

معرفی الگوهای دوخطی در سریهای زمانی: تشخیص و برآورد

سید مهدی امیر جهانشاهی^۱ حسینعلی نیرومند^۲

چکیده

در این مقاله ابتدا الگوهای دوخطی و سپس الگوهای دوخطی بالا قطری، قطری، و زیر قطری را معرفی می کنیم. همچنین با الگوهای دوخطی مارکوفی و شرایط مانایی آنها آشنا می شویم و روشهای تشخیص مرتبه الگوهای دوخطی را معرفی کرده و با روشهای برآورد پارامترهای الگوهای دوخطی آشنا می شویم، و در انتها برنامه های مورد نیاز برای شبیه سازی و برآورد پارامترهای الگوهای زیر قطری و مارکوفی را ارائه می کنیم.

۱. مقدمه

۱-۱ آشنایی با الگوهای دوخطی

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^q c_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{l=0}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} \quad (1-2-1)$$

که در آن $\{\varepsilon_t\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی iid با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 < \infty$ است و فرض می شود که برای $s < t$ ، ε_t و X_s مستقل از X_s است $(E(X_s \varepsilon_t) = 0, s < t)$. ضمناً این الگو نسبت به X ها و ε ها به طور جداگانه، خطی است ولی نسبت به هر دو، خطی نیست. مدل (۱-۲-۱) را یک سری زمانی دوخطی می نامیم و با $BL(p, q, m, k)$ نمایش می دهیم.

با قرار دادن $b_{ll'} = 0$ برای هر l و l' در معادله (۱-۲-۱)، یک مدل خطی $ARMA(p, q)$ به دست می آید. در اینجا مناسب است که برای زیر رده هایی از مدل اصلی، نامهای خاصی را انتخاب کنیم، به عنوان مثال اگر در معادله (۱-۲-۱)، $c_0 = 1$ باشد، معادله را همگن نامیده و به صورت زیر نمایش می دهیم:

الگوهای دوخطی کاربردهای فراوانی در علوم زیستی، اقتصاد، مهندسی، جغرافیا و بوم شناسی و ... دارند. خصیصه مورد توجه فرایند دوخطی این است که با وجود غیرخطی بودن، ساختمان نظری آن شبیه یک فرایند خطی است. این الگوها اولین بار توسط موهلر^۳ در سال ۱۹۷۳ ارائه شدند و کاربردهای آنها برای مدل کردن سریهای زمانی توسط گرانجر و اندرسن^۴ [۱] مطرح شده است و بعد از آن توسط پرستلی^۵ [۴] و به طور کلیتر توسط رائو^۶ [۵] مورد بحث قرار گرفته اند.

۲-۱ الگوهای سری زمانی دوخطی کلی

شکل کلی الگوهای سری زمانی دوخطی، دنباله ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ تعریف شده در فضای احتمال (Ω, B, P) است که در معادله تفاضلی زیر صدق می کند:

^۴ Granger & Anderson

^۵ Priestley

^۶ Rao

^۱ کارشناس ارشد آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ گروه آمار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳ Mohler

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{l=1}^m b_l X_{t-l} \varepsilon_t + \varepsilon_t \quad (1.3-1)$$

که در آن، $\{\varepsilon_t\}$ یک دنباله از متغیرهای مستقل هموزیع با $E(\varepsilon_t) = 0$ ، $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ است. مدل (۱.۳-۱) یک حالت خاص از الگوهای دوخطی است که ما آن را فرایند دوخطی مارکوفی می نامیم و با $\text{MBL}(p, m)$ نمایش می دهیم که در واقع همان الگوی $\text{BL}(p, 0, m, 0)$ است. به عنوان مثال، الگوی $X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1}\varepsilon_t + \varepsilon_t$ یک الگوی دوخطی مارکوفی است. از طرفی می دانیم که مدل های خطی ARMA می توانند به صورت یک معادله تفاضلی مرتبه اول برداری نوشته شوند و این شکل برداری به نام فضای وضعیت شناخته شده است. مطالعه خواص فرایندها، وقتی به شکل فضای وضعیت هستند، به خاطر طبیعت مارکوفی مدل، آسانتر است. بنابراین مدل های بالا را در شکل فضای وضعیت نشان می دهیم و خاصیت مانایی آنها را بررسی می کنیم. شکل برداری مدل (۱.۳-۱) که آن را با $\text{VMBL}(p, m)$ یا $\text{VBL}(p, 0, m, 0)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر است:

$$\underline{X}_t = A \underline{X}_{t-1} + B \underline{X}_{t-1} \varepsilon_t + C \varepsilon_t \quad (2.3-1)$$

$$X_t = H' \underline{X}_t$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_p \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \dots a_p \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} b_1 b_2 \dots b_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})', \quad C = (1, 0, \dots, 0)', \quad p > m, \quad H = (1, 0, \dots, 0)'$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ می کنیم که } H = (1, 0, \dots, 0)'$$

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^q c_j \varepsilon_{t-j} +$$

$$\sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t \quad (2.2-1)$$

بنابراین، به جز جمله ε_t ، همه X_t ها به وسیله گذشته ε_t ها و X_t ها مشخص می شوند. مدل دوخطی کامل همان رابطه (۲.۲-۱) است وقتی $p = q = 0$ ، که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t$$

اگر $b_{ll'} = 0$ برای $l < l'$ باشد، مدل، بالا قطری نامیده می شود. بنابراین مدل بالا قطری کامل به صورت زیر است:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad l > l'$$

به عنوان مثال، الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ یک الگوی بالا قطری است.

به طور مشابه اگر $b_{ll'} = 0$ برای $l > l'$ باشد، مدل، زیر قطری است. بنابراین مدل زیر قطری کامل به صورت زیر است:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad l < l'$$

به عنوان مثال، الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-2}X_{t-1} + \varepsilon_t$ یک الگوی زیر قطری است.

اگر $b_{ll'} = 0$ برای $l \neq l'$ باشد، مدل، قطری نامیده می شود. بنابراین، مدل قطری کامل به صورت زیر است:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad l = l'$$

به عنوان مثال، الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ یک الگوی قطری است.

۳-۱ الگوهای دوخطی مارکوفی

فرض کنید $\{X_t\}$ یک سری زمانی پارامتری زمان گسسته

باشد که در معادله تفاضلی زیر صدق می کند:

۴-۱ شرایط مانایی

با فرض $\mu_t = E(x_t)$ و گرفتن امید ریاضی از دو طرف رابطه (۲-۳-۱) خواهیم داشت:

$$\mu_t = A\mu_{t-1}$$

بنابراین [۶] شرط کافی برای مانایی مرتبه اول $\{X_t\}$ (یعنی مستقل بودن $E(X_t)$ از t ، وقتی که $t \rightarrow \infty$) به صورت زیر است:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \{\lambda_j(A)\} < 1$$

که $\lambda_1(A), \dots, \lambda_p(A)$ ویژه مقدارهای ماتریس A هستند و $\rho(A)$ شکل طیفی ماتریس A نامیده می شود. سوبا رائو [۶] و نودیکر [۳]^۷ نشان دادند که شرط کافی برای مانایی مرتبه دوم مدل (۱-۳-۱) به صورت زیر است:

$$\rho|A \otimes A + B \otimes B \sigma_e^2| < 1$$

که در آن $A \otimes A$ حاصلضرب کرونکر از مرتبه $p' \times q'$ است.

۲. روشهای تشخیص الگوهای دوخطی

در سری زمانی کلاسیک، توابع خود همبستگی نمونه ای^۸، خود همبستگی جزئی نمونه ای^۹، خود همبستگی واریان نمونه ای^{۱۰} و خود همبستگی واریان جزئی نمونه ای^{۱۱}، برای تشخیص مرتبه الگوهای خطی، موارد استفاده گسترده ای دارند، ولی در تشخیص سریهای زمانی غیرخطی از آنها استفاده چندانی نمی شود، زیرا آنها فقط توانایی توصیف تغییرات در الگوهای خطی را دارند و بر این اساس در تشخیص سریهای زمانی غیرخطی کارآمد نیستند. در زیر چند روش تشخیص مرتبه الگوهای دوخطی را معرفی می کنیم.

^۷ Neudecker

^۸ Sample Autocorrelation Function (SACF)

^۹ Sample Partial Autocorrelation Function (SPACF)

^{۱۰} Sample Inverse Autocorrelation Function (SIACF)

^{۱۱} Sample Inverse Partial Autocorrelation Function (SIPACF)

۱-۲ معیار آکائیک

یکی از روشهای تشخیص مرتبه الگو، معیار آکائیک است و برای محاسبه آن کافی است پارامترهای مدل را به ازای مقادیر مختلف پارامترها برآورد کنیم و در هر حالت واریانس مانده ها و معیار آکائیک را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$AIC = -2(\text{ماکسیم مقدار لگ درستنمایی}) + (\text{تعداد پارامترهای مستقل})$$

$$= (N - \gamma) \text{Log} \hat{\sigma}_e^2 + 2(\text{تعداد پارامترهای مستقل})$$

که در آن $\hat{\sigma}_e^2$ واریانس مانده های مدل است و $(N - \gamma)$ تعداد مشاهدات مؤثر است (مشاهداتی که در محاسبه لگ درستنمایی مورد استفاده قرار می گیرند). انتخاب مرتبه مدل بر اساس کوچکترین مقدار آماره آکائیک صورت می گیرد.

مثال - برآزش الگوی $BL(8,0,0,4)$ به ۲۲۱ مشاهده اول سری تعداد لکه های خورشیدی ولفر و پیش بینی ۳۵ مشاهده بعدی توسط الگو [۶].

بهترین الگوی اتورگرسیوی که توسط معیار آکائیک انتخاب شده (۹) AR است:

$$X_t - 1/216X_{t-1} + 0/467X_{t-2} + 0/1416X_{t-3} - 0/169X_{t-4} + 0/147X_{t-5} - 0/0543X_{t-6} + 0/053X_{t-7} - 0/066X_{t-8} - 0/112X_{t-9} = \varepsilon_t$$

واریانس مانده ها و مقدار آکائیک الگو به صورت زیر است:

$$\hat{\sigma}_e^2(AR) = 199/27, \quad AIC = 1137/17$$

حال، الگوی $BL(8,0,0,4)$ را به داده ها برآزش می دهیم. در نتیجه برآوردهای پارامترها به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= -1/2923, \quad \hat{a}_2 = 0/3167, \quad \hat{a}_3 = -0/1059 \\ \hat{a}_4 &= 0/6077, \quad \hat{a}_5 = -0/4812, \quad \hat{a}_6 = 0/1099 \\ \hat{a}_7 &= 0/0038, \quad \hat{a}_8 = -0/1030, \quad \hat{a}_9 = 4/8113 \end{aligned}$$

مقادیر $\hat{b}_{ij}$ ، $i = 1, 2, \dots, 5$ ، $j = 1, 2, 3, 4$ ، در ماتریس زیر ارائه شده اند:

فرایند X_t^* دارای ساختار خود همبستگی $ARMA(2,1)$ است. همچنین در الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ که $j < k$ تحت کوواریانس، به صورت یک فرایند تصادفی محض ظاهر می شود، ولی X_t^* تحت کوواریانس به عنوان $ARMA(k,j)$ شناخته می شود [۱].

همان طور که در نمودارهای شکل ۱ ملاحظه می شود، هیچ ضریب معنی داری وجود ندارد. بنابراین الگوی دوخطی بالا قطری مذکور، از فرایند تصادفی محض پیروی می کند.

در نمودارهای شکل ۲، ACF از مرتبه یک به بعد قطع شده و نمودارهای PACF و IACF از مرتبه دو به بعد قطع شده اند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که توان دوم مشاهدات تولید شده از الگوی بالا قطری مذکور، از فرایند $ARMA(2,1)$ پیروی می کند.

۲-۲-۲ بررسی الگوهای زیر قطری (SBL)

الگوهای زیر قطری تحت کوواریانس، خواص مشابهی مانند فرایند تصادفی محض دارند ولی یک استثناء برای الگوهایی مانند $X_t = b\varepsilon_{t-2k}X_{t-k} + \varepsilon_t$ وجود دارد که تحت کوواریانس، $MA(3k)$ هستند. الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-2}X_{t-1} + \varepsilon_t$ تحت کوواریانس، فرایند تصادفی محض است ولی فرایند X_t^* همان الگو تحت کوواریانس، $ARMA(2,3)$ است [۱].

۳-۲-۲ بررسی الگوهای قطری (DBL)

الگوی قطری مانند $X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ تحت کوواریانس، خواص مشابهی مانند فرایند $MA(1)$ دارد، ولی فرایند X_t^* سری مذکور از یک فرایند $ARMA(1,1)$ پیروی می کند. یک الگوی تعمیم یافته مدل بالا، الگوی $X_t = aX_{t-1} + b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ است که تحت کوواریانس، $ARMA(1,1)$ شناخته می شود. الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-k}X_{t-k} + \varepsilon_t$ نیز تحت کوواریانس، از یک فرایند $MA(k)$ پیروی می کند [۱]. از جمله روشهای دیگری که مورد استفاده قرار می گیرند، روش به استفاده از مربع مانده هاست. روش دیگری که اخیراً توسط

$$[\hat{b}_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.00042 & 0.00053 & -0.00641 & 0.01305 \\ -0.00842 & 0.00277 & -0.01452 & -0.02209 \\ 0.01213 & -0.00636 & 0.01111 & 0.02377 \\ -0.03434 & -0.00673 & -0.01126 & -0.00446 \\ 0.02830 & 0.00584 & -0.01347 & 0.01192 \end{bmatrix}$$

مقادیر واریانس مانده ها و معیار آکائیک عبارت اند از:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(BL) = 110/62, \quad AIC = 1051$$

واضح است که میانگین مربعات مانده ها و مقادیر آکائیک الگوی دوخطی بسیار کوچکتر از مقادیر متناظرشان در الگوی اتورگرسیونند.

۲-۲ استفاده از توان دوم فرایند

برای بررسی و تشخیص الگوهای غیرخطی علاوه بر گشتاورهای مرتبه دوم (اتو کوواریانسها)، گشتاورهای مراتب بالاتر یعنی مراتب سوم و چهارم نیز مفیدند. در فرایند تصادفی محض، گشتاورهای مرتبه سوم و چهارم مساوی صفرند و این وجه تمایزی بین سریهای زمانی غیرخطی و فرایند تصادفی محض است [۱].

۱-۲-۲ بررسی الگوهای بالا قطری (UBL)

فرایند بالا قطری مانند $X_t = b_1\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2}X_{t-2} + \varepsilon_t$ $MA(1)$ شناخته می شود و در حالت کلیتر، فرایند بالا قطری X_t را تحت کوواریانس می توان به صورت $MA(q)$ در نظر گرفت. در الگوهای بالا قطری گشتاورهای مرتبه سوم همگی مساوی صفرند. بنابراین وسیله ای مناسب برای تشخیص این الگوها نیستند. راه حل دیگر، استفاده از گشتاورهای مرتبه چهارم است ولی محاسبات این گشتاورها بسیار پیچیده و مشکل اند. یک روش ساده تر بررسی فرایند X_t^* تحت کوواریانس است که تفسیر نتایج را ساده تر می کند. به عنوان مثال الگوی $X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ تحت کوواریانس، خواصی مانند فرایند تصادفی محض دارد ولی

اگر فرض کنیم که $\{\varepsilon_t\}$ ها مستقل و هموزیع بوده و که به صورت $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ توزیع شده اند، تابع توزیع توأم $\{\varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2}, \dots, \varepsilon_N\}$ به صورت زیر است:

$$(\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(N-\gamma)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=\gamma+1}^N \varepsilon_t^2\right\}$$

که در آن $\gamma = \max\{p, m, k\}$.

بنابراین، برآورد درستنمایی ماکسیمم شرطی $\hat{\theta}$ به وسیله مینیم کردن عبارت زیر حاصل می شود:

$$Q(\underline{\theta}) = \sum_{t=\gamma+1}^N \varepsilon_t^2 \quad (2.3)$$

توجه کنید که جملات $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ را نمی توان از X_t به دست آورد. زیرا $X_0, X_{-1}, \dots, X_{-\gamma}$ مشاهده نشده اند. معادلات تکراری نیوتن - رافسون^{۱۱} برای مینیمم کردن $Q(\underline{\theta})$ به صورت زیرند:

$$\underline{\theta}^{(i+1)} = \underline{\theta}^{(i)} - H^{-1}(\underline{\theta}^{(i)}) G(\underline{\theta}^{(i)}) \quad (3.3)$$

که در آن $\underline{\theta}^{(i)}$ مجموعه برآوردهای به دست آمده در مرحله i -ام تکرار است و

$$G'(\underline{\theta}) = \left[\frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_1}, \frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_n} \right]$$

$$H(\underline{\theta}) = \left[\frac{\partial^2 Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{n \times n} \quad (4.3)$$

مشتقات جزئی $Q(\underline{\theta})$ با توجه به $\underline{\theta}$ به صورت زیرند:

$$\frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_i} = 2 \sum_{t=\gamma+1}^N \varepsilon_t \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 2 \sum_{t=\gamma+1}^N \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_j} + 2 \sum_{t=\gamma+1}^N \varepsilon_t \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

Newton-Raphson^{۱۱}

نلسون و مدسن^{۱۲} [۲] ارائه شده است استفاده از معیارهای LDF^{۱۳}، PLDF^{۱۴} و NLDF^{۱۵} است که حالت تعمیم یافته توابع SACF و SPACF هستند.

۳. روشهای برآورد پارامترهای الگوهای دو خطی

مسئله برآورد پارامترهای مدل دو خطی، در اصل با برآورد کردن پارامترهای یک مدل خطی تفاوت ندارد. مدل دو خطی $BL(p, 0, m, k)$ زیر را در نظر بگیرید:

$$X_t + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} = \alpha + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (1.3)$$

فرض کنید $X_1, \dots, X_N$ مشاهدات سری مانای $\{X_t\}$ باشند. مسئله، برآورد پارامترهای $\{a_1, \dots, a_p; b_{11}, \dots, b_{mk}\}$ است. روشی که در زیر معرفی می شود، روش نیوتن - رافسون است که تاکنون توسط افراد زیادی از جمله استروم و بوهلین (۱۹۶۶)، باکس و جنکینز (۱۹۷۰) و سوبا راتو (۱۹۸۱) مورد استفاده قرار گرفته است. برای راحتی، نمادهای زیر را در نظر می گیریم:

$$\theta_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\theta_{p+1} = b_{11}, \theta_{p+2} = b_{12}, \dots, \theta_{p+mk} = b_{mk},$$

$$\theta_{p+mk+1} = \alpha.$$

بنابراین، مجموعه پارامترها را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\underline{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = (a_1, a_2, \dots, b_{11}, \dots, b_{mk}; \alpha)$$

$$n = p + mk + 1$$

Nielson & Madsen^{۱۲}

Lag Dependence Function^{۱۳}

Partial Lag Dependence Function^{۱۴}

Nonlinear Lag Dependence Function^{۱۵}

$$\psi(\theta_r, \theta_l) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{i-i} \frac{\partial' \varepsilon_{i-j}}{\partial \theta_r \partial \theta_l}$$

حال با توجه به مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم و استفاده از معادلات بازگشتی (۵-۳)، (۶-۳) و (۷-۳) و نیز استفاده از بردار $\underline{G}$ و ماتریس $\underline{H}$ (معروف به Hessian) که در (۴-۳) تعریف شده و رابطه تکراری (۳-۳)، مجموعه‌هایی از مقادیر $\{a_i\}$ ، $\{b_{ij}\}$ و α به دست می‌آیند. وقتی که دقت مورد نظر حاصل شود تکرار متوقف می‌شود (معمولاً اگر با مقادیر اولیه خوبی، تکرار را شروع کنیم معادلات تکراری، همگرا خواهند شد). واریانس مانده‌ها به وسیله رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{N-\gamma} Q(\hat{\theta}) = \frac{1}{N-\gamma} \sum_{t=\gamma+1}^N \hat{\varepsilon}_t^2 \quad (۸-۳)$$

که $\hat{\theta}$ برآورد همگرای θ است و $\{\varepsilon_t, t = \gamma+1, \dots, N\}$ ها به وسیله (۱-۳) وقتی که برآورد θ به وسیله برآوردگر همگرایش $\hat{\theta}$ ، جایگزین شود، محاسبه می‌شوند.

الگوریتم تکرار عددی مارکواردت^{۱۷} نیز شبیه الگوریتم نیوتن-رافسون است و تنها تفاوت در این است که در الگوریتم مارکواردت مشتقات جزئی مرتبه دوم که در (۵-۳) معرفی شده‌اند، به وسیله رابطه زیر برآورد می‌شوند:

$$\frac{\partial' Q(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \approx \sum_{t=\gamma+1}^N \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_j}$$

تکته - از جمله روشهای دیگر برآورد پارامترهای الگوهای دوخطی، می‌توان به روشهای گشتاوری، درستنمایی ماکسیمم، کمترین توانهای دوم، کمترین توانهای دوم شرطی و ... اشاره کرد. برنامه‌هایی که در ادامه مقاله ملاحظه خواهید کرد توسط نرم افزار SAS 8 نوشته شده‌اند. در این برنامه‌ها ابتدا ۵۰۰ مشاهده از الگوهای مورد نظر به کمک آرایه‌ها در SAS شبیه سازی

که در آنها مشتقات جزئی ε_i در معادلات بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_i} + \phi(a_i) = X_{i-i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial b_{ij}} + \phi(b_{ij}) = -X_{i-i} \varepsilon_{i-j}$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad , \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha} + \phi(\alpha) = -1 \quad (۹-۳)$$

که در آن،

$$\phi(\theta_l) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{i-i} \frac{\partial \varepsilon_{i-j}}{\partial \theta_l}$$

همچنین فرض می‌کنیم:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_i} = 0 \quad ; \quad t = 1, \dots, \gamma \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

بنابراین مشتقات جزئی مرتبه دوم در معادلات بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial a_i \partial a_{i'}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial a_i \partial \alpha} = 0 \quad , \quad i, i' = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial a_i \partial b_{ij}} + \psi(a_i, b_{ij}) = -X_{i-i} \frac{\partial \varepsilon_{i-j}}{\partial a_i}$$

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial b_{ij} \partial b_{i'j'}} + \psi(b_{ij}, b_{i'j'}) = \quad (۱۰-۳)$$

$$-X_{i-i} \frac{\partial \varepsilon_{i-j}}{\partial b_{i'j'}} - X_{i-i'} \frac{\partial \varepsilon_{i-j'}}{\partial b_{ij}}$$

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial b_{ij} \partial \alpha} + \psi(b_{ij}, \alpha) = -X_{i-i} \frac{\partial \varepsilon_{i-j}}{\partial \alpha} \quad , \quad \frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial \alpha^2} = 0$$

که در آنها:

^{۱۷} Marquardt

```
run;
proc nlin method=marquardt data=new;
  parms a=.1 to .8 by .1;
  model x=a*x1*zlag2(resid);
  resid=x-model.x;
```

```
run;
proc model data=new;
  endo x;
  parms a;
  x=a*x1*zlag2(-resid.x);
  fit x start=(a .1 to .8 by .1) / fml;
```

```
run;
۴-۲ برنامه مورد نیاز برای شبیه سازی و برآورد
```

پارامترهای الگوی مارکوفی

$$X_t = 0.3X_{t-1} + 0.4X_{t-1}e(t) + e(t)$$

*simulation: $X(t) = 0.3X(t-1) + 0.4X(t-1)e(t) + e(t)$;

```
option ps=400;
data bilin;
  array xx{501} x1-x501;
  xx{1}=0;
  array ee{501} e1-e501;
  ee{1}=0;
  do t=2 to 501;
    ee{t}=normal(856509);
    xx{t}=0.3*xx{t-1}+0.4*xx{t-1}*ee{t}+
    ee{t};
  end;
  output;
```

```
run;
data markov;
  set bilin;
  file 'd:\mahdi\data.txt';
  put x2-x501;
```

```
run;
data new;
  infile 'd:\mahdi\data.txt';
  input x @@;
  t+1;
  x2=x**2;
  x1=lag1(x);
```

```
run;
proc gplot;
  plot (x x2)*t/frame vref=0;
  symbol i=join;
```

```
run;
proc arima;
```

شده اند و برای برآورد نیز از شیوه های Nlin، Model به شکلی که ملاحظه خواهید کرد، استفاده شده است.

۴. برنامه های شبیه سازی و برآورد

۴-۱ برنامه مورد نیاز برای شبیه سازی و برآورد پارامتر

$$X_t = 0.5X_{t-1}e_{t-1} + e_t$$

*simulation: $X(t) = 0.5X(t-1)e(t-2) + e(t)$;

```
option ps=400;
data bilin;
  array xx{502} x1-x502;
  xx{1}=-0.26;xx{2}=0.26;
  array ee{503} e1-e503;
  ee{1}=-0.45264;ee{2}=-0.31599;
  do t=3 to 502;
    ee{t}=normal(856509);
    xx{t}=0.5*xx{t-1}*ee{t-2}+ee{t};
  end;
  output;
```

```
run;
data sub;
  set bilin;
  file 'd:\mahdi\data.txt';
  put x3-x502;
```

```
run;
data new;
  infile 'd:\mahdi\data.txt';
  input x @@;
  t+1;
  x2=x**2;
  x1=lag1(x);
```

```
run;
proc gplot;
  plot (x x2)*t/frame vref=0;
  symbol i=join;
```

```
run;
proc arima;
  identify var=x MINIC;
  identify var=x2 MINIC;
```

```
run;
```

*Estimation algorithms;

```
proc nlin method=newton data=new;
  parms a=.1 to .8 by .1;
  model x=a*x1*zlag2(resid);
  resid=x-model.x;
```

```

der.b=(-x*x1+a*x1**2)/(1+b*x1)**2;
run;
proc nlin method=marquardt converge=0.0001;
  parms a=.1 to .8 by .1 b=0.1 to 0.8 by 0.1;
  error=0;
  model error=(x-a*x1)/(1+b*x1);
  der.a=(-x1/(1+b*x1));
  der.b=(-x*x1+a*x1**2)/(1+b*x1)**2;
run;

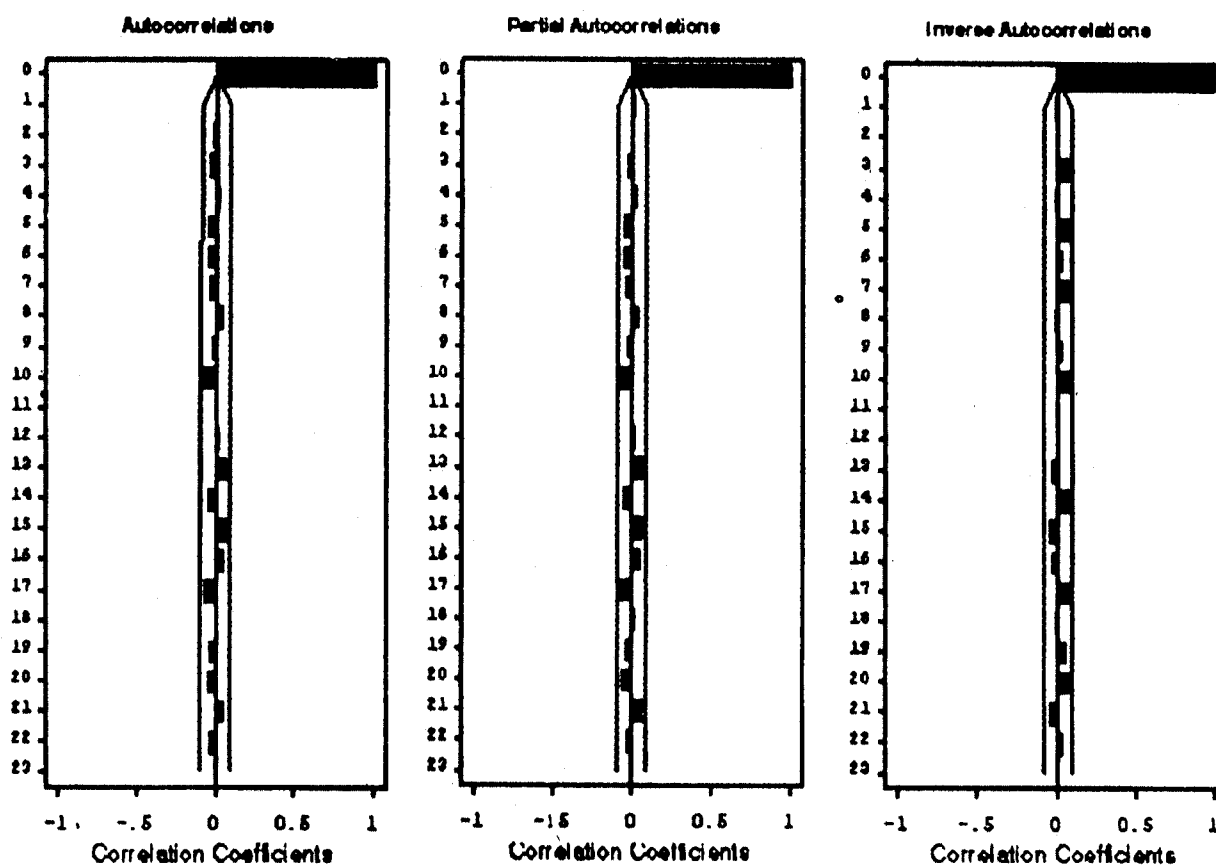
```

```

identify var=x MINIC;
identify var=x2 MINIC;
run;

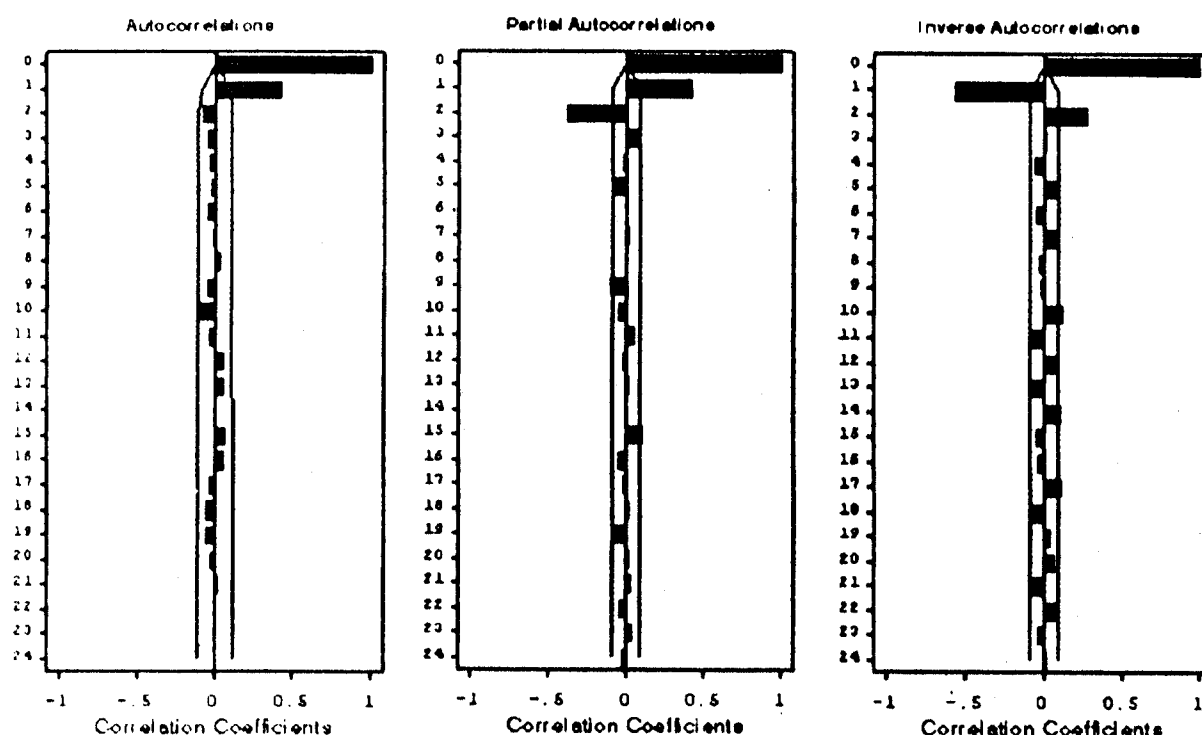
*Estimation algorithms;
proc nlin method=newton converge=0.0001;
  parms a=.1 to .8 by .1 b=0.1 to 0.8 by 0.1;
  error=0;
  model error=(x-a*x1)/(1+b*x1);
  der.a=(-x1/(1+b*x1));

```



شکل ۱

نمودارهای ACF، PACF و IACF الگوی بالا قطری $X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$



شکل ۲

نمودارهای ACF, PACF و IACF مربوط به دوم مشاهدات الگوی بالا

$$X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ قطری}$$

مراجع

- [1] Granger, C.W.J. and Anderson, A.P., (1978), *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Gottingen: Vandenhoeck and Ruprecht.
- [2] Nielson, H., Madsen, H., (1998), *Some Tools for Identification of Nonlinear Time Series*, Sweden, Dept. Mathematical Modelling.
- [3] Neudecker, H., (1969), *Some Theorems on Matrix Differentiation with Special References to Kronecker Matrix Products*, J.Amer.Statist.Assoc., 69, 153-159.
- [4] Priestley, M.B., (1978), *Nonlinear Models in Time Series Analysis*, The Statistician, 27, 159-176.
- [5] Subba Rao, T., (1978), *A Note on Higher Order Moments of Stationary Time Series and their Use in Examination of Residuals*, Technical Report No. 95, Dept. of Maths., UMIST.
- [6] Subba Rao, T. & Gabr, M.M., (1984), *An Introduction to Bispectral and Bilinear Time Series Models*, Lecture Notes in Statistics, New York: Springer-Verlag.