباله‌های ایستا را به دنباله‌های نایستا مرتبط کرد. ابتدا به لم زیر توجه کنید.

لم ۱- مجموعه بردارهای تصادفی  $k$  تایی را در نظر بگیرید. تابعی که به هر جفت  $(Z_n, Z_m)$ ، اثر ماتریس کوواریانس آنها را نسبت دهد، یک ضرب داخلی روی مجموعه بالا است ( $Z_i$  یک بردار تصادفی  $k \times 1$  است). در واقع ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(Z_n, Z_m) \rightarrow \langle\langle Z_n, Z_m \rangle\rangle$$

$$\langle\langle Z_n, Z_m \rangle\rangle = \text{trace } K_{n,m} \quad (2)$$

$$K_{n,m} = E(Z_n Z_m')$$

(بردار  $Z_m'$  ترانواده بردار  $Z_m$  است).

الفاظ: تحقیق روابط ۴-۱ در تعریف ۱ برای  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  ساده است.

قضیه ۱- دنباله  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$ ، یک دنباله با همبستگی متناوب است اگر و تنها اگر  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ، به صورت

$$Z_n = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+T-1})'$$

یک دنباله ایستا با ضرب داخلی تعریف شده در لم ۱ باشد [۴].

الفاظ: فرض کنید  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله با همبستگی متناوب باشد، آنگاه برای هر  $m$  و  $n$  در  $\mathbb{Z}$  داریم:

$$\langle\langle Z_m, Z_n \rangle\rangle = \sum_{j=0}^{T-1} E(X_{m+j} X_{n+j})$$

$$= E(X_m X_n) + \sum_{j=1}^{T-1} E(X_{m+j} X_{n+j})$$

$$= E(X_{m+T} X_{n+T}) + \sum_{j=1}^{T-1} E(X_{m+j} X_{n+j})$$

$$= \sum_{j=1}^T E(X_{m+j} X_{n+j})$$

$$= \sum_{j=0}^{T-1} E(X_{m+1+j} X_{n+1+j})$$

$$= \langle\langle Z_{m+1}, Z_{n+1} \rangle\rangle$$

که نشان می‌دهد  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله ایستاست. برعکس فرض کنید  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله ایستاست. بنابراین برای هر  $m$  و  $n$  در  $\mathbb{Z}$ :

$$\langle\langle Z_m, Z_n \rangle\rangle = \langle\langle Z_{m+1}, Z_{n+1} \rangle\rangle$$

یا

$$\sum_{j=0}^{T-1} E(X_{m+j} X_{n+j}) = \sum_{j=0}^{T-1} E(X_{m+1+j} X_{n+1+j})$$

یا

$$E(X_n X_m) = E(X_{n+T} X_{m+T})$$

که نشان می‌دهد  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله با همبستگی متناوب با تناوب  $T$  است [۷].

قضیه ۲- دنباله  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$ ، یک دنباله با همبستگی متناوب با تناوب  $T$  است، اگر و تنها اگر دنباله  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  به طوری که

$$Y_n = (X_{nT}, X_{nT+1}, \dots, X_{nT+T-1})' \quad (3)$$

یک دنباله ایستا باشد، یعنی

$$UY_n = A_1 Y_{n-1} + \dots + A_k Y_{n-k} + V\eta_n + B_1 \eta_{n-1} + \dots + B_l \eta_{n-l} \quad (5)$$

وقتی که  $k = [\frac{p}{T}] + 1$  و  $l = [\frac{q}{T}] + 1$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_{T,1} & -\phi_{T,2} & \dots & -\phi_{T,T} \\ 0 & 1 & -\phi_{T-1,1} & \dots & -\phi_{T-1,T-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -\phi_{T-2,T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \phi_{T,iT} & \dots & \phi_{T,iT+T-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,iT-T+1} & \dots & \phi_{1,iT} \end{bmatrix}; i = 1, \dots, k$$

فرمولهای مربوط به  $V$  و  $B_i$  به روش مشابه بر حسب ضرایب  $\theta_{i,j}$  به دست می آیند. برای به دست آوردن فرم استاندارد یک مدل اتورگرسیو- میانگین متحرک چند متغیره قرار می دهیم

$$W_n = U^{-1} V \eta_n, \Phi_i = U^{-1} A_i, \Theta_i = U^{-1} B_i V^{-1} U$$

بنابراین رابطه (5) به

$$Y_n = \Phi_1 Y_{n-1} + \dots + \Phi_k Y_{n-k} + W_n - \Theta_1 W_{n-1} + \dots - \Theta_l W_{n-l} \quad (6)$$

تبدیل خواهد شد. حال مطالعه فرایند همبسته متناوب  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  که در رابطه (4) صدق می کند، معادل مطالعه فرایند اتورگرسیو- میانگین متحرک  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  طبق رابطه (6) می باشد.

$$E(Y_n Y'_m) = E(Y_{n+1} Y'_{m+1})$$

اثبات: تحقیق این حکم ساده است [۷].

مثال: دنباله  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  که با روابط زیر تعریف می شود یک دنباله

با همبستگی متناوب است:

$$X_t = a_t X_{t-1} + \xi_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \xi_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$a_t = \begin{cases} .7 & \text{زوج } t \\ .5 & \text{فرد } t \end{cases} \quad \text{و} \quad \sigma_t^2 = \begin{cases} .4 & \text{زوج } t \\ .6 & \text{فرد } t \end{cases}$$

به سادگی می توان نشان داد دنباله  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_{2t} \\ X_{2t+1} \end{pmatrix}$$

یک دنباله ایستای دو متغیره است.

به عنوان کاربرد قضیه بالا، بوشناکف<sup>۱</sup> نشان داد چگونه یک مدل اتورگرسیو- میانگین متحرک متناوب می تواند به یک مدل اتورگرسیو- میانگین متحرک ایستای چند متغیره نسبت داده شود [۱].

فرض کنید  $X_n \in \mathcal{A}, \{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله با همبستگی متناوب با تناوب  $T$  باشد و در رابطه زیر صدق کند:

$$X_n = \sum_{i=1}^p \phi_{n,i} X_{n-i} + \sum_{i=1}^q \theta_{n,i} \xi_{n-i} + \xi_n \quad (4)$$

وقتی  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  یک اغتشاش متناوب با تناوب  $T$  باشد و

$$Var(\xi_n) = Var(\xi_{n+T})$$

دنباله های چند متغیره  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  و  $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  را بر اساس دنباله های  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  و  $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  و رابطه (۳) تعریف کنید. رابطه ۴ را می توان به

فرم ماتریسی زیر نوشت:

## مراجع

- [1] Boshnakov, G.N., 1995, *Recursive Computation of the Parameters of Periodic Autoregressive Moving Average Processes*, Journal of Time Series Analysis, Vol.1, No.4, pp. 333-349.
- [2] Gladyshev, E.G., 1961, *Periodically Correlated Random Sequences*, Soviet Math.Dokl.2, pp. 385-388.
- [3] Hurd, H.L., 1960, *An Investigation Periodically Correlated Stochastic Processes*, Ph.D. Disseration, Duke University Durham, North Carolina.
- [4] Miamer, A.G., 1990, *Periodically Correlated Processes and Their Stationary Dilations*, SIAM J. Appl.Math., Vol.50, pp.1194-1199.