

# بازه های اطمینان درستنمایی تجربی

سید جواد نقیعی      ناصر رضا ارقامی<sup>۱</sup>

## چکیده

در این مقاله ضمن معرفی روش درستنمایی تجربی، طریقه محاسبه بازه های اطمینان ناپارامتری برای میانگین جامعه به وسیله این روش و روش بوت استرپ بررسی شده و نتایج به کمک شبیه سازی با سایر روشهای ناپارامتری دیگر مقایسه شده اند.

واژه های کلیدی: روشهای ناپارامتری، درستنمایی ماکسیمم، تابع توزیع تجربی، بوت استرپ (خود گردان)، درستنمایی تجربی

## ۱ مقدمه

(۱۹۷۹) و روش درستنمایی تجربی (۱۹۸۸). پایه و اساس هر دوی این روشها مبتنی بر تابع توزیع تجربی و خواص آن است و هر دو روش، خواص نمونه ای تقریباً یکسانی دارند. اما ما در اینجا نشان می دهیم روش درستنمایی تجربی، هم از نظر زمان و هم از نظر کارایی، در اکثر موارد از روش بوت استرپ (و سایر روشهای ناپارامتری دیگر) بهتر عمل می کند.

## ۲ بوت استرپ (خود گردان)

در سال ۱۹۷۹ افران<sup>۲</sup> روشی را بر مبنای اصل جایگذاری تابع توزیع تجربی و کاربرد روش جک نایف ابداع کرد و روش خود را بوت استرپ نام نهاد. به طور کلی اصل اساسی در استفاده از روش بوت استرپ، برآورد هر تابعی از تابع توزیع برابر با مقدار همان تابع از تابع توزیع تجربی است. فرض کنید به منظور برآورد  $\theta = T(F)$ ، می خواهیم از برآوردگر  $\hat{\theta} = S(X)$

شاید یکی از مهمترین مسائلی که در آمار ناپارامتری مطرح است مسأله پیدا کردن یک بازه اطمینان برای یک پارامتر، بخصوص برای میانگین جامعه است. همان طور که می دانید تاکنون روشهای مختلفی برای محاسبه یک بازه اطمینان در حالت ناپارامتری ابداع شده اند. برای مثال، اگر پارامتر مورد نظر میانگین باشد، با پذیرش فرض تقارن توزیع، می توان از روش ویلکاکسون استفاده کرد یا در صورت قبول فرض نرمال بودن داده ها، می توان بازه های  $t$  یا استیودنت را به کار برد. یا در حالتی دیگر ممکن است آمارگر در به دست آوردن بازه اطمینان برای چندکهای یک توزیع، از یک روش کلاسیک که مبتنی بر خواص آماره های ترتیبی توزیع یکنواخت است استفاده کند. اما دو روش کلیتر و جامعتر که اخیراً به این روشهای ناپارامتری اضافه شده اند عبارت اند از روش بوت استرپ

<sup>۲</sup> Efron

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

$$(\hat{\theta}, \hat{\bar{\theta}}) = (\hat{\theta}_\alpha^* \text{ و } \hat{\theta}_{1-\alpha}^*)$$

افران در مقاله های خود توجیهی برای استفاده از روش بالا آورده است ولی متأسفانه به اثبات آن نپرداخته است. ما در اینجا به کمک قضیه زیر، اثباتی برای توجیهی که افران ارائه کرده عرضه می کنیم:

**قضیه ۱** - فرض کنید  $\hat{\theta}$  برآورد درستمایی ماکسیم  $\theta$  بر اساس نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  از چگالی  $f(x, \theta)$  باشد که دارای تابع توزیع  $G_\theta$  است. همچنین فرض کنید  $G_\theta(t)$  نسبت به  $\theta$  اکیداً نزولی باشد، و تابع اکیداً صعودی  $\psi$  و ثابت  $\tau$  وجود دارند به طوری که توزیع  $Z = \tau[\psi(\hat{\theta}) - \psi(\theta)]$  یک توزیع متقارن (نسبت به مبدأ) مانند  $H$  است.<sup>۲</sup> در این صورت یک حد اطمینان بالای  $1 - \alpha$  برای  $\theta$  عبارت است از  $G_\theta^{-1}(1 - \alpha)$ ، یعنی چنـدک متناظر با احتمال  $1 - \alpha$  در توزیع  $\hat{\theta}$  به ازای  $\theta = \hat{\theta}$ .

برای اثبات این قضیه، ابتدا دو لم زیر را ارائه می دهیم:

**لم ۱** - فرض کنید  $\hat{\theta} = T = T(F_n)$  برآوردگر  $\theta$  و  $G_\theta(t)$  تابع توزیع  $\hat{\theta}$  باشد که نسبت به  $\theta$  اکیداً نزولی است. آنگاه جواب معادله  $G_\theta(T) = \alpha$  (که در آن  $\theta$  مجهول معادله است) یک کران اطمینان بالای  $1 - \alpha$  برای  $\theta$  است.

**برهان:** فرض کنید  $\bar{\theta}$  جواب معادله  $G_\theta(T) = \alpha$  باشد و تابع  $K_1(\theta)$  همان  $G_\theta(t)$  باشد که در آن  $\theta$  متغیر محسوب می شود. طبق فرض،  $K_1(\theta)$  اکیداً نزولی است و با تعریف بالا  $K_T^{-1}(\alpha) = \bar{\theta}$ ، لذا داریم:

$$P_\theta(\theta < \bar{\theta}) = P_\theta[\theta < K_T^{-1}(\alpha)] = P_\theta(K_T(\theta) > \alpha)$$

و چون  $K_1(\theta)$  نسبت به  $\theta$  نزولی است،

<sup>۲</sup> چون برآوردگرهای درستمایی ماکسیم به طور مجانی نرمال اند، فرض بالا زیاد بیجا نیست. علاوه بر این خیلی از توزیعهای نامتقارن با یک تبدیل مناسب، به یک توزیع متقارن تبدیل می شوند. توزیع ضریب همبستگی یک نمونه از نرمال دو متغیره شاهدهی بر این ادعاست.

استفاده کنیم. با استفاده از روش بوت استرپ علاوه بر برآورد  $\theta$  به وسیله  $\hat{\theta}^* = S(x^*)$  (که آن را برآورد بوت استرپ  $\theta$  می نامیم)، همه ویژگیهای  $\hat{\theta}$  (توزیع، واریانس، انحراف معیار و اریبی و ...) را می توان به وسیله ویژگیهای متغیر تصادفی  $\hat{\theta}^* = S(X^*)$  برآورد کرد که در آن  $X^*$ ، یک نمونه تصادفی با جایگذاری، استخراج شده از توزیع تجربی  $F_n$ ، است که به آن نمونه بوت استرپ می گوئیم:

$$X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*) \quad , \quad X_1^*, \dots, X_n^* \stackrel{iid}{\sim} F_n$$

برای به دست آوردن  $X^*$  کافی است که از نمونه اولیه  $X$ ، نمونه های تصادفی  $n$  تایی با جایگذاری استخراج کنیم. تعداد نمونه های ممکن که از توزیع  $F_n$  استخراج می شوند، متناهی است. بنابراین می توان از دید نظری، کلیه نمونه های ممکن را به دست آورده و برای هر یک از آنها  $\hat{\theta}^* = S(X^*)$  را محاسبه کرد، ولی با افزایش مقدار  $n$ ، تعداد نمونه های ممکن افزایش می یابد و محاسبات، طولانی و وقت گیر خواهد شد. لذا در عمل، نمونه های خود را از توزیع  $F_n$  به  $B$  نمونه بوت استرپ محدود می کنیم. طبیعی است که هر چه  $B$  بزرگتر باشد دقت برآورد ما بیشتر است و وقتی  $B$  به بزرگترین مقدار خود میل می کند، مانند این است که همه نمونه های ممکن را استخراج کرده ایم.

## ۱-۲ بازه های اطمینان صدکی بوت استرپ

فرض کنید  $G_\theta^*$  تابع توزیع بوت استرپ  $\hat{\theta} = T(F_n)$  برای برآورد  $\theta = T(F)$  باشد. روش صدکی، بازه اطمینان در سطح  $1 - 2\alpha$  را برای  $\theta$  بر اساس صدکهای توزیع بالا به صورت زیر پیشنهاد می کند:

$$(\hat{\theta}, \hat{\bar{\theta}}) = (G^{*-1}(\alpha) \text{ و } G^{*-1}(1 - \alpha))$$

روشن است که اگر  $\hat{\theta}_\alpha^*$ ، چندک  $\alpha$  ام توزیع  $G^*$  باشد طبق تعریف داریم:  $G^*(\hat{\theta}_\alpha^*) = \alpha$ . بنابراین، بازه بالا را می توان به صورت زیر نشان داد:

سطح  $\alpha$  برای  $\theta$  است. علاوه بر این  $G_{\theta}^*$  (یعنی توزیع بوت استرپ  $\hat{\theta}$ ) یک تقریب مناسب برای  $G_{\theta}$  است (زیرا به ازای  $G_{\theta}$  که از جامعه به دست می آید،  $G_{\theta}^*$  را داریم که از نمونه به دست می آید) و با به کار بردن  $G_{\theta}^*$  به جای  $G_{\theta}$  مقادیر  $\bar{\theta}$  و  $\underline{\theta}$  برآورد می شوند که ما مقادیر این برآوردها را به ترتیب با  $\hat{\theta}$  و  $\underline{\hat{\theta}}$  نشان داده ایم.

کاملاً روشن است که در عمل نیازی به دانستن توابع  $H$  و  $\Psi$  و ثابت  $\tau$  نداریم. این مطلب کارایی این روش را بهتر روشن می کند. بنابراین به طور خلاصه الگوریتم محاسبه بازه اطمینان صدکی بوت استرپ را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(۱) استخراج  $B$  نمونه مستقل بوت استرپ  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  از نمونه اولیه  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .

(۲) برآورد کردن پارامتر  $\theta$  در هر یک از این  $B$  نمونه، یعنی محاسبه:

$$\hat{\theta}^{*b} = S(x^{*b}) \quad b = 1, 2, \dots, B.$$

(۳) محاسبه صدکی  $\alpha$  ۱۰۰ ام و  $(1-\alpha)$  ۱۰۰ ام توزیع  $\hat{\theta}^{*b}$  که آنها را به ترتیب با  $\hat{\theta}_{1-\alpha}^*$  و  $\hat{\theta}_{\alpha}^*$  نشان می دهیم.

(۴) ساختن بازه اطمینان صدک بوت استرپ در سطح  $(1-2\alpha)$  برای  $\theta$  به صورت:  $(\hat{\theta}_{\alpha}^*, \hat{\theta}_{1-\alpha}^*)$ .

گاهی اوقات در نبود پیش فرضهای قضیه (۱)، از روشهای دیگر بوت استرپ که در حقیقت تعمیمی از روش صدکی اند استفاده می شود. برای آشنایی با این روشها می توانید به [۴] و [۵] مراجعه کنید.

### ۳ درستنمایی تجربی

همانطور که می دانید اصل درستنمایی، یکی از اصول کاهش داده هاست که روشهای مبتنی بر آن، خواص ارزنده ای در استنباط پارامتری دارند. برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم نسبت به تبدیلهای پایا بوده و تحت بعضی شرایط ساده دارای خواص مجانبی ارزشمندی چون کارایی، سازگاری و نرمال بودن هستند. آزمونهای (LRT) در بیشتر موارد ناریب بوده و در رده آزمونهای UMP یا

$$= P_{\theta}(G_{\theta}(T) > \alpha) = P_{\theta}(U > \alpha) = 1 - \alpha$$

که در آن  $U$ ، متغیری تصادفی است که توزیع یکنواخت در بازه  $(0,1)$  دارد.

لم ۲- تحت شرایط قضیه (۱) همواره داریم:

$$G_{\theta}(t) = 1 - G_t(\theta) \quad \forall t, \theta$$

برهان: با توجه به شرایط قضیه (۱) داریم:

$$Z = \tau[\psi(\hat{\theta}) - \psi(\theta)] \sim H$$

که  $H$  یک توزیع متقارن نسبت به مبدأ است.

از طرفی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} G_{\theta}(t) &= P_{\theta}(\hat{\theta} \leq t) = P_{\theta}[\tau[\psi(\hat{\theta}) - \psi(\theta)] \leq \tau[\psi(t) - \psi(\theta)]] \\ &= P_{\theta}\{\tau[\psi(\hat{\theta}) - \psi(\theta)] \leq \tau[\psi(t) - \psi(\theta)]\} \\ &= P_{\theta}\{Z \leq \tau[\psi(t) - \psi(\theta)]\} \\ &= H\{\tau[\psi(t) - \psi(\theta)]\} \end{aligned} \quad (1)$$

چون  $H$  یک توزیع متقارن نسبت به مبدأ است نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} H\{\tau[\psi(t) - \psi(\theta)]\} &= 1 - H\{\tau[\psi(\theta) - \psi(t)]\} \\ &= 1 - G_t(\theta) \quad \forall t, \theta. \end{aligned}$$

برهان قضیه ۱:

$$K_T(\bar{\theta}) = G_{\bar{\theta}}(T) = \alpha$$

بنابر تعریف  $\bar{\theta}$  داریم:

که در آن  $T = \hat{\theta}$  یک متغیر تصادفی و  $\bar{\theta}$  تابعی از  $T$  است. برای اثبات قضیه باید نشان دهیم:

$$G_{\bar{\theta}}(\bar{\theta}) = 1 - \alpha$$

$$G_{\bar{\theta}}(\bar{\theta}) = 1 - G_{\bar{\theta}}(\hat{\theta})$$

ولی طبق لم ۲ ثابت کردیم:

$$= 1 - G_{\bar{\theta}}(T) = 1 - \alpha.$$

و بنا به لم ۱ داریم:

لذا حکم ثابت است.

با روشی مشابه می توان نشان داد  $\underline{\theta}$ ، یعنی چندک متناظر با احتمال  $\alpha$  در توزیع  $\hat{\theta}$ ، به ازای  $\theta = \hat{\theta}$ ، یک حد اطمینانی پایین در

UMPU قرار می گیرند. مهمترین مشخصه آماره های نسبت درستنمایی، توزیع مجانبی  $\chi^2$  برای تبدیل ساده ای از آنهاست. یکی از روشهای محاسبه بازه اطمینان در حالت پارامتری، استفاده از ناحیه پذیرش آزمون LR است، اما استفاده از روش درستنمایی در حالت ناپارامتری، رهیافتی کاملاً جدید است. در نگاه اول چنین به نظر می رسد که چون شکل و تعریف تابع درستنمایی شدیداً متأثر از شکل توزیع است، به دست آوردن بازه اطمینان با این فن، فقط مخصوص حالت پارامتری است. استفاده از تابع درستنمایی در استنباط ناپارامتری، سالها مورد توجه دانشمندان آمار بوده است که از آن جمله می توان به تامس و گرانکمیر<sup>۴</sup>، کاکس و افران<sup>۵</sup> اشاره کرد. اما سرانجام در سال ۱۹۸۸ فردی به نام اون<sup>۶</sup> توانست با تعریف نسبت درستنمایی تجربی، خواص آزمونهای نسبت درستنمایی را به حالت ناپارامتری تعمیم دهد و به کمک آن قضیه وایکس را در حالت ناپارامتری اثبات کند.

### ۳-۱ نسبت درستنمایی تجربی F

تعریف - فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یافته های یک نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع از توزیع F باشند. تابع درستنمایی تجربی F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L(F) = \prod_{i=1}^n dF(x_i) = \prod_{i=1}^n w_i \quad (2)$$

که در آن  $i = 1, 2, \dots, n$  ;  $w_i = dF(x_i) = P(X = x_i)$

لیم - ماکسیم مقدار  $L(F)$  به ازای  $F = F_n$  حاصل می شود. برهان: فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی n تایی از F باشد، در این صورت اگر  $\hat{F}$  برآوردگر درستنمایی ماکسیم تجربی F باشد، طبق تعریف داریم:

$$L(\hat{F}) = \sup_{F \in \mathcal{F}} L(F) < \infty$$

که در آن F مجموعه همه توابع توزیع گسسته است.

اولاً اگر  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  مجموعه مشاهدات نمونه تصادفی باشد، به ازای هر  $x_i \in S$  داریم:  $f(x_i) > 0$  که f تابع چگالی احتمال F است. بنابراین اگر  $\hat{F}$  برآورد f باشد باید  $\hat{f}(x_i) > 0$  ;  $\forall x_i \in S$  یعنی تکیه گاه  $\hat{F}$  باید شامل S باشد، زیرا در غیر این صورت اگر

$$\exists x_i \in S \quad x_i \notin S_{\hat{F}}$$

فوراً نتیجه می شود  $\hat{f}(x_i) = 0$  و از آنجا داریم  $L(\hat{F}) = 0$ .

ثانیاً تکیه گاه  $\hat{F}$  باید دقیقاً برابر S باشد، زیرا اگر فرض کنید

$$S_{\hat{F}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}$$

می توان  $\hat{F}$  جدیدی ساخت که تکیه گاه آن S باشد و احتمال  $x_{n+1}$  بین مقادیر داخل S توزیع شود و در نتیجه به مقدار  $L(\hat{F})$  بزرگتری دست پیدا کرد. پس برای یافتن  $\sup L(F)$  روی مجموعه همه توابع توزیع گسسته، فقط باید به توابع توزیعی که تکیه گاه آنها S است توجه کرد. ما مجموعه توابع توزیعی را که روی فضای نمونه ای تعریف می شوند به صورت زیر نشان می دهیم:

$$F_n = \{F | F \ll F_n\}$$

حال نشان می دهیم که بیشترین مقدار  $L(F)$  روی مجموعه بالا به ازای  $\hat{F} = F_n$  حاصل می شود. روشن است که اعضای  $F_n$  را می توان به صورت زیر نشان داد:  $f(x_i) = w_i$  وقتی که

$$i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad 0 \leq w_i \leq 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

بنابراین

$$L(F) = \prod_{i=1}^n w_i$$

با استفاده از روش لاگرانژ داریم:

$$G = \sum_{i=1}^n \log w_i - \lambda \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)$$

<sup>۴</sup> Thomas and Grunkemeyer

<sup>۵</sup> Cox and Efron

<sup>۶</sup> Owen

آنگاه فاصله  $(X_{l,n}, X_{u,n})$  یک بازه اطمینان برای  $\mu = T(F_0) = E_{F_0}(X)$  است.

**پروهان:** مسأله آزمون فرض  $H_0: F = F_0$  در مقابل  $H_1: F \neq F_0$  را در نظر بگیرید، که در آن  $F_0 \in F_n$ . طبق اصل آزمون نسبت درستی،  $H_0$  را رد می کنیم اگر و فقط اگر

$$R(F_0) = \frac{L(F_0)}{L(F_n)} < c$$

با معکوس کردن ناحیه رد این آزمون، یک نوار اطمینان برای  $F_0$  به صورت زیر به دست می آید:

$$F_{c,n} = \{F \mid \frac{L(F)}{L(F_n)} \geq c, F \in F_n\}$$

حال داریم:

$$P(F_0 \in F_{c,n}) \geq 1 - \alpha \quad (5)$$

با تعریف  $X_{l,n}$  و  $X_{u,n}$  به صورت

$$X_{u,n} = \sup_{F \in F_{c,n}} \int x dF, \quad X_{l,n} = \inf_{F \in F_{c,n}} \int x dF$$

داریم:

$$F_0 \in F_{c,n} \Rightarrow \mu = E_{F_0}(X) \in (X_{l,n}, X_{u,n})$$

و از آنجا

$$P(F_0 \in F_{c,n}) \leq P(X_{l,n} \leq \mu \leq X_{u,n}) \quad (6)$$

با مقایسه روابط (5) و (6) نتیجه می شود:

$$P(X_{l,n} \leq \theta \leq X_{u,n}) \geq 1 - \alpha$$

یعنی  $(X_{l,n}, X_{u,n})$  یک بازه اطمینان  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  برای  $\mu$  است. با به کار بردن فرمولهای (2)، (3) و (4) در قضیه بالا، مقادیر  $X_{l,n}$  و  $X_{u,n}$  به صورت زیر تغییر می یابند:

$$X_{u,n} = \sup \sum_{i=1}^n w_i x_i, \quad X_{l,n} = \inf \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

که مقادیر  $\sup$  و  $\inf$  روی مقادیری از  $w_i$  هستند که در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial G}{\partial w_i} = \frac{1}{w_i} - \lambda = 0 \Rightarrow w_i = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = n \Rightarrow w_i = \frac{1}{n}$$

یعنی  $\hat{F}$  تابع توزیع تجربی است، و

$$\sup_{F \in F} L(F) = L(F_n)$$

**تعریف -** فرض کنید  $F_n$  تابع توزیع تجربی  $F$  باشد. نسبت درستی  $F$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R(F) = \frac{L(F)}{L(F_n)} \quad 0 \leq R(F) \leq 1$$

با به کار بردن رابطه (2)، داریم:

$$R(F) = \prod_{i=1}^n n w_i \quad (3)$$

حال فرض کنید به برآورد پارامتر  $\theta = T(F)$  علاقمندیم.

اصل جایگذاری، تابع توزیع تجربی  $\hat{\theta} = T(F_n)$  را به عنوان برآورد (نقطه ای) درستی ماکسیم ناپارامتری  $\theta$  پیشنهاد می کند ولی اگر به دنبال برآورد فاصله ای  $\theta$  باشیم، ذیلاً نشان می دهیم تحت شرایطی معقول، مجموعه  $\{T(F) \mid R(F) \geq c, F \in F_n\}$  را می توان به عنوان یک بازه اطمینان برای  $\theta$  به کار برد. برای سهولت، فرض کنید میانگین  $F$  باشد.

**۲-۳ محاسبه بازه اطمینان برای میانگین به روش مستقیم**

**قضیه ۲ -** فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  و  $X$  متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع ناتباهیده  $F_0$  باشند. همچنین برای  $c < 1$  فرض کنید

$$F_{c,n} = \{F \mid R(F) \geq c, F \in F_n\} \quad (4)$$

تعریف می کنیم:

$$X_{u,n} = \sup_{F \in F_{c,n}} \int x dF \quad \text{و} \quad X_{l,n} = \inf_{F \in F_{c,n}} \int x dF$$

لم ۱- مقادیر قابل قبول برای  $\lambda$  در معادله  $f(\lambda) = 0$  عبارت است از:

$$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_r$$

که در آن  $\mathcal{A}_r = (X_{(n)}, +\infty)$  و  $\mathcal{A}_1 = (-\infty, X_{(1)})$  بوهان: اولاً اگر فرض کنیم  $\lambda = X_{(1)}$  یا  $\lambda = X_{(n)}$ ، آنگاه از رابطه (۹) نتیجه می شود  $W_i > 1$ ، که خلاف فرض است. پس فرض کنید  $X_{(1)} < \lambda < X_{(n)}$ . بدون از دست دادن کلیت، می توان فرض کرد  $X_{(1)} < \lambda < X_{(r)} < \dots < X_{(n)}$ ، در این صورت با قرار دادن  $S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda}$ ، مقادیر  $S$  از دو حالت زیر خارج نیست:

(۱) اگر  $S > 0$  باشد، چون  $X_{(1)} - \lambda < 0$ ، داریم:

$$W_1 = \frac{1}{(X_{(1)} - \lambda)S} < 0$$

(۲) اگر  $S < 0$  باشد، چون به ازای هر  $i \neq 1$ ،  $X_{(i)} - \lambda > 0$ ، در نتیجه  $W_i < 0$ . بنابراین در هر دو حالت مقادیر  $W_i$  غیر مجازند. لذا حکم ثابت است.

لم ۲- تابع  $f(\lambda)$  در هر یک از مجموعه های  $\mathcal{A}_1$  و  $\mathcal{A}_r$  فقط یک ریشه دارد.

بوهان: فرض کنید  $\lambda \in \mathcal{A}$ . بنابراین  $X_i - \lambda > 0$ .  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  پس می توان نوشت:

$$f = n \ln n - \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \lambda) - n \ln \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda} - \ln c$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda} - n \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X_i - \lambda)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda}}$$

که با فرض  $y_i = \frac{1}{X_i - \lambda}$ ، داریم:  $\sum_{i=1}^n y_i > 0$  و

$$W_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n W_i = 1, \quad \prod_{i=1}^n n W_i \geq c \quad (۷)$$

بنابراین، مسأله پیدا کردن بازه اطمینان، به مسأله برنامه ریزی ریاضی زیر منتهی می شود:

مقدار  $\sum_{i=1}^n W_i X_i$  را با توجه به شرایط زیر بیشینه کنید:

- (i)  $W_i \geq 0$
- (ii)  $\sum_{i=1}^n W_i = 1$
- (iii)  $\prod_{i=1}^n n W_i \geq c$

با استفاده از روش لاگرانژ داریم:

$$G = \sum_{i=1}^n W_i X_i + \lambda_1 (1 - \sum_{i=1}^n W_i) + \lambda_r (\log c - \sum_{i=1}^n \log n W_i)$$

$$\frac{\partial G}{\partial W_i} = X_i - \lambda_1 - \frac{\lambda_r}{W_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial G}{\partial W_i} = 0 \Rightarrow W_i = \frac{\lambda_r}{X_i - \lambda_1} \quad (۸)$$

با به کار بردن قید (ii) در رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_r}{X_i - \lambda_1} = 1 \Rightarrow \lambda_r = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda_1}}$$

و از آنجا

$$W_i = \frac{1}{(X_i - \lambda_1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda_1}} \quad (۹)$$

که در آن  $\lambda_1$  ریشه معادله زیر است:

$$0 = \sum_{i=1}^n \log \frac{n}{(X_i - \lambda_1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i - \lambda_1}} - \log c \equiv f(\lambda_1) \quad (۱۰)$$

دو لم زیر برای به دست آوردن  $\lambda_1$  بسیار مفیدند.

$$w_{ir} = \frac{1}{(x_i - \lambda_r) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \lambda_r}}$$

(۴) متناظر با  $w_{ir}$  و  $w_{ii}$  قرار دهید:

$$X_{l,n} = \sum_{i=1}^n w_{li} x_i, \quad X_{u,n} = \sum_{i=1}^n w_{ui} x_i$$

(۵) بازه درستیابی تجربی در سطح  $1 - \alpha$  برای میانگین عبارت است از:  $(X_{l,n}, X_{u,n})$ .

از طرف دیگر یک راهبرد جالب برای به دست آوردن بازه اطمینان بالا، استفاده از تابع نسبت درستیابی تجربی  $\theta$  (پارامتر  $F$ ) است. (استفاده از این روش برای مشخصه هایی که در قالب یک  $M$ -برآوردگر [۶] قابل بیان اند، ساده تر به نظر می رسد). بخش بعدی با استفاده از تعریف و قضایا، رهنمون ما در استفاده از این روش است.

### ۳-۳ استفاده از تابع نسبت درستیابی تجربی $\theta$ برای محاسبه بازه اطمینان

تعریف: مسأله آزمون فرض  $H_0: T(F) = \theta_0$  در مقابل  $H_1: T(F) \neq \theta_0$  را که در آن  $\theta = T(F)$  یک پارامتر  $F$  است در نظر بگیرید. تابع نسبت درستیابی تجربی  $\theta$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R_E(\theta_0) = \sup_F \{R(F) \mid T(F) = \theta_0, F \ll F_n\} \quad (۱۱)$$

چون قبلاً نشان دادیم  $L(F)$  در  $F_n$  ماکسیم می شود، بنابراین فوراً نتیجه می شود که  $\sup R_E(\theta)$  با توجه به  $\theta$  در  $\hat{\theta} = T(F_n)$  به ماکسیم مقدار خود می رسد.

در حالتی که  $\theta = \mu$  میانگین  $F$  است، با استفاده از روابط (۳) و (۷)،  $R_E(\theta_0)$  به شکل زیر در می آید:

$$R_E(\mu_0) = \quad (۱۲)$$

$$\sup \left\{ \prod_{i=1}^n n w_i \mid w_i > 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1, \sum_{i=1}^n w_i x_i = \mu_0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i} \\ &= \frac{-n \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}{\sum_{i=1}^n y_i} < 0 \end{aligned}$$

بنابراین  $f$  روی  $\mathcal{A}_1$  نزولی است و علاوه بر این

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = \infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow x_{(1)}} f(\lambda) = 0$$

یعنی  $f$  در  $\mathcal{A}_1$  فقط یک ریشه دارد. به روشی مشابه می توان نشان داد  $f$  در  $\mathcal{A}_2$  نیز فقط یک ریشه دارد.

الگوریتم زیر دستورالعمل ساختن بازه اطمینان درستیابی تجربی برای میانگین را نشان می دهد:

(۱) با انتخاب سطح آزمون  $\alpha$ ، مقدار  $c$  را از رابطه زیر پیدا کنید:

$$1 - \alpha = P_r(\chi_{(1)}^2 < -2 \log c)$$

(۲) با استفاده از یافته های نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  و به کمک روشی تکراری با یک نقطه شروع (نیوتن - رافسون) ریشه های معادله

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \frac{n}{(x_i - \lambda) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \lambda}} - \log c = 0$$

را در هر یک از بازه های  $\mathcal{A}_1 = (-\infty, x_{(1)})$  و  $\mathcal{A}_2 = (x_{(n)}, +\infty)$  پیدا کنید. (معادله بالا در هر یک از بازه های بالا فقط یک ریشه دارد).

(۳) فرض کنید  $\lambda_1$  و  $\lambda_r$  به ترتیب ریشه های معادله بالا در  $\mathcal{A}_1$  و  $\mathcal{A}_2$  باشند. مقادیر  $w_{ir}$  و  $w_{ii}$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$ ، را از روابط زیر به دست آورید:

$$w_{ir} = \frac{1}{(x_i - \lambda_r) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \lambda_r}}$$

با توجه به استدلال بالا داریم:

$$\sup_{\mu} R_E(\mu) = R_E(\bar{x}) = 1$$

و کاملاً روشن است که  $\mu_0 \in (X_{l,n}, X_{u,n})$  اگر و فقط اگر  $R_E(\mu_0) > c$ ، (زیرا ناحیه پذیرش آزمون بالا را می توان به عنوان بازه اطمینان برای  $\mu$  به کار برد).

بنابراین راهی مناسب در به دست آوردن بازه اطمینان برای میانگین، جستجوی نقاطی مانند  $\mu$  است که به ازای آنها داشته باشیم  $R_E(\mu_0) > c$ . فرض کنید  $\hat{\mu}_l$  و  $\hat{\mu}_u$  دو عدد باشند به طوری که دقیقاً داشته باشیم:

$$R_E(\hat{\mu}_u) = R_E(\hat{\mu}_l) = c$$

در این صورت استدلال بالا بازه  $(\hat{\mu}_l, \hat{\mu}_u)$  را به عنوان بازه اطمینان برای  $\mu$  معرفی می کند، زیرا

$$\forall \mu_0 \in (\hat{\mu}_l, \hat{\mu}_u) \quad R_E(\mu_0) > c$$

نمودار زیر درستی این رابطه را بهتر نشان می دهد.

قبل از اینکه نحوه مشخص کردن  $\hat{\mu}_l$  و  $\hat{\mu}_u$  را بیان کنیم، باید چگونگی انتخاب  $c$  به عنوان نقطه بحرانی مشخص شود. قضیه زیر ما

را در این مورد راهنمایی می کند.

قضیه ۳- تحت شرایط قضیه (۲)، اگر  $\int |X|^r dF_0 < \infty$  وقتی

$n \rightarrow \infty$ ، داریم:

$$P_r(X_{l,n} \leq E(X) \leq X_{u,n}) \rightarrow P_r(\chi_1^2 \leq -2 \log c)$$

پرهان: بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد

$E(X) = 0$ . چون  $F_0$  ناتهییده است، وقتی  $n \rightarrow \infty$  با احتمال

یک داریم:

$$X_{(1)} < 0 < X_{(n)}$$

بنابراین از رابطه (۱۲)،  $R_E(0)$  وجود دارد و

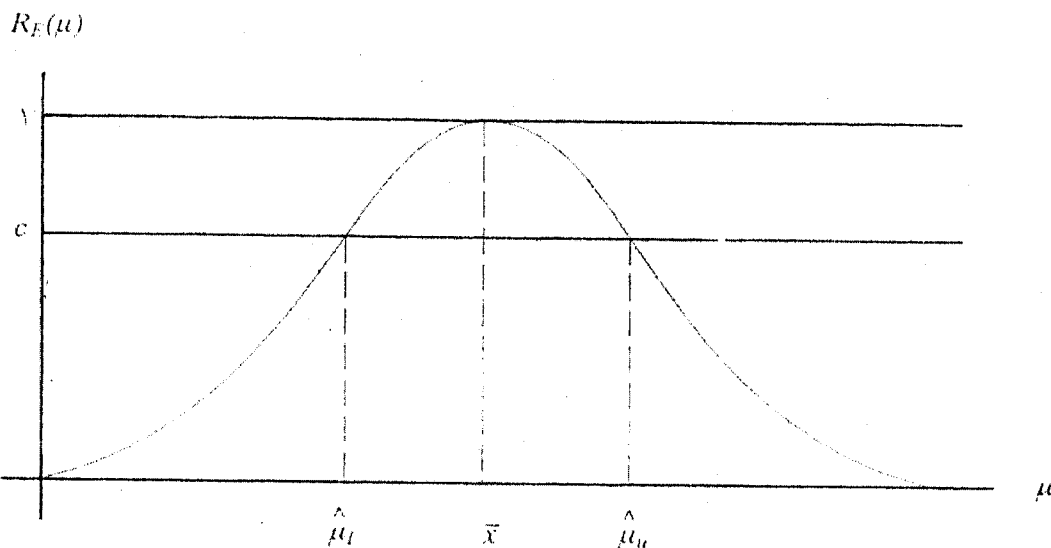
$$R_E(0) =$$

$$\sup \left\{ \prod_{i=1}^n n w_i \mid w_i > 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1, \sum_{i=1}^n w_i x_i = 0 \right\}$$

و مشابه استدلالی که در قبل داشتیم:

$$R_E(0) \geq c \text{ اگر و فقط اگر } X_{l,n} \leq 0 \leq X_{u,n}$$

$$-2 \log R_E(0) \xrightarrow{D} \chi_1^2 \quad \text{بنابراین کافی است نشان دهیم:}$$



بازه اطمینان برای  $\mu$

رابطه زیر به دست آورید:

$$1 - \alpha = P(\chi_{(n)}^2 \leq -2 \log c)$$

(۲) با فرض  $E(X) = t$  مقادیر  $y_i^t = x_i - t$ ،  $i = 1, \dots, n$  را از روی  $x_i$  به دست آورید. (به عنوان اولین نقطه شروع از  $\bar{x}$  استفاده کنید).

(۳) با استفاده از مقادیر  $y_i^t$  و به وسیله یک روش عددی (مانند روش نیوتن - رافسون) تنها ریشه معادله

$$g(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^t}{1 + \lambda y_i^t} = 0$$

را روی بازه  $J_n = (-Y_{(n)}^{-1}, -Y_{(1)}^{-1})$  پیدا کنید.

(۴) فرض کنید  $\lambda_0$  ریشه معادله بالا روی  $J_n$  باشد. مقادیر  $w_i$ ،  $i = 1, \dots, n$  و  $R$  را از روابط زیر به دست آورید:

$$w_i(t) = \frac{1}{n(1 + \lambda_0 y_i^t)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$R_E^X(t) = \prod_{i=1}^n n w_i(t)$$

(۵) با تغییر دادن مقادیر  $t$ ، دو نقطه  $t_1$  و  $t_2$ ،  $(t_1 < t_2)$  را پیدا کنید که برای این دو نقطه دقیقاً داشته باشیم:

$$R_E^X(t_1) = R_E^X(t_2) = c$$

(طبیعتاً این عمل مستلزم چندین بار اجرای این الگوریتم از گام (۲) تا گام (۵) است).

(۶) بازه اطمینان درستمایی تجربی در سطح  $1 - \alpha$  برای میانگین عبارت است از:

$$(X_{l,n}, X_{u,n}) = (t_1, t_2)$$

توجه کنید جوابهایی که از این الگوریتم و الگوریتم قبلی به دست می آیند، دقیقاً برابرند. (شایان ذکر است که در شبیه سازی به دلیل عناصر تصادفی، جوابهای حاصل ممکن است اندکی تفاوت داشته باشند). در حقیقت مزیت استفاده از این الگوریتم در مواقعی

برای ادامه اثبات می توانید به [۱] مراجعه کنید. با استفاده از تعریف  $R_E(0)$  با به کار بردن روش لاگرانژ داریم:

$$G = \sum_{i=1}^n \log n w_i + \gamma(1 - \sum_{i=1}^n w_i) + n\lambda(0 - \sum_{i=1}^n w_i x_i)$$

$$\frac{\partial G}{\partial w_i} = 0 \Rightarrow \frac{1}{w_i} - \gamma - n\lambda x_i = 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow w_i = \frac{1}{\lambda + n\lambda x_i} \quad (14)$$

اگر دو طرف تساوی (۱۳) را در  $w_i$  ضرب کنیم و روی  $i$  جمع بکنیم، داریم:

$$\sum w_i \frac{\partial G}{\partial w_i} = 0 \Rightarrow n - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = n \quad (15)$$

با جایگذاری (۱۵) در (۱۴) نتیجه می شود:

$$w_i = \frac{1}{n(1 + \lambda x_i)} \quad (16)$$

$$\log R_E(0) = \sum_{i=1}^n \log n w_i = - \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda_0 x_i) \quad (17)$$

که در آن  $\lambda_0$  ریشه معادله زیر است:

$$0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \lambda x_i} \equiv g(\lambda)$$

مشابه روش قبلی برای انتخاب مناسب  $\lambda_0$ ، دو لم زیر به راحتی قابل اثبات اند.

لم ۱- مقادیر قابل قبول  $\lambda$  در معادله  $g(\lambda) = 0$  عبارت اند از:

$$J_n = (-X_{(n)}^{-1}, X_{(1)}^{-1})$$

لم ۲- تابع  $g(\lambda)$  روی مقادیر  $J_n$  فقط یک ریشه دارد.

پس به طور خلاصه الگوریتم زیر دستورالعمل این روش را بهتر نشان می دهد:

(۱) با انتخاب سطح آزمون  $\alpha$ ، مقدار  $c$  ( $0 < c < 1$ ) را از

و  $N_{U<1}$  به ترتیب تعداد بازه های اطمینانی هستند که حد پایین آنها از یک بیشتر (مقدار میانگین واقعی) و حد بالای آنها از یک کمتر است. چون بازه های اطمینان در سطح ۹۰٪ ساخته شده اند، به طور طبیعی انتظار می رود مقادیر  $N_{U>1}$  و  $N_{U<1}$  برابر ۵٪ تعداد این بازه ها باشند. بنابراین منطقی است که خطای یکطرفه (اریبی یکطرفه) هر روش را به وسیله رابطه زیر به دست آوریم:

$$|N_{L>1} - 0| + |N_{U<1} - 0|$$

با بررسی نتایج، دیده می شود که دو روش مبتنی بر درستنمایی تجربی از اغلب روشهای ناپارامتری دیگر بهتر عمل می کنند. در بین روشهای ناپارامتری، روش بوت استرپ تعدیل شده با درستنمایی تجربی، بهترین روش ممکن در این جدول است، اگرچه این روش برای بازه های اطمینان یکطرفه مناسب نیست. (این اریبی یکطرفه نوعاً از خواص اجتناب ناپذیر روشهای مبتنی بر درستنمایی است).

در بررسیهای دیگر مشاهده می شود که در اندازه نمونه ۱۰ یا بیشتر از آن، به خصوص در مورد توزیعهای چوله، بازه های درستنمایی تجربی از بازه های  $t$  استیودنت دقیقتر عمل می کنند، اگرچه برای اندازه های کوچک ( $n < 10$ ) این بازه ها بهتر و یا لااقل به خوبی بازه های درستنمایی تجربی هستند. بنابراین در این حالت به علت سهولت محاسبه، بازه های  $t$  استیودنت توصیه می شود.

نتایج شبیه سازی بر روی توزیعهای مختلفی مانند یکنواخت، نرمال، لوژستیک و نمایی (که نتایج آنها در این مقاله ذکر نشده است) حاکی از این است که روش درستنمایی تجربی هم از نظر زمان و هم از نظر نتیجه، از روش بوت استرپ بهتر عمل می کند.

که به دنبال بازه اطمینان برای پارامترهایی مانند میانه و چندکها هستیم، بهتر مشاهده می شود.<sup>۷</sup>

#### ۴ شبیه سازی نتایج

در اینجا برای بررسی میزان کارایی روش درستنمایی تجربی در مقایسه با سایر روشها، از یک آزمایش شبیه سازی استفاده کرده ایم. نتایج به دست آمده بر اساس ۱۰۰۰ نمونه ۲۰ تایی از توزیع  $\chi^2_{(1)}$ ، در جدول شماره ۱ جمع آوری شده اند. در این آزمایش برای هر نمونه ۲۰ تایی، یک بازه اطمینان ۹۰٪ برای میانگین توسط روشهای مختلف بوت استرپ، درستنمایی تجربی و  $t$  استیودنت محاسبه شده است. (در روشهای بوت استرپ برای هر نمونه ۲۰ تایی، ۱۰۰۰ نمونه بوت استرپ استخراج شده و این عمل ۱۰۰۰ بار تکرار شده است). در این آزمایش یک روش برتر تحت عنوان «بوت استرپ تعدیل شده با درستنمایی تجربی» که تلفیقی از دو روش بوت استرپ و درستنمایی تجربی است نیز آورده شده است. در این روش به جای استفاده از توزیع مجانبی  $-\log R_E(t)$ ، با فرض  $F_0 = F_n$  از توزیع بوت استرپ آن استفاده شده است، یعنی پس از استخراج  $B$  نمونه بوت استرپ در هر یک از این نمونه ها، مقادیر  $-\log R_E(0)$  از رابطه (۱۷) محاسبه شده و به جای استفاده از توزیع  $\chi^2$  (برای مشخص کردن  $c$ )، مستقیماً از توزیع بوت استرپ آن استفاده کرده ایم.

برای داشتن یک معیار نسبتاً دقیق از روش پارامتری (که در عمل به دلیل مجهول بودن توزیع جامعه مقدور نیست) نیز برای محاسبه این بازه ها استفاده شده است.

جدول (۱) درصد پوشش مشاهده در ۱۰۰۰ بازه اطمینان به دست آمده در هر روش را نشان می دهد. یک معیار برای مقایسه دقت روشها، متوسط طول بازه در هر روش است. مقادیر  $N_{L>1}$

<sup>۷</sup> در بیشتر موارد همه پارامترهای یک توزیع از قبیل میانگین، میانه، چارکها و ... را می توان در قالب یک  $M$  برآوردگر نشان داد  $(\{V\}, \{Y\})$ . در این صورت با فرض  $Y_i = \psi(X_i, t)$  می توان الگوریتمی مشابه بالا به دست آورد.

جدول ۱

| خطای (اریبی) یکطرفه | $N_{U<}$ | $N_{L>}$ | متوسط طول بازه | پوشش مشاهده شده |                                         |
|---------------------|----------|----------|----------------|-----------------|-----------------------------------------|
| ۱۱۴                 | ۱۲۱      | ۷        | ۰/۸۹۳          | ۰/۸۷۲           | درست‌نمایی تجربی                        |
| ۸۴                  | ۸۹       | ۵        | ۰/۹۱           | ۰/۹۰۶           | بوت استرپ تعدیل شده با درست‌نمایی تجربی |
| ۱۲۷                 | ۱۵۰      | ۲۳       | ۰/۹۵۱          | ۰/۸۲۷           | صدکی بوت استرپ                          |
| ۹۹                  | ۱۳۵      | ۳۶       | ۰/۹۷۶          | ۰/۸۲۹           | بوت استرپ با تصحیح اریبی                |
| ۵۵                  | ۱۰۵      | ۵۰       | ۱/۰۱           | ۰/۸۴۵           | بوت استرپ با تصحیح اریبی شتابدار        |
| ۶۹                  | ۱۱۲      | ۵۷       | ۱/۳۷           | ۰/۸۳۱           | بوت استرپ ۱                             |
| ۱۳۵                 | ۱۴۸      | ۱۳       | ۱/۰۸           | ۰/۸۳۹           | ۱ ی استیودنت                            |
| ۷                   | ۵۶       | ۵۱       | ۰/۸۱۰          | ۰/۸۹۳           | پارامتری                                |

## منابع

- [1] Owen, A. B., *Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals for a Single Functional*, Biometrika, Vol. 75, No. 2, 237-249, 1988.
- [2] Owen, A. B., *Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions*, Ann.Statist., Vol. 18, No. 1, 90-120, 1990.
- [3] Qin, J. and Lawless, J., *Empirical Likelihood and Estimating General Equations*, Ann. Statist., Vol. 22, 300-325, 1994.
- [4] Schenker, N., *Qualms about Bootstrap Confidence Interval*, J.Am.Statist.Assoc. 80, 360-361, 1985.
- [5] Efron, B. and Tibshirani, R.J., *An Introduction to the Bootstrap*, New York, London, (C) 1993, Chapman & Hall, ISBN, 0-412-04231-2.
- [6] Serfling, R.J., *Approximation Theorem of Mathematical Statistic*, (C) 1980, John Wiley & Sons, ISBN, 0-471-02403-1.
- [7] Lehman, E.L., *Theory of Point Estimation*, (C) 1983, By John Wiley & Sons, Inc., ISBN, 0-471-05849-1.