

بررسی زمان انقراض فرایند همه گیر لوزیتیک تصادفی

زهره فلاح محسن خانی^۱

چکیده

در این مقاله برای فرایند همه گیر لوزیتیک تصادفی روی جامعه ای همگن و بسته فرمول مجانبی ارائه می شود، همچنین تنها پارامتر موجود در فرمول مجانبی ارائه شده با استفاده از روش ماکسیمم درستتمایی برآورده می شود.

موجود در این فرمول به وسیله روش ماکسیمم درستتمایی برآورد می شود.

۱ مقدمه

استفاده از فرایند زاد و مرگ برای بررسی بیماریهای اپیدمی (همه گیر) اولین بار به وسیله ویس و دیشون^۲ انجام شد [۵]. ولی گسترش واقعی آن توسط نوردن^۳ انجام گرفت که آن را به عنوان یک مدل لوزیتیک تصادفی شرح داد [۴]. در سال (۱۹۹۳) سیمون و ژاکنس^۴ مطالعاتی را که از ابتدا پیرامون این مدل انجام شده بود، گردآوری و به صورت خلاصه ای مفید منتشر کردند [۳]. در سال ۱۹۹۸ اندرسون و جهج^۵ [۲] میانگین زمان انقراض یک بیماری همه گیر را در حالت مجانبی برای مدل لوزیتیک تصادفی، وقتی نرخ تکثیر بیماری بزرگتر از یک است، ارائه کردند. در این مقاله فرمول مجانبی اندرسون و جهج را معرفی نموده و تنها پارامتر

۲ فرایند همه گیر لوزیتیک تصادفی

یک جمعیت بسته، شامل n فرد مستعد دریافت بیماری را که در کار یکدیگر زندگی می کنند در نظر بگیرید. فرض کنید در زمان $t = 0$ ، a فرد بیمار باشند. فرض کنید دوره درمان بیماری هر فرد از توزیع نمایی با پارامتر λ ، تبعیت می کند و در طول این زمان، فرد، بیماری را به افراد مستعد بیماری، با فرایند پواسون، سا نسبت λ/n ($\lambda > 0$) سرایت می دهد. هر فرد بیمار پس از دوره بیماری، دوباره مستعد دریافت بیماری است. و نسبت به آن مصونیت پیدانمی کند (به چنین مدلی، مدل SIS^۶ گفته

Jaez and Simon^۷

Anderson and Djehiche^۸

Susceptible Infective Susceptible^۹

^۱ عضو پژوهشکده آمار ایران

Weiss and Dishon^{۱۰}

Norden^{۱۱}

شکل $\{X(t); Y(t), 0 \leq t \leq \infty\}$ در نظر گرفت که در آن (t) $X(t)$ تعداد بیماری در لحظه t و $Y(t)$ تعداد افراد مستعد بیماری در لحظه t هستند.

۳-۱ تابع ماکسیمم درستنمایی برای فرایند شمارشی

یک بردار $N(t) = (N_1(t), \dots, N_k(t))$ از فرایند شمارشی را در نظر بگیرید، به طوری که مؤلفه $(t)_i$ تعداد دفعاتی را که یک واقعه معین تا زمان t رخ می‌دهد، می‌شمارد. فرض کنید احتمال این که چنین واقعه‌ای در بازه $[t, t+h]$ رخ دهد، به صورت زیر تعریف شود (به [۱] نگاه کنید):

$$\begin{aligned} P[N_i(t+h) - N_i(t) = 1 | \mathcal{U}_i] &= h \lambda_i(t) + o(h) \\ ; i &= 1, \dots, k \\ P[N(t+h) - N(t) = 0 | \mathcal{U}_i] &= 1 - h \sum_i \lambda_i(t) + o(h) \end{aligned}$$

که $(\lambda_i(t)$ ، تابع انتقال، به گونه‌ای است که $\lambda_i(t) \in \mathcal{U}_i$ و $\lambda_i(t) \geq 0$. یک فیلتر از σ -میدانها می‌باشد. روابط بالا نشان می‌دهد که λ را آنقدر کوچک در نظر گرفته ایم که فقط یکی از k واقعه بتواند رخ دهد، حال به یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی برای این فرایند می‌پردازیم. فاصله (u, v) را به صورت Δt های بسیار کوچک در نظر می‌گیریم به طوریکه $\Delta t = [t, t+h]$ و $\Delta N_i(t) = N_i(t+h) - N_i(t)$ تعداد واقعه‌های مؤلفه i ام باشد که در فاصله زمانی بسیار کوچک h رخ می‌دهند. پس احتمال مشاهدات به صورت زیر است:

$$\prod_{\Delta t \in (u, v)} \left\{ \prod_i (h \lambda_i(t))^{\Delta N_i(t)} \times (1 - h \sum_i \lambda_i(t))^{1 - \sum_i \Delta N_i(t)} + o(h) \right\}$$

در رابطه بالا هر چه h به صفر نزدیکتر شود، تعداد عاملها زیادتر می‌شود ولی جز تعدادی که در آنها جهش رخ می‌دهد

می‌شود). فرض می‌کنیم دوره بیماری و تعداد افرادی که مبتلا می‌شوند از هم مستقل‌اند، اگر $(t)_n X$ تعداد افراد سرایت دهنده بیماری در زمان t روی فضای $n = 0, \dots, \infty$ با زمان انقراض $S_n = \inf\{t \geq 0; X_n(t) = 0\}$ و احتمالهای تولد و مرگ به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} P(X_n(t+h) = i+1 | X_n(t) = i) &= \frac{\lambda}{n} i(n-i) dt + o(dt), \\ P(X_n(t+h) = i-1 | X_n(t) = i) &= idt + o(dt), \end{aligned}$$

آنگاه فرایند $\{X_n(t); t \geq 0\}$ را فرایند همه گیر لوزیستیک تصادفی می‌گویند.

اندرسون و جهیج فرمول مجانبی برای میانگین زمان انقراض فرایند همه گیر لوزیستیک تصادفی ارائه کردند که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{با فرض آنکه } 1 > \lambda, \text{ وقتی } n \rightarrow \infty, \text{ و } 0 > \bar{a} > \frac{a_n}{n}, \\ \text{در این صورت } E(\tau_n) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} e^{\bar{a}\bar{v}} \text{ که در آن} \\ \frac{1}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\bar{a}} > 0 \text{ است.} \end{aligned}$$

۳ برآورد پارامتر λ

در این بخش نشان می‌دهیم که بر پایه داده‌های مشاهده شده می‌توان پارامتر انتقال (λ) را در فرایند مذکور، با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی برآورد کرد. در اینجا فرض می‌کنیم که فرایند مذکور در یک فاصله زمانی مشخص، به طور کامل مشاهده شده، یعنی زمان بیماری هر فرد و زمانی که طول می‌کشد تا بیماری را به فرد مستعد دیگری انتقال دهد مشاهده نموده ایم. برای افرادی که به بیماری مبتلا نشده اند زمان بیماری را (∞) و طول بیماری را (0) تعریف می‌کنیم. در هر لحظه با استفاده از داده‌ها، تعداد افراد مستعد بیماری و تعداد افراد بیمار را می‌توان به صورت برداری، به

با استفاده از آزمون مشتق دوم، برآورد ماکسیمم درستنایی λ به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{\lambda} = \frac{N_1(u)}{\int_0^u X(t)Y(t)dt}$$

۴ کاربرد

این بخش را به بیان کاربرد میانگین زمان انفراض فرایند مورد اشاره، همچنین مشکلاتی که در عمل با آن مواجه هستیم اختصاص می‌دهیم.

اولین کاربرد این مقاله به دست آوردن میانگین زمان انفراض یک بیماری همه گیر در جامعه‌ای همگن است. البته همان طور که در بخش دوم بیان شد بیماری باید قابل علاج بوده، بیمار بعد از اتمام دوره بیماری، دوباره مستعد بیماری شود. نحوه سرایت بیماری باید فرد به فرد باشد، یعنی فرد مستعد، بیماری را فقط از فرد بیمار دریافت کند. به عبارتی برای بیماری‌ها که غیر از فرد بیمار، عوامل دیگر مانند آب آلوده، غذای فاسد و... در شیوع بیماری مؤثرند، نمی‌توان از مدل مورد بحث استفاده کرد.

بعد از مشورت با اپیدمیولوژیست‌ها به این نتیجه رسیدیم که بعضی از بیماری‌های تقاریبی، با مفروضات این مدل سازگار است. به عنوان مثال سوزاک، از جمله بیماری‌هاست که تقریباً تمامی مفروضات این مدل را داراست ولی عملاً دست یافتن به داده‌های قابل اعتماد برای این گونه بیماریها، میسر نیست.

کاربرد دیگر این مقاله در مبحث جامعه‌شناسی است. میانگین زمان انفراض یک خبر را در یک جامعه همگن با کمک فرمولهای ارائه شده می‌توان به دست آورد. اینجا منظور از فرد مستعد فردی است که از خبر آگاه نیست، سرایت دهنده معادل است با فرد آگاه از خبر و منظور از اپیدمی، شیوع خبر در جامعه است. در این مورد نیز فراهم کردن مفروضات لازم (مفروضات بخش ۲) به راحتی میسر نیست.

ماقی در محاسبات در نظر گرفته نمی‌شوند، یعنی تعداد عاملهایی که (t) در آن یک است متناهی است.

حال رابطه بالا را برابر h به توان تعداد جهش‌های مشاهده شده تقسیم می‌کنیم و h را به سمت صفر میل داده و از رابطه به دست آمده لگاریتم می‌گیریم:

$$\begin{aligned} I_u(N_1; 0 \leq t \leq u) &= \\ \log\left(\prod_{\Delta t}\left(\prod_i(\lambda_i(t))^{\Delta N_i(t)}(1-h\sum_i \lambda_i(t))^{1-\sum_i \Delta N_i(t)}\right)\right) \\ &= \sum \int \log \lambda_i(t) dN_i(t) - \lambda_i(t) dt \end{aligned}$$

۲-۳ برآورد ماکسیمم درستنایی برای مدل SIS

فرض کنید که مشاهدات مدل همه گیر SIS تا زمان u در دسترس است. یعنی زمان بیماری و زمانی را که طول می‌کشد تا بیماری انتقال یابد، تا زمان u مشاهده کرده ایم. $N_1(t) = n - X(t)$ یک فرایند شمارشی است که تعداد بیماری‌ها را که در فاصله $[0, t]$ اتفاق افتاده، می‌شمارد، $X(0) = n$. با توجه به نتایج بخش قبل و تعریف فرایند همه گیر لوزیک تصادفی، داریم:

$$\begin{aligned} I_u(\lambda, F; 0 \leq t \leq u) &= \\ \int_0^u \log\left(\frac{\lambda}{n} X(t) Y(t)\right) dN_1(t) - \frac{\lambda}{n} X(t) Y(t) dt \\ \frac{\partial I_u(\lambda, F)}{\partial \lambda} &= \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^u \log\left(\frac{\lambda}{n} X(t) Y(t)\right) dN_1(t) - \frac{\lambda}{n} X(t) Y(t) dt \\ &= \frac{N_1(u)}{\lambda} - \int_0^u \frac{X(t)}{n} Y(t) dt \end{aligned}$$

مراجع

- [1] Andersson, H. A., Britton, T., (1999), *Stochastic Epidemic Models Explored with Modern Probability Techniques and Statistical Tools*, (preliminary draft).
 - [2] Andersson, H. A., Djehiche, B. O., (1998), *A Threshold Limit Theorem for the Stochastic Logistic Epidemic*, Appl. Prob., 35, 662-670.
 - [3] Jaqez, J. A., Simon, C. P., (1993), *The Stochastic SI Model with Recruitment and Deaths Comparisons with the Closed SIS Model*, Math. Biosci., 117, 77-125.
 - [4] Norden, R. H., (1982), *On the Distribution of the Time to Extinction in the Stochastic Logistic Population Model*, Appl. Prob., 14, 687-708.
 - [5] Weiss, G. W., Dishon, J., (1971), *On the Asymptotic Behavior of the Stochastic and Deterministic Models of an Epidemic*, Math. Biosci., 11, 261-265.
-