

## طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل $T^2$ با استفاده از حدود کنترل و اندازه نمونه‌ی متغیر

مرضیه اربابی<sup>۱</sup> و محمد بامنی مقدم<sup>۲</sup>

چکیده:

نمودارهای کنترل  $T^2$  برای هشدار دادن در فرآیندی که میزان کیفیت آن با بیش از یک مشخصه‌ی کیفیت همبسته تعیین می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرند. مطالعات اخیر نشان دادند که استفاده از طرح اندازه نمونه‌ی متغیر در کشف و شناسایی تغییرات کوچک در بردار میانگین، نمودارهایی با توان آماری بالاتری در مقایسه با طرح نمونه‌گیری ثابت را نتیجه می‌دهد. در این مقاله به طراحی نمودار کنترل جدیدی با استفاده از رویکرد زنجیر مارکف پرداخته شده است که در آن علاوه بر متغیر بودن اندازه‌ی نمونه، حدود کنترل نیز متغیر هستند. در این طراحی، علاوه بر در نظر گرفتن معیارهای آماری، بهینه بودن طرح از لحاظ اقتصادی با استفاده از مدل کوستا و رحیم مورد توجه قرار گرفته است. این مدل اقتصادی مواردی مانند هزینه‌های هشدارهای اشتباه، هزینه‌ی شناسایی انحراف بادلیل و تعمیر فرآیند، هزینه‌ی تولید محصول زمانی که فرآیند در حالت خارج از کنترل به سر می‌برد و نیز هزینه‌ی نمونه‌گیری و بازرسی محصولات را شامل می‌شود. همچنین با استفاده از رویکرد الگوریتم ژنتیک به بهینه‌سازی مدل مورد نظر و به دست آوردن پارامترهای بهینه‌ی مدل پرداخته شده است. در پایان نمودارهای کنترل  $T^2$  با اندازه‌ی نمونه و حدود کنترل متغیر و اندازه نمونه‌ی متغیر نسبت به هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان مقایسه می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** حدود کنترل و اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر ( $VSSC$ )، نمودار کنترل چندمتغیره، طرح آماری - اقتصادی ( $ESD$ )، زنجیر مارکف، الگوریتم ژنتیک ( $GA$ )، متوسط زمان هشدار ( $AATS$ ).

### ۱ مقدمه

در گذشته نمودارهای کنترل به منظور بررسی و کنترل مشخصه‌های کیفیت یک‌متغیره (یعنی زمانی که تنها یک متغیر خروجی برای کنترل وجود دارد) مورد استفاده قرار می‌گرفتند. در روش سنتی، در به کارگیری یک نمودار کنترل برای هشدار دادن یک فرآیند، از نمونه‌هایی با اندازه‌ی نمونه‌ی ثابت در بازه‌های زمانی نمونه‌گیری ثابت بین نمونه‌های متوالی استفاده می‌شود.

در این نمودارها، آماره‌های مربوط به نمونه‌ها محاسبه و بر روی نمودار

نمودارهای کنترل آماری فرآیند معمولاً به منظور هشدار دادن در فرآیندهای تولیدی تکرارپذیر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در طی زمان عواملی مانند خطای کارگرها، فرسایش دستگاه‌ها، تغییر در کیفیت مواد خام و ... منجر به تأثیرات منفی در فرآیند و در نتیجه کاهش کیفیت محصولات می‌شوند. هدف اولیه‌ی استفاده از نمودارهای کنترل، شناسایی هر چه سریع‌تر انحراف (های) با دلیل است.

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد آمار، دانشگاه علامه طباطبائی

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی

طراحی آماری بهینه است. نسبت به طراحی اقتصادی نیز علاوه بر دارا بودن ویژگی‌های آماری دارای هزینه‌ی اندکی بیشتر است که این تفاوت هزینه ناچیز و قابل چشم‌پوشی است [۱۹].

امروزه در صنعت با پیچیده‌تر شدن فرآیندهای تولید، کیفیت بیشتر محصولات از طریق تنها یک مشخصه‌ی کیفیت اندازه‌گیری و بررسی نمی‌شود بلکه متغیرهای متعددی باید همزمان مورد مطالعه قرار گیرند. به همین علت، سازمان‌ها مجبور به استفاده از روش‌های کنترل کیفیت چندمتغیره هستند. برای اولین بار با استفاده از آماره‌ی معروف  $T^2$  هتلینگ، با نرخ نمونه‌گیری ثابت به طراحی نمودارهای کنترل چندمتغیره پرداخته شد [۱۴]. پس از آن طرح  $VSS$  با استفاده از رویکرد زنجیر مارکف، به حالت چندمتغیره تعمیم داده شد و با مقایسه‌ی دو نمودار  $T^2 - VSS$  و  $T^2 - FRS$  این نتیجه به دست آمد که نمودار  $T^2 - VSS$  در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین از کارایی بهتری برخوردار است [۲ و ۹]. اولین بار نمودار کنترل چندمتغیره‌ی  $T^2 - FRS$  به صورت اقتصادی طراحی شد [۱۶]. طراحی اقتصادی و آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  با فرض نامعلوم بودن بردار میانگین و ماتریس واریانس - کوواریانس و نیز نمایی بودن توزیع شکست فرآیند با استفاده از مدل اقتصادی کوستا و رحیم (معرفی شده در [۶]) مورد بررسی قرار گرفتند و این نتیجه به دست آمد که طراحی نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  در مقایسه با نمودار کنترل  $T^2 - FRS$  از لحاظ اقتصادی و آماری - اقتصادی دارای کارایی چندان متفاوت و بهتری نمی‌باشد [۱۰]. همچنین از طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  با فرض نامعلوم بودن بردار میانگین و ماتریس واریانس - کوواریانس و نیز نمایی بودن توزیع زمان شکست فرآیند با استفاده از مدل اقتصادی لورنزن و وانس (معرفی شده در [۱۵]) این نتیجه حاصل شد که طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  در شناسایی تغییرات کوچک نسبت به طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - FRS$  کاراتر است [۱۱ و ۱۲]. اخیراً طرح جدیدی که در آن حدود کنترل و اندازه‌ی نمونه متغیر است ( $VSSC$ )<sup>۵</sup>، پیشنهاد و نشان داده شد که این طرح از لحاظ آماری نسبت به طرح  $VSS$  در شناسایی تغییرات (خیلی) کوچک از کارایی بهتری برخوردار است [۴]. طراحی آماری - اقتصادی این نمودار نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۲۰].

با حد کنترل از پیش تعیین شده مقایسه می‌شوند تا بر این اساس بتوان تصمیم نهایی مبنی بر تحت کنترل بودن یا خارج از کنترل بودن فرآیند را اتخاذ نمود. به این روش نمونه‌گیری، طرح نمونه‌گیری با نرخ ثابت ( $FRS$ )<sup>۳</sup> می‌گویند. در استفاده از نمودار کنترل  $\bar{X} - FRS$  سه پارامتر طرح یعنی اندازه‌ی نمونه ( $n$ )، فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $h$ ) و پهنای حدود کنترل ( $k$ ) باید انتخاب شوند. نمودارهای کنترل  $\bar{X} - FRS$  با در نظر گرفتن اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری مناسب، حدود کنترل را با استفاده از کمترین مقدار ممکن احتمال خطای نوع  $I$  و یا نوع  $II$  تعیین می‌کنند. این نمودار در کشف و شناسایی تغییرات بزرگ در میانگین از توانایی خوبی برخوردار است. اما در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین از لحاظ آماری کارایی (سرعت بی بردن به تغییر در میانگین فرآیند) چندان خوبی از خود نشان نمی‌دهد. در این ارتباط، استفاده از طرح اندازه‌ی نمونه متغیر ( $VSS$ )<sup>۴</sup> پیشنهاد شد که در آن اندازه‌ی نمونه در هر مرحله‌ی نمونه‌گیری به مقدار آماره‌ی به دست آمده از نمونه‌ی قبلی نسبت به حدود کنترل بستگی دارد. نمودار کنترل  $\bar{X} - VSS$  با دو اندازه‌ی نمونه مورد مطالعه قرار گرفت و این نتیجه حاصل شد که طرح  $VSS$  در مقایسه با طرح  $FRS$  کارایی بهتری از خود نشان می‌دهد [۵]، [۷ و ۱۷]. همچنین نمودار  $VSS$  با سه اندازه‌ی نمونه از کارایی تنها اندکی بهتر برخوردار است، اما استفاده از طرح  $VSS$  با دو اندازه‌ی نمونه در عمل ساده‌تر است [۲۵].

طراحی نمودارهای کنترل و کاربرد آن‌ها در علوم مختلف به ویژه صنعت، عواقب زیادی را به همراه دارد و بسیاری از پژوهشگران تنها به این جنبه در طراحی نمودارهای کنترل توجه دارند. برای اولین بار اقتصادی‌ترین پارامترهای طرح مورد بررسی و انتخاب قرار گرفتند [۱۳، ۲۲ و ۲۳]. پس از آن نیز به طراحی اقتصادی نمودار کنترل  $\bar{X}$  با فرض نمایی بودن زمان شکست فرآیند و با استفاده از مدل‌های اقتصادی پیشنهادی جدید مورد بررسی قرار گرفت [۶، ۸ و ۱۵]. از آن جا که طرح‌های آماری، جنبه‌ی اقتصادی را در بر نمی‌گیرند و طرح‌های اقتصادی نیز فاقد ویژگی‌های مطلوب آماری هستند، طرح‌های آماری و اقتصادی مورد نقد قرار گرفتند [۲۴]. بر این اساس بحث طراحی آماری - اقتصادی مطرح شد و این نتیجه به دست آمد که این نوع طراحی هم ویژگی‌های مطلوب آماری را شامل می‌شود و هم از لحاظ اقتصادی در مقایسه با

<sup>3</sup>Fixed Ratio Sampling

<sup>4</sup>Variable Sample Size

<sup>5</sup>Variable Sample Size and Control limits

و ۲۱ را ببینید].

نمادهای  $\bar{X}_i$  و  $X_{ij}$  به ترتیب نمایانگر میانگین زیرگروه  $i$ ام و نمونه‌ی  $i$ ام از زیرگروه  $i$ ام هستند. به استفاده‌ی دوگانه از علامت اختصاری  $\bar{X}_i$  توجه کنید. این علامت در فرمول  $T_i^2$  به معنی بردار میانگین در فاز دوم است، ولی در دو فرمول (۲)، ماتریس واریانس - کوواریانس مربوط به فاز اول است. در صورت لزوم برآورد پارامترهای بردار میانگین و ماتریس واریانس - کوواریانس بر اساس (۱) و (۲) داریم

$$C(m, n, p) = \begin{cases} \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} & n > 1 \\ \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} & n = 1 \end{cases}$$

و

$$\nu = \begin{cases} m(n-1)-p+1 & n > 1 \\ m-p & n = 1 \end{cases}$$

زمانی که نمودار کنترل  $T^2-FRS$  برای هشدار دادن در یک فرآیند چند متغیره مورد استفاده قرار می‌گیرد، نمونه‌ای با اندازه‌ی  $n_0$  در هر  $h_0$  واحد زمان  $t_0$  گرفته می‌شود و مقدار آماری  $T^2$  روی نمودار کنترل با حد کنترل نمودار  $T^2-VSSC$  رسم می‌شود. نمودار  $T^2-VSSC$  تعدیلی از نمودار  $T^2-FRS$  است. اساس کار این نمودار، انتخاب اندازه‌ی نمونه در هر زیرگروه با توجه به مقدار آماری  $T^2$  مربوط به زیرگروه قبلی و موقعیت آن در نمودار است. فرض کنید  $n_1$  و  $n_2$  مینیمم و ماکسیمم اندازه‌های نمونه هستند به طوری که  $n_1 < n_0 < n_2$  و فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $h_0$ ) ثابت در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که اشاره شد، انتخاب اندازه‌ی نمونه‌ی مینیمم یا ماکسیمم در هر نمونه به مقدار آماره و موقعیت آن نسبت به حد کنترل در نمودار بستگی دارد. اگر مقدار آماره در نمونه‌ی قبلی در ناحیه‌ی امن نمودار قرار بگیرد، اندازه نمونه‌ی  $n_1$  را برای نمونه‌ی فعلی در نظر می‌گیریم. اگر مقدار آماره در نمونه‌ی قبلی در ناحیه‌ی هشدار نمودار قرار بگیرد، اندازه نمونه‌ی  $n_2$  را برای نمونه‌ی فعلی در نظر می‌گیریم و در صورتی که مقدار آماره در نمونه‌ی قبلی در ناحیه‌ی واکنش نمودار قرار بگیرد، فرآیند خارج از کنترل فرض می‌شود. در این نمودار ناحیه‌ی امن، هشدار و واکنش توسط حد هشدار  $w_j$  و حد کنترل  $k_j$ ، برای  $j = 1, 2$ ، مشخص می‌شوند. ناحیه‌ی امن توسط بازه‌ی  $[w_j, k_j]$ ، ناحیه‌ی هشدار توسط بازه‌ی  $(w_j, k_j]$  و ناحیه‌ی

هدف از این مقاله طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2-VSSC$  با استفاده از رویکرد زنجیر مارکف است. در بخش دوم، به طور مختصر به طراحی نمودار  $T^2-VSSC$  با استفاده از رویکرد زنجیر مارکف پرداخته شده است. در بخش سوم، مدل اقتصادی کوستا و رحیم (معرفی شده در [۶]) و در بخش چهارم، نحوه‌ی بهینه‌سازی تابع هزینه توضیح داده شده است. در بخش پنجم، طرح‌های آماری - اقتصادی نمودارهای کنترل  $T^2-VSSC$  و  $T^2-VSS$  با یکدیگر مقایسه شده‌اند و بخش ششم شامل نتیجه‌های به دست آمده است.

## ۲ نمودار کنترل $T^2-VSSC$ و رویکرد زنجیر مارکف

فرض کنید در فرآیندی  $p$  مشخصه‌ی کیفیت همبسته که باید به طور هم‌زمان کنترل شوند، دارای توزیع نرمال  $p$  متغیره با بردار میانگین  $\mu'_0 = (\mu_{01}, \dots, \mu_{0p})$  و ماتریس واریانس - کوواریانس  $\Sigma$ ، در حالت تحت کنترل هستند. از فرآیند، زیرگروه‌هایی با اندازه‌ی  $n$  گرفته می‌شود. برای هر زیرگروه مقدار آماری  $T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0)$  محاسبه می‌شود.

این نقاط به صورت متوالی بر نمودار کنترل رسم می‌شوند و به محض این که مقدار این آماره برای زیرگروهی از حد هشدار  $k$  بزرگتر شود، نمودار هشدار مبنی بر خارج از کنترل بودن فرآیند اعلام می‌کند. اگر در فرآیندی پارامترهای آن یعنی  $\mu$  و  $\Sigma$  معلوم باشند، آن‌گاه  $k = \chi^2_{(\alpha, p)}$  [۱]. در عمل و در حالت کلی پارامترهای  $\mu$  و  $\Sigma$  نامعلوم هستند و باید با استفاده از یک نمونه‌ی مقدماتی  $n$  تایی گرفته شده از فرآیندی که تحت کنترل است، برآورد شوند. در این صورت داریم

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$$

که در آن‌ها

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad (1)$$

و

$$S_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)(X_{ij} - \bar{X}_i)' \quad (2)$$

<sup>۶</sup> بدون از دست دادن کلیت مساله، در اینجا واحد زمان را ساعت در نظر می‌گیریم.

حالت ۳:  $k_{ij} < T^2$  و فرآیند تحت کنترل است ( $d = 0$ ).

حالت ۴:  $0 \leq T^2 \leq w_i$  و فرآیند تحت کنترل نیست<sup>۱۰</sup> ( $d \neq 0$ ).

حالت ۵:  $w_j < T^2 \leq k_i$  و فرآیند تحت کنترل نیست ( $d \neq 0$ ).

حالت ۶:  $k_{ij} < T^2$  و فرآیند تحت کنترل نیست ( $d \neq 0$ ).

حالت ۳، بیان‌کننده‌ی هشدار اشتباه است و حالت ۶، همان حالت جاذب می‌باشد. ماتریس احتمال انتقال حاصل از شش حالت فوق به صورت زیر است.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن،  $p_{ij}$  احتمال انتقال از وضعیت قبلی  $i$  به وضعیت فعلی  $j$  است. نماد  $F(x, p, \nu_i, \eta_i)$  در  $p_{ij}$  ها، تابع توزیع تجمعی  $F$  نامرکزی با  $p$  و  $\nu_i$  درجه‌ی آزادی و پارامتر نامرکزی  $\eta_i = n_i d^2$  است. بنابراین

$$\begin{aligned} p_{11} &= a_{01} e^{-\lambda h_0}, \\ p_{12} &= (b_{01} - a_{01}) e^{-\lambda h_0}, \\ p_{13} &= (1 - b_{01}) e^{-\lambda h_0}, \\ p_{14} &= a_1 (1 - e^{-\lambda h_0}), \\ p_{15} &= (b_1 - a_1) (1 - e^{-\lambda h_0}), \\ p_{16} &= (1 - b_1) (1 - e^{-\lambda h_0}), \\ p_{21} &= p_{31} = a_{02} e^{-\lambda h_0}, \\ p_{22} &= p_{32} = (b_{02} - a_{02}) e^{-\lambda h_0}, \\ p_{23} &= p_{33} = (1 - b_{02}) e^{-\lambda h_0}, \\ p_{24} &= p_{34} = a_2 (1 - e^{-\lambda h_0}), \\ p_{25} &= p_{35} = (b_2 - a_2) (1 - e^{-\lambda h_0}), \end{aligned}$$

<sup>7</sup> Adjusted Average Time to Signal

<sup>8</sup> Average Time to Cycle

واکنش توسط بازه‌ی  $(k_j, \infty)$  مشخص می‌شوند. اگر نقطه نمونه‌ی قبلی در نمودار از اندازه‌ی کوچک آمده باشد، یعنی  $n_1, z = 1$  و در غیر این صورت  $z = 2$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود  $w_1 > w_2$  و  $k_1 > k_0 > k_2$  و تابع زیر خلاصه‌ای از طرح  $T^2 - VSSC$  است.

$$(n_{(i)}, w_{(i)}, k_{(i)}) = \begin{cases} (n_2, w_2, k_2) & w_{(i-1)} < T_{i-1}^2 \leq k_{(i-1)} \\ (n_1, w_1, k_1) & 0 \leq T_{i-1}^2 \leq w_{(i-1)} \end{cases}$$

منظور از  $n_{(i)}$  اندازه‌ی نمونه برای نمونه‌ی  $i$ ام است که برابر با  $n_1$  یا  $n_2$  خواهد بود. به همین ترتیب  $w_{(i)}$  و  $k_{(i)}$  برابر با  $w_1$  یا  $w_2$  یا  $k_1$  یا  $k_2$  خواهند بود. شکل ۱ نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$  را نشان می‌دهد.

متداول‌ترین معیار مورد استفاده برای مقایسه‌ی نمودارهای کنترل با طرح‌های نمونه‌گیری متفاوت، معیار متوسط زمان هشدار تعدیل یافته  $(AATS)$  است. این معیار نشان‌دهنده‌ی متوسط زمان از لحظه‌ی تغییر میانگین فرآیند بر اثر یک انحراف بادلیل تا زمان هشدار نمودار است. میزان تغییر میانگین از مقدار هدف را با استفاده فاصله‌ی ماهالانویس (با نماد  $d$ ) نشان می‌دهیم و به صورت  $d = \frac{\sqrt{(\mu_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)}}{\mu_1 - \mu_0}$  تعریف می‌شود ( $\mu_0$  میانگین در حالت تحت کنترل یا همان مقدار هدف و  $\mu_1$  میانگین در حالت خارج از کنترل است، مرجع [۱۸] را ببینید).

در صورتی که فرض شود زمان وقوع یک انحراف بادلیل، یک متغیر تصادفی با پارامتر  $\lambda$  است، می‌توان گفت مدت زمانی که فرآیند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند دارای توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda}$  است. بر این اساس معیار  $AATS$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۹].

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda}$$

که در آن  $ATC$ ، متوسط زمان چرخه<sup>۸</sup> یا متوسط زمان از لحظه‌ی شروع یک فرآیند تا اولین هشدار بعد از وقوع تغییر در فرآیند است.  $ATC$  را می‌توان با استفاده از خواص زنجیر مارکف محاسبه کرد [۳] را ببینید. در طرح نمونه‌گیری  $VSSC$  هر بار که از فرآیند نمونه‌گیری می‌شود، یکی از حالت‌های زیر ممکن است برای  $z = 1, 2$  رخ دهد.

حالت ۱:  $0 \leq T^2 \leq w_i$  و فرآیند تحت کنترل است<sup>۹</sup> ( $d = 0$ ).

حالت ۲:  $w_j < T^2 \leq k_i$  و فرآیند تحت کنترل است ( $d = 0$ ).

<sup>۹</sup> تحت کنترل بودن فرآیند به مفهوم عدم تغییر میانگین از مقدار هدف است. بنابراین مقدار فاصله‌ی ماهالانویس در آن صفر است.

<sup>۱۰</sup> تحت کنترل نبودن فرآیند به مفهوم تغییر میانگین از مقدار هدف است. بنابراین مقدار فاصله‌ی ماهالانویس در آن مخالف صفر است.

که در آن  $N' = (n_1, n_2, n_2, n_1, n_2)$  برداری از اندازه‌های نمونه است.

$$p_{26} = p_{36} = (1 - b_2)(1 - e^{-\lambda h_2}),$$

$$p_{44} = a_1,$$

$$p_{45} = b_1 - a_1,$$

$$p_{46} = 1 - b_1,$$

$$p_{54} = a_2,$$

$$p_{55} = b_2 - a_2,$$

$$p_{56} = 1 - b_2,$$

که در آن (برای  $i = 1, 2$ )،

$$a_{\circ i} = F\left(\frac{w_i}{C(m, n_i, p)}, p, \nu_i, \eta_i = \circ\right),$$

$$b_{\circ i} = F\left(\frac{k_i}{C(m, n_i, p)}, p, \nu_i, \eta_i = \circ\right),$$

$$a_i = F\left(\frac{w_i}{C(m, n_i, p)}, p, \nu_i, \eta_i = n_i d^{\lambda}\right),$$

$$b_i = F\left(\frac{k_i}{C(m, n_i, p)}, p, \nu_i, \eta_i = n_i d^{\lambda}\right).$$

بر اساس خواص زنجیر مارکف،  $ATC$  را می‌توان به صورت زیر تعریف و محاسبه کرد.

$$ATC = b'(I - Q)^{-1}h$$

که در آن  $h' = (h_{\circ}, h_{\circ}, h_{\circ}, h_{\circ}, h_{\circ})$  برداری از فاصله‌های زمانی نمونه‌گیری است،  $Q$  ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون مربوط به حالت جاذب در ماتریس همانی از مرتبه‌ی ۵ است و  $b'$   $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$  برداری از احتمال‌های اولیه (احتمال شروع فرآیند از هر یک از ۵ حالت اولیه‌ی ممکن) است که  $\sum_{i=1}^5 p_i = 1$  در این‌جا به منظور جلوگیری از بروز مشکلات احتمالی که ممکن است به هنگام شروع با آن مواجه شویم، بردار  $b'$  را به صورت  $(\circ, 1, \circ, \circ, \circ)$  در نظر می‌گیریم. همچنین متوسط تعداد هشدارهای غلط  $(ANF)^{11}$  و متوسط تعداد اقلام نمونه‌گیری شده از فرآیند  $(ANI)^{12}$  در یک چرخه‌ی کیفیت با استفاده از خواص رنجیر مارکف به صورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$ANF = b'(I - Q)^{-1}(\circ, \circ, 1, \circ, \circ)$$

$$ANI = b'(I - Q)^{-1}N$$

و

### ۳ مدل هزینه

#### ۱.۳ مفروضات

به منظور فرموله کردن یک مدل اقتصادی برای طراحی نمودار کنترل مورد نظر، فرض‌های زیر در نظر گرفته شده‌اند.

۱-  $p$  مشخصه‌ی کیفیت همبسته دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس واریانس - کوواریانس  $\Sigma$  هستند.

۲- قبل از بروز انتقال در میانگین فرآیند، فرآیند در حالت تحت کنترل آماری (تحت کنترل) است و  $\mu = \mu_{\circ}$ .

۳- تنها یک علت قابل تعیین منجر به تغییر میانگین فرآیند از  $\mu_{\circ}$  به  $\mu_1$  معلوم می‌شود. این مقدار تغییر را با فاصله‌ی ماهالانوبیس تعیین می‌کنند.

۴- ماتریس واریانس - کوواریانس ثابت است.

۵- علت قابل تعیین بر اساس فرآیند پواسن با شدت  $\lambda$  رخداد در هر ساعت اتفاق می‌افتد و با این فرض که فرآیند در حالت تحت کنترل شروع می‌شود، مدت زمانی که فرآیند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda}$  است.

۶- فرآیند خوداصلاح نیست. به عبارت دیگر فرآیند پس از انتقال به حالت خارج از کنترل تنها با مداخله‌ی مدیریت و نیروی انسانی و با انجام فعالیت‌های اصلاحی مناسب می‌تواند به حالت تحت کنترل باز گردد.

۷- چرخه‌ی کیفیت در حالت تحت کنترل آغاز می‌شود و تا زمانی ادامه می‌یابد که فرآیند پس از هشدار خارج از کنترل، تعمیر می‌شود. چرخه‌ی کیفیت از یک فرآیند تجدید پاداش پیروی می‌کند.

۸- به هنگام تحقیق برای یافتن علت قابل تعیین، فرآیند متوقف می‌شود.

#### ۲.۳ تابع زیان

به منظور طراحی اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$ ، مدل اقتصادی کوستا و رحیم (معرفی شده در [۶]) در نظر گرفته شده است. بر اساس این مدل، یک چرخه‌ی کیفیت شامل سه مرحله‌ی زمانی تحت کنترل بودن فرآیند، خارج از کنترل بودن فرآیند، و کشف انحراف بادلیل و

<sup>11</sup> Average Number of False alarms

<sup>12</sup> Average Number of Items

تعمیر فرآیند است. بنابراین طول مورد انتظار یک چرخه‌ی کیفیت برابر است با

$$E(T) = ATC + T_0 ANF + T_1$$

که در آن  $ATC$ ، متوسط زمان از لحظه‌ی شروع یک فرآیند تا اولین هشدار از سوی نمودار پس از وقوع انحراف بادلیل در فرآیند و  $ANF$ ، تعداد مورد انتظار هشدارهای غلط در یک چرخه‌ی کیفیت است. نماد  $T_0$  نیز بیانگر متوسط زمان صرف شده برای تحقیق و بررسی یک هشدار اشتباهی و  $T_1$ ، متوسط زمان لازم برای جستجو، کشف و اصلاح انحراف بادلیل و تعمیر فرآیند است.

علاوه بر آن، درآمد خالص مورد انتظار یک چرخه‌ی کیفیت برابر است با

$$E(C) = \frac{1}{\lambda} V_0 + V_1 AATS - a_3 - a'_3 ANF - a_2 ANI$$

که در آن  $\lambda$  پارامتر توزیع نمایی،  $AATS$ ، متوسط زمان هشدار تعدیل یافته،  $ANF$ ، تعداد مورد انتظار هشدارهای اشتباه و  $ANI$ ، متوسط تعداد محصولات نمونه‌گیری شده از فرآیند در هر چرخه‌ی کیفیت است. نماد  $V_0$  بیانگر میزان درآمد خالص حاصل از تولید مادامی که فرآیند تحت کنترل است و  $V_1$  بیانگر میزان درآمد خالص حاصل از تولید زمانی که فرآیند خارج از کنترل است، می‌باشد. همچنین  $a'_3$  معرف هزینه‌ی مورد انتظار برای بررسی یک هشدار اشتباه و  $a_3$  معرف متوسط هزینه‌ی جستجو، شناسایی و اصلاح یک هشدار بادلیل و تعمیر فرآیند و  $a_2$  نیز متوسط هزینه‌ی نمونه‌گیری برای هر محصول است. بنابراین متوسط درآمد خالص هر چرخه‌ی کیفیت در هر ساعت برابر است با

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}$$

و متوسط مقدار زیان هر چرخه‌ی کیفیت در هر ساعت برابر است با

$$E(L) = V_0 - \frac{E(C)}{E(T)} = V_0 - E(A)$$

#### ۴ حل مدل هزینه

هدف ماکسیمم کردن تابع  $E(A)$  است که این خود مستلزم مینیمم کردن تابع زیان  $E(L)$  است. از آنجا که این تابع زیان، تابعی ناپیوسته، غیرمحدب و مرکب از متغیرهای گسسته‌ی اندازه‌های نمونه و متغیرهای پیوسته‌ی فاصله‌ی نمونه‌گیری، حدود هشدار و حدود کنترل

است، مسئله‌ی بهینه‌سازی مدل اقتصادی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{Min } E(L)$$

$$\text{subject to } 0 \leq w_2 < k_2$$

$$0 \leq w_1 < k_1$$

$$k_2 < k_1$$

$$w_2 < w_1$$

$$1 \leq n_1 < n_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$0/1 \leq h \leq 1/0$$

به منظور دست یافتن به طراحی آماری - اقتصادی، شرط آماری  $ANF \leq 0/5$  را به مسئله‌ی بهینه‌سازی بالا اضافه می‌کنیم. این محدودیت آماری برای غلبه بر هشدار اشتباه زیاد نمودارهای اقتصادی در نظر گرفته شده است.

مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق، یک مسئله‌ی تصمیم با متغیرهای آمیخته‌ی گسسته - پیوسته و فضای حل ناپیوسته و نامحدب است و روش‌های معمول بهینه‌سازی غیرخطی برای آن مناسب نیست. به همین دلیل استفاده از روش جستجوی تصادفی فراابتکاری الگوریتم ژنتیک پیشنهاد می‌شود. این روش از جمله روش‌های محاسبات تکاملی است که بدون استفاده از روش‌های بهینه‌سازی سنتی، در بسیاری از مسئله‌های بهینه‌سازی پیچیده به کار می‌رود. الگوریتم ژنتیک بر خلاف روش‌های بهینه‌سازی متداول، با مجموعه‌ای تصادفی از جواب‌های شدنی مسئله که به آن جمعیت می‌گویند، آغاز به کار می‌کند. در واقع هر عضو که کروموزم نامیده می‌شود یک جواب مسئله است و کروموزم‌ها در تکرارهای متوالی تکامل پیدا می‌کنند. هر تکرار، نسل و کروموزم‌های نسل جاری، والد و کروموزم‌های نسل بعد، ولد نامیده می‌شوند. طی هر نسل، کروموزم‌ها با استفاده از معیاری تحت عنوان تابع برازش ارزیابی می‌شوند. برای تولید نسل بعد و کروموزم‌های جدید از عملگر تلاقی و جهش استفاده می‌شود. آن‌گاه نسل بعدی با بهره جستن از این عملگرها و مقادیر تابع برازش تولید می‌شود. پس از ایجاد چند نسل، الگوریتم به مقدار بهترین کروموزم همگرایی پیدا می‌کند.

در این مقاله، نرم‌افزار مورد استفاده MATLAB است و اندازه‌ی جمعیت اولیه‌ی ۵۰، نرخ تلاقی ۴/۰ و نرخ جهش ۲۵/۰ به عنوان پارامترهای کلیدی الگوریتم ژنتیک در نظر گرفته شده‌اند. شرط خاتمه‌ی این الگوریتم نیز تعداد نسل‌های ۲۰۰ در نظر گرفته شده است.



## ۵ مقایسه‌های عددی

زیان در نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  برابر  $۷۲/۵۳$  و در نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$  برابر  $۷۳/۵۳$  است که این تفاوت نیز قابل چشم‌پوشی است. بنابراین در این حالت نیز استفاده از طرح آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$  پیشنهاد نمی‌شود. با انجام مقایسه در سایر حالت‌های مورد نظر نیز چنین نتیجه‌ای بدست آمد.

## ۶ نتیجه‌گیری

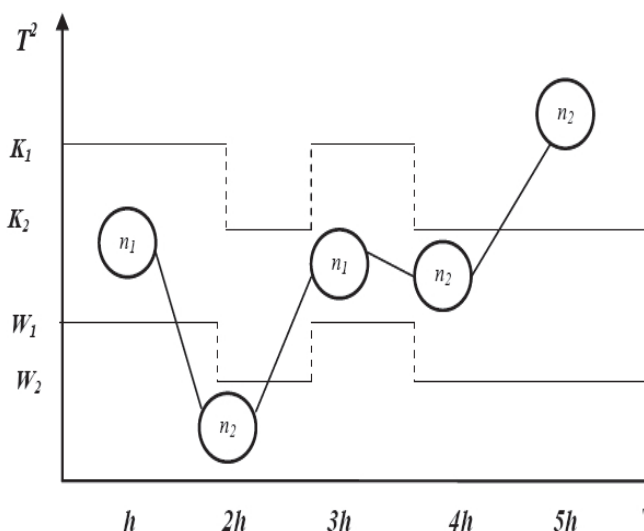
همان‌گونه که اشاره شد، مطالعه‌های اخیر نشان دادند که برای کشف تغییرات کوچک تا متوسط بردار میانگین فرآیند، بکار بردن طرح‌هایی با اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر ( $VSS$ ) عملکرد آماری بهتری خواهد داشت (دارای توان آماری بالاتری هستند). به همین منظور در این مقاله به طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2$  با اندازه‌ی نمونه و حدود کنترل متغیر ( $VSSC$ ) پرداختیم. برای طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$ ، از مدل اقتصادی کوستا و رحیم، معرفی شده در [۶]، استفاده شد. این مدل هزینه شامل هزینه‌ی هشدارهای غلط، هزینه‌ی یافتن و حذف انحراف بادلیل، هزینه‌ی تولید در شرایط خارج از کنترل و بالاخره هزینه‌ی نمونه‌گیری و آزمایش است. برای مقایسه‌ی نمودارهای کنترل  $T^2 - VSSC$  و  $T^2 - VSS$  نسبت به تابع زیان از ۱۳ سری حالت مختلف پارامترهای فرآیند و هزینه، برگرفته از [۶]، استفاده شده است.

مقایسه‌ی بین پارامترهای بهینه و مقدار زیان نمودارهای کنترل  $T^2 - VSSC$  و  $T^2 - VSS$ ، در یک فرآیند تولید با دو و چهار مشخصه‌ی کیفیت و حجم نمونه‌ی اولیه به ترتیب ۲۵ و ۵۰، به منظور برآورد بردار میانگین ( $\bar{X}$ ) و ماتریس واریانس - کوواریانس نمونه ( $\bar{S}$ )، در جدولی ارائه شد. با توجه به زیان‌های گزارش شده هیچ‌گونه بهبود نسبی در عملکرد نمودار  $T^2 - VSSC$  نسبت به نمودار  $T^2 - VSS$  ملاحظه نشد. همچنین با مقایسه‌ی ۱۳ سری مطرح شده از پارامترهای فرآیند و هزینه برای سایر مقادیر  $n$  و  $m$  این نتیجه به دست آمد که به‌طور متوسط طرح آماری - اقتصادی  $T^2 - VSSC$  در مقایسه با طرح آماری - اقتصادی  $T^2 - VSS$  در هر ساعت (واحد زمان)، منجر به صرفه‌جویی اقتصادی قابل توجهی نخواهد شد.

در این بخش به مقایسه‌ی نمودارهای کنترل  $T^2 - VSSC$  و  $T^2 - VSS$  نسبت به توابع زیان خواهیم پرداخت. برای انتخاب پارامترهای فرآیند و هزینه، از ۱۳ سری حالت مختلف داده شده در جدول ۱، برگرفته از [۶]، استفاده می‌کنیم. تعداد مشخصه‌های کیفیت ۲، ۴، ۶ و ۱۰ و حجم نمونه‌ی اولیه‌ی ۲۵، ۵۰، ۷۵ و ۱۵۰ در نظر گرفته شده‌اند که نتایج نشان داده شده مربوط به تعداد مشخصه‌های کیفیت ۲ و ۴ و حجم نمونه‌ی اولیه‌ی ۲۵ و ۵۰ هستند و بقیه‌ی نتایج (که در صورت درخواست، ارائه می‌شوند) مشابه این دو حالت هستند.

جدول‌های ۲ و ۳، مقایسه‌ها بین پارامترهای بهینه و مقدار زیان نمودارهای کنترل  $T^2 - VSSC$  و  $T^2 - VSS$  را در یک فرآیند با دو مشخصه‌ی کیفیت نشان می‌دهد ( $p = 2$ ). برای انجام مقایسه‌ها، بردار میانگین ( $\bar{X}$ ) و ماتریس واریانس - کوواریانس نمونه ( $\bar{S}$ ) با استفاده از یک نمونه‌ی اولیه به حجم ۲۵ برآورد شده‌اند ( $m = 25$ ).

چنانچه سطر پنجم جدول‌های ۲ و ۳ مدنظر قرار گیرند، ملاحظه می‌شود که در طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSS$ ، مقدار زیان برابر است با  $۵۹/۲۸$  و مقادیر پارامترهای بهینه‌ی طرح برابر با  $w = ۴/۶۲$ ،  $h = ۸/۸$ ،  $n_1 = ۱۵$ ،  $n_2 = ۱۸$  هستند. این در حالی است که در طراحی آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$ ، مقدار زیان متناظر برابر  $۴۵/۲۸$  و پارامترهای بهینه‌ی متناظر طرح برابر با  $w_1 = ۰$ ،  $w_2 = ۳/۸۷$ ،  $h = ۴/۴۴$ ،  $n_1 = ۱$ ،  $n_2 = ۱۳$  هستند. همچنین متوسط مقدار زیان برای ۱۳ طرح مورد نظر در نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  برابر  $۰۲/۵۱$  و در نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$  برابر  $۰۵/۵۱$  است که این تفاوت بسیار ناچیز و قابل اغماض است. بنابراین با توجه به زیان‌های گزارش شده می‌توان گفت هیچ‌گونه بهبود نسبی در عملکرد نمودار  $T^2 - VSSC$  نسبت به  $T^2 - VSS$  ملاحظه نمی‌شود و با توجه به این که بکارگیری نمودار کنترل  $T^2 - VSS$  در عمل راحت‌تر است، استفاده از طرح آماری - اقتصادی نمودار کنترل  $T^2 - VSSC$  پیشنهاد نمی‌شود. جدول‌های ۴ و ۵، این مقایسه را در یک فرآیند تولید با چهار مشخصه‌ی کیفیت ( $p = 4$ ) در نظر می‌گیرند که متوسط مقدار



شکل ۱: نمودار کنترل  $T^2$  با اندازهی نمونه و حدود کنترل متغیر

## جدولها

جدول ۱. پارامترهای مدل اقتصادی کوستا و رحیم

$d$	$\lambda$	$T_1$	$T_0$	$V_1$	$V_0$	$a_r$	$a'_r$	$a_r$	No.
۱	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۱
۱	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۱۰	۲
۱	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۲۵۰	۵	۳
۱	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰	۵۰۰	۵	۴
۱	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۲۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۵
۱	۰/۰۱	۱	۵	۱۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۶
۱	۰/۰۱	۱	۵	۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۷
۱	۰/۰۱	۱	۲/۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۸
۱	۰/۰۱	۱۰	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۹
۱	۰/۰۵	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۱۰
۱/۵	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۱۱
۰/۵	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۱۲
۲	۰/۰۱	۱	۵	۵۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵	۱۳



جدول ۲. پارامترهای بهینه طرح  $VSS$  با  $p = 2$  و  $m = 25$ 

$E(L)$	$ANF$	$n_2$	$n_1$	$h$	$w$	$k$	$No.$
۴۳/۴۲	۰/۰۸	۲۱	۱۷	۶/۰۸	۵/۶۲	۱۱/۱۲	۱
۵۴/۷۰	۰/۱۲	۱۸	۱۵	۸/۲۷	۴/۸۸	۹/۵۷	۲
۴۳/۲۲	۰/۰۹	۲۱	۱۷	۶/۱۰	۵/۷۴	۱۰/۹۶	۳
۳۹/۱۵	۰/۰۸	۲۱	۱۷	۶/۰۵	۵/۶۱	۱۱/۱۳	۴
۲۸/۵۹	۰/۱۰	۱۸	۱۵	۸/۸۴	۴/۶۲	۹/۸۴	۵
۴۱/۴۳	۰/۰۸	۲۱	۱۷	۶/۴۸	۵/۶۲	۱۱/۱۲	۶
۴۵/۳۰	۰/۰۹	۲۱	۱۷	۵/۷۵	۵/۶۲	۱۱/۱۲	۷
۴۲/۲۶	۰/۱۴	۱۹	۱۶	۵/۹۴	۵/۲۸	۱۰/۰۵	۸
۷۹/۲۸	۰/۰۸	۲۱	۱۷	۶/۳۸	۵/۷۱	۱۱/۰۰	۹
۱۱۴/۴۴	۰/۰۴	۱۹	۱۷	۳/۰۱	۵/۱۲	۱۰/۶۴	۱۰
۳۳/۷۲	۰/۰۵	۱۰	۹	۴/۳۸	۶/۶۵	۱۳/۱۲	۱۱
۶۹/۰۵	۰/۲۲	۵۰	۲۳	۱۰/۷۹	۰/۰۰	۷/۶۹	۱۲
۲۸/۶۳	۰/۰۳	۷	۶	۳/۶۰	۷/۸۶	۱۴/۸۴	۱۳

جدول ۳. پارامترهای بهینه طرح  $VSSC$  با  $p = 2$  و  $m = 25$ 

$E(L)$	$ANF$	$n_2$	$n_1$	$h$	$w_1$	$w_2$	$k_2$	$k_1$	$No.$
۴۳/۴۳	۰/۰۸	۲۱	۱۸	۶/۲۹	۶/۰۶	۶/۰۳	۱۰/۸۳	۱۱/۲۶	۱
۵۴/۷۰	۰/۱۲	۱۸	۱۵	۸/۲۵	۵/۱۱	۴/۹۱	۹/۳۹	۹/۶۳	۲
۴۳/۲۱	۰/۰۹	۲۰	۱۷	۶/۰۸	۵/۵۸	۵/۵۵	۱۰/۵۱	۱۱/۰۰	۳
۳۸/۵۸	۰/۰۷	۱۶	۱	۳/۱۴	۴/۷۶	۰/۰۰	۱۱/۵۳	۳۰/۰۰	۴
۲۸/۴۵	۰/۱۱	۱۳	۱	۴/۴۴	۳/۸۷	۰/۰۰	۱۰/۰۷	۳۰/۰۰	۵
۴۱/۴۳	۰/۰۸	۲۱	۱۷	۶/۴۷	۵/۹۶	۵/۶۷	۱۰/۸۸	۱۱/۱۸	۶
۴۵/۲۹	۰/۰۹	۲۱	۱۷	۵/۷۴	۵/۹۵	۵/۷۰	۱۰/۸۳	۱۱/۱۸	۷
۴۲/۲۶	۰/۱۴	۱۹	۱۶	۵/۹۳	۵/۴۶	۵/۳۷	۹/۷۵	۱۰/۱۲	۸
۷۹/۲۸	۰/۰۸	۲۱	۱۷	۶/۳۸	۶/۰۳	۵/۷۴	۱۰/۷۸	۱۱/۰۵	۹
۱۱۶/۸۲	۰/۰۳	۱۶	۴	۱/۲۴	۴/۶۹	۲/۴۳	۱۰/۹۷	۱۸/۳۴	۱۰
۳۳/۷۲	۰/۰۵	۱۲	۹	۴/۳۸	۷/۹۶	۷/۲۴	۱۳/۱۳	۱۳/۲۱	۱۱
۶۷/۸۸	۰/۱۷	۴۷	۱	۵/۶۷	۳/۶۳	۰/۰۰	۸/۴۱	۳۰/۰۰	۱۲
۲۸/۶۲	۰/۰۳	۷	۶	۳/۵۹	۸/۱۱	۸/۰۰	۱۴/۰۹	۱۴/۹۲	۱۳

جدول ۴. پارامترهای بهینه طرح  $VSS$  با  $p = 4$  و  $m = 50$

$E(L)$	$ANF$	$n_2$	$n_1$	$h$	$w$	$k$	$No.$
۴۵/۹۰	۰/۰۸	۲۴	۲۱	۶/۸۴	۸/۸۶	۱۴/۹۹	۱
۵۸/۱۱	۰/۱۳	۲۱	۱۸	۹/۱۳	۷/۸۴	۱۳/۱۸	۲
۴۵/۶۹	۰/۰۹	۲۴	۲۰	۶/۶۵	۸/۶۹	۱۴/۷۳	۳
۴۱/۶۴	۰/۰۸	۲۴	۲۱	۶/۸۰	۸/۸۵	۱۵/۰۰	۴
۳۰/۱۸	۰/۱۱	۲۱	۱۸	۹/۷۷	۷/۴۸	۱۳/۴۸	۵
۴۳/۷۶	۰/۰۸	۲۴	۲۰	۷/۰۷	۸/۵۲	۱۴/۹۱	۶
۴۷/۹۲	۰/۰۹	۲۴	۲۰	۶/۲۷	۸/۵۲	۱۴/۹۱	۷
۴۴/۷۲	۰/۱۵	۲۲	۱۹	۶/۵۱	۸/۲۴	۱۳/۷۲	۸
۸۱/۴۶	۰/۰۹	۲۴	۲۰	۶/۹۶	۸/۶۵	۱۴/۷۷	۹
۱۱۹/۲۷	۰/۰۴	۲۱	۱۹	۳/۲۱	۷/۵۵	۱۴/۲۹	۱۰
۳۵/۳۳	۰/۰۵	۱۳	۱۱	۴/۸۹	۱۰/۷۱	۱۷/۲۷	۱۱
۷۴/۶۱	۰/۳۲	۵۰	۸	۱۰/۶۹	۰/۰۰	۱۰/۵۴	۱۲
۲۹/۷۶	۰/۰۳	۸	۷	۳/۹۰	۱۱/۷۵	۱۹/۰۲	۱۳

جدول ۵. پارامترهای بهینه طرح  $VSSC$  با  $p = 4$  و  $m = 50$

$E(L)$	$ANF$	$n_2$	$n_1$	$h$	$w_2$	$w_1$	$k_2$	$k_1$	$No.$
۴۵/۹۰	۰/۰۹	۲۴	۲۰	۷/۰۰	۸/۰۰	۸/۶۱	۱۴/۶۹	۱۴/۹۶	۱
۵۸/۱۰	۰/۱۳	۲۱	۱۸	۹/۰۰	۷/۸۵	۸/۰۰	۱۳/۰۴	۱۳/۲۳	۲
۴۵/۷۰	۰/۰۹	۲۴	۲۱	۷/۰۸	۸/۰۰	۹/۱۵	۱۴/۵۲	۱۴/۸۸	۳
۴۱/۶۴	۰/۰۸	۲۴	۲۱	۷/۰۴	۸/۰۰	۹/۰۲	۱۴/۶۶	۱۵/۰۸	۴
۳۰/۱۸	۰/۱۱	۲۱	۱۸	۱۰	۷/۵۵	۷/۸۰	۱۳/۳۱	۱۳/۵۵	۵
۴۳/۸۶	۰/۰۸	۲۱	۱۹	۶/۹۷	۰/۰۰	۰/۰۱	۱۴/۷۰	۱۴/۷۷	۶
۴۷/۹۱	۰/۰۸	۲۴	۲۱	۶/۰۰	۸/۰۰	۹/۰۵	۱۴/۶۳	۱۵/۰۷	۷
۴۴/۷۱	۰/۱۴	۲۲	۱۹	۷/۰۰	۸/۰۰	۸/۳۵	۱۳/۴۶	۱۳/۷۹	۸
۸۱/۴۷	۰/۰۸	۲۴	۲۱	۶/۹۸	۸/۰۰	۹/۱۱	۱۴/۵۷	۱۴/۹۳	۹
۱۱۹/۲۵	۰/۰۴	۲۲	۲۰	۳/۰۰	۸/۰۰	۸/۰۵	۱۴/۱۶	۱۴/۴۵	۱۰
۳۵/۴۷	۰/۰۴	۱۴	۱۲	۴/۹۸	۸/۰۰	۱۲/۲۱	۱۷/۵۷	۱۷/۶۱	۱۱
۷۴/۵۱	۰/۳۱	۵۰	۴۹	۱۰/۰۰	۴/۸۹	۵/۵۵	۱۰/۰۶	۱۱/۰۲	۱۲
۲۹/۷۶	۰/۰۳	۸	۷	۴/۰۰	۸/۰۰	۱۲۰۰	۱۸/۴۵	۱۹/۰۹	۱۳

## مراجع

- [1] Alt, F.B. (1973). *Aspects of Multivariate Control Charts*, M.S. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta GA.
- [2] Aparisi, F. (1996). Hotelling's  $T^2$  control chart with adaptive sample size, *International Journal of Production Research*, **34**, 2853-2862.
- [3] Cinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastic Process*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
- [4] Chen, Y.K. and Hsieh, K.L. (2007). Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sample size and control limits, *European Journal of Operational Research*, DOI:10.1016/j.ejor.2006.09.046
- [5] Costa, A.F.B. (1994).  $\bar{X}$  charts with variable sampling size, *Journal of Quality Technology*, **26**, 155-163.
- [6] Costa, A.F.B. and Rahim, M.A. (2001). Economic design of  $\bar{X}$  charts with variable parameters: the Markov Chain approach, *Journal of Applied Statistics*, **28**, 875-885.
- [7] Daudin, J.J. (1992). Double sampling  $\bar{X}$  charts, *Journal of Quality Technology*, **24**, 78-87.
- [8] Duncan, A.J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process, *Journal of American Statistical Association*, **51**, 228-242.
- [9] Faraz, A. and Moghadam, M.B. (2008). Hotelling's  $T^2$  Control Chart with two-State Adaptive Sample Size, *International Journal of methodology*, DOI:10.1007/s11135-008-9167-x.
- [10] Faraz, A., Saniga, E. and Heuchenne, C. (2010). Economic and Economic-statistical Design of Hotelling's  $T^2$  Control Chart with Variable Sampling Intervals, Eprint/Working paper retrieved from <http://orbi.ulg.ac.be/handle/2268/90711>.
- [11] Faraz, A., Saniga, E. and Kazemzadeh, R.B. (2009). Economic and Economical-Statistical Design of Hotelling's  $T^2$  Control Chart with Two-State Adaptive Sample Size, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80(12)**, 1299-1316.
- [12] Farza, A., Kazemzade, R.B., Parsian, A. and Moghadam, M.B. (2012). On the advantages of economically designed Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sample size and sampling interval, *Quality & Quantity*, **46**, 39-53.
- [13] Girschick, M.A. and Rubin, H. (1952). A Bayes' approach to a quality control model, *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 114-125.
- [14] Hotelling, H. (1947). *Multivariate quality control illustrated by the air testing of sample bomb-sights*, in *Techniques of Statistical Analysis*, C. Eisenhart, M.W. Hasty and W.A. Wallis, eds., McGraw-Hill, New York, 111-184.

- [15] Lorenzen, T.J. and Vance, L.C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach, *Technometrics*, **28**, 3-11.
- [16] Montgomery, D.C. and Klatt, P.J. (1972). Economic Design of  $T^v$  Control Charts to Maintain Current Control of a Process, *Management Science*, **19**, 76-89.
- [17] Prabhu, S.S. Runger, G.C. and Keats, J.B. (1993).  $\bar{X}$  chart with adaptive sample sizes, *International Journal of Production Research*, **31**, 2895-2909.
- [18] Rocke, D.M. and Woodruff, D.L. (1993). Robust estimation of multivariate location and shape, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **57**, 245-255.
- [19] Saniga, E. (1989). Economic statistical control chart designs with an application to  $\bar{X}$  and  $R$  charts, *Technometrics*, **31**, 313-320.
- [20] Seif, A., Faraz, A., Heuchenne, C., Saniga, E. and Moghadam, M.B. (2011a). A modified economic-statistical design of the  $T^v$  control chart with variable sample sizes and control limits, *Journal of Applied Statistics*, **38(11)**, 2459-2469.
- [21] Seif, A. Moghadam, M.B., Faraz, A. and Heuchenne, C. (2011b). Statistical Merits and Economic Evaluation of  $T^v$  Control Charts with VSSC scheme, *Arabian Journal for Science and Engineering*, **38**, 1461-1470.
- [22] Taylor, H.M. (1965). Markovian sequential replacement processes, *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 247-254.
- [23] Weiler, H. (1952). On the Most Economical Sample Size for Controlling the Mean of a population, *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 247-254.
- [24] Woodall, W.H. (1986). Weaknesse of the economical design of control charts, *Technometrics*, **28**, 408-409.
- [25] Zimmer, L.S., Montgomery, D.C. and Runger, G.C. (1998). Evaluation of Three-state adaptive sample size  $\bar{X}$  control chart, *International Journal of Production Research*, **36**, 733-743.