

برآورد بیز خطی و بیز تجربی برای آماره‌های خطی

محمد بهرامی^۱

چکیده

در این مقاله می‌خواهیم برآورد بیز تجربی برای پارامتر θ و تابع چگالی $f(x|\theta)$ را بدست آوریم اما فرض می‌کنیم این برآورد به صورت آماره‌ای خطی از X مانند $T(X) = A + BX$ بوده و سپس ضرایب این ترکیب خطی یعنی A و B را برآورد می‌کنیم. لازم به ذکر است که پارامتر θ خود یک متغیر تصادفی است که دارای تابع چگالی پیشین π می‌باشد.

۱ مقدمه

فرض کنید (θ, X) یک بردار تصادفی باشد بطوریکه:

الف) θ دارای تابع توزیعی مانند G باشد.

ب) به شرط θ ، X دارای تابع چگالی احتمال بصورت $f(x|\theta)$ نسبت به اندازه $\sigma - m$ متناهی باشد.

هدف برآورد θ بوسیله تابعی مانند $T(X)$ می‌باشد. برای این منظور باید میانگین مجذور خطا یعنی: $E(T(X) - \theta)^2$ نسبت به آماره $T(X)$ می‌نیمم شود. اما ممکن است میانگین مربع خطا را نسبت به آماره‌های خاصی می‌نیمم کنیم مثلاً: فرض کنید $T(X)$ متعلق به کلاس توابع خطی به فهم کلی $T(X) = A + BX$ که در آن A و B دو عدد حقیقی هستند باشد. در این صورت برآورد بیزی که از این طریق بدست می‌آید برآورد بیز خطی و در صورت نامعلوم بودن G ، برآورد

۲ برآورد بیز خطی

فرض کنید $f(x|\theta)$ به نحویست که $E(X|\theta) = \theta$ برای همه θ ها. بنابراین می‌خواهیم $E(T(X) - \theta)^2$ را نسبت به آماره‌های خطی می‌نیمم کنیم. برای این منظور A و B را طوری تعیین می‌کنیم که $E(A + BX - \theta)^2$ می‌نیمم شود می‌توان ثابت کرد $\hat{A} = E(\theta) - \frac{Cov(X, \theta)}{Var(X)} \cdot E(X)$ و $\hat{B} = E(\theta) - \frac{Cov(X, \theta)}{Var(X)}$ جمله فوق را می‌نیمم می‌کند.

اثبات:

این کار بوسیله مشتق‌گیری و یا سریعاً به طریق زیر با استفاده از

^۱ محمد بهرامی، گروه آمار، دانشگاه اصفهان

فرمولهای واریانس بدست می‌آید

$$\begin{aligned} E(A + BX - \Theta)^2 &= \text{Var}(A + BX - \Theta) \\ &\quad + (E(A + BX - \Theta))^2 \\ &= B^2 \text{Var}(X) + \text{Var}(\Theta) \\ &\quad - 2BCov(X, \Theta) \\ &\quad + (A + BE(X) - E(\Theta))^2 \\ &= \text{Var}(\Theta) - \frac{Cov^2(X, \Theta)}{\text{Var}(X)} \\ &\quad + \text{Var}(X) \cdot \left[B - \frac{Cov(X, \Theta)}{\text{Var}(X)}\right]^2 \\ &\quad + [A + BE(X) - E(\Theta)]^2 \end{aligned}$$

عبارت فوق وقتی می‌نیم می‌شود که دو جمله آخر آن صفر شوند یعنی

$$\hat{B} = \frac{Cov(X, \Theta)}{\text{Var}(X)} \quad (1)$$

$$\hat{A} = E(\Theta) - \frac{Cov(X, \Theta)}{\text{Var}(X)} \cdot E(X) \quad (2)$$

بنابراین آماره خطی $T(X)$ که میانگین مجذور خطا را می‌نیم می‌کند با فرض اینکه توزیع پیشین Θ ، G باشد بصورت زیر خواهد بود

$$T_G(X) = E(\Theta) + \frac{Cov(X, \Theta)}{\text{Var}(X)}(X - E(X)) \quad (3)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود اگر $G(\Theta)$ معلوم نباشد برآوردگر $T_G(X)$ را نمی‌توان بدست آورد و بنابراین با استفاده از مقادیر مشاهده شده متغیر تصادفی X باید $E(\Theta)$ و $Cov(X, \Theta)$ و $E(X)$ و $\text{Var}(X)$ را برآورد کنیم. بدین منظور نمونه تصادفی $(\Theta_1, X_1), (\Theta_2, X_2), \dots, (\Theta_n, X_n)$ را در نظر می‌گیریم، بطوریکه برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، Θ_i دارای تابع توزیع G و X_i دارای چگالی شرطی $f(x_i | \theta_i)$ باشد. واضح است که X_i ها مستقل و دارای تابع چگالی کناری مشترک زیر می‌باشند

$$f_x(x) = \int f(x | \theta) dG(\theta) \quad (4)$$

قضیه:

فرض کنید چگالی شرطی $f(X | \theta)$ دارای خواص زیر باشد:

الف) برای همه θ ها $E(X | \Theta = \theta) = \theta$

ب) برای همه θ ها $\text{Var}(X | \Theta = \theta) = a + b\theta + c\theta^2$

بطوریکه $c \neq -1$ و b و a ضرایب معلوم هستند. آنگاه برآورد بیز تجربی برای θ با توزیع پیشین G ، بصورت زیر خواهد بود:

$$T_G(X) = E(X) + \frac{\text{Var}(\Theta)}{\text{Var}(X)}[X - E(X)] \quad (5)$$

و در (5)

$$\text{Var}(\Theta) = \frac{\text{Var}(X) - [a + bE(X) + cE^2(X)]}{c + 1}$$

اثبات:

می‌دانیم که $E(X | \Theta) = \Theta$ بنابراین

$$E\{E(X | \Theta)\} = E(\Theta)$$

و در نتیجه: $E(X) = E(\Theta)$. همچنین:

$$\begin{aligned} Cov(X, \Theta) &= E(X\Theta) - E(X)E(\Theta) \\ &= E\{E(X\Theta | \Theta)\} - E(E(X | \Theta)) \cdot E(\Theta) \\ &= Cov(E(X | \Theta), \Theta) \\ &= Cov(\Theta, \Theta) \\ &= \text{Var}(\Theta) \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_G(X) = E(X) + \frac{\text{Var}(\Theta)}{\text{Var}(X)}[X - E(X)]$$

اکنون $\text{Var}(\Theta)$ را بدست می‌آوریم. با استفاده از شرط (ب) قضیه و اینکه

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) - \text{Var}(\Theta) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &\quad - E(\Theta)^2 + E^2(\Theta) \\ &= E(X^2) - E(\Theta)^2 \\ &= E\{E(X^2 | \Theta) - \Theta^2\} \\ &= E\{E(X^2 | \Theta) - E^2(X | \Theta)\} \\ &= E\{\text{Var}(X | \Theta)\} \end{aligned}$$

و در نتیجه

و یا:

$$T_G^*(X_i) = \left[\frac{(P-1)\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] \bar{X} + \left[1 - \frac{(P-1)\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] X_i, \quad i = 1, 2, \dots, p(\gamma)$$

در همین مثال فرض کنید برای چگالی پیشین نرمال در نظر گرفته شود یعنی $\theta_i \sim N(\mu, \tau^2)$ برای $i = 1, 2, \dots, P$. آنگاه برآورد بیز برای θ_i در حالت کلی بصورت زیر خواهد بود

$$T^B(X_i) = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right) \mu + \left(\frac{\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right) X_i, \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (A)$$

اثبات:

با استفاده از فرمول و از اینکه و از اینکه خواهیم داشت

$$\pi(\sigma_i | X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(\theta_i - \mu_1)^2}$$

بطوریکه $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}$ و $\mu_1 = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right) \mu + \left(\frac{\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right) X_i$ نتیجه

$$T^B(X_i) = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right) \mu + \left(\frac{\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right) X_i, \quad i = 1, 2, \dots, P$$

اکنون با جایگزین کردن برآوردهای نااریب μ و σ^2 در (A) برآورد بیز تجربی برای θ_i بصورت

$$T^E(X_i) = \left[\frac{(P-3)\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] \bar{X} + \left[1 - \frac{(P-3)\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] X_i, \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (9)$$

بدست خواهد آمد.

با مقایسه برآوردگر بیز تجربی و برآورد بیز خطی تجربی یعنی (۷) و (۹) مشاهده می شود که برای برآورد پارامتر θ در برآورد بیز تجربی باید حداقل از یک نمونه ۴ تایی استفاده

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \text{Var}(\Theta) + E\{\text{Var}(X | \Theta)\} + E\{\text{Var}(X | \Theta)\} \\ &= \text{Var}(\Theta) + E\{a + b\Theta + c\Theta^2\} \\ &= \text{Var}(\Theta) + a + bE(\Theta) + cE(\Theta)^2 \\ &= a + bE(\Theta) + cE^2(\Theta) + (c+1)\text{Var}(\Theta) \end{aligned}$$

و چون $E(X) = E(\Theta)$ بنابراین

$$\text{Var}(X) = a + bE(X) + cE^2(X) + (c+1)\text{Var}(\Theta)$$

و یا

$$\text{Var}(\Theta) = \frac{\text{Var}(X) - [a + bE(X) + cE^2(X)]}{c+1}, \quad c \neq -1$$

اکنون با استفاده از مقادیر مشاهده شده $X_1, X_2, \dots, X_n$ برآوردهای معمولی $E(X)$ و $\text{Var}(X)$ را بدست می آوریم پس

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{و} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

و سرانجام

$$T_G^*(X) = \bar{X} + \left[1 - \frac{cS^2 + a + b\bar{X} + c\bar{X}^2}{(c+1)S^2} \right] (X_i - \bar{X})$$

چنانچه در نمونه تصادفی $(\theta_1, X_1), (\theta_2, X_2), \dots, (\theta_n, X_n)$ برآورد بیز تجربی خطی را برای θ_i بخواهیم، در

این صورت

$$T_G^*(X_i) = \bar{X} + \left[1 - \frac{cS^2 + a + b\bar{X} + c\bar{X}^2}{(c+1)S^2} \right] (X_i - \bar{X}) \quad (6)$$

مثال:

فرض کنید: $X_i \sim N(\theta_i, \sigma^2)$ برای $i = 1, 2, \dots, P$ و σ^2 معلوم باشد. پس برای $i = 1, 2, \dots, P$ داریم $E(X_i | \theta_i) = \theta_i$ و $\text{Var}(X_i | \theta_i) = \sigma^2$. طبق قضیه، $a = \sigma^2$ و $b = c = 0$ و برآورد بیز تجربی خطی برای θ_i

عبارتست از

$$\begin{aligned} T_G^*(X_i) &= \bar{X} + \left[1 - \frac{\sigma^2}{S^2} \right] (X_i - \bar{X}) \\ &= \bar{X} + \left[1 - \frac{(P-1)\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] (X_i - \bar{X}) \end{aligned}$$

شود در صورتیکه در برآوردگر بیز خطی تجربی یک نمونه حداقل ۲ تایی می‌تواند همان اطلاعات را در مورد پارامتر θ در اختیار قرار دهد. بنابراین از این نظر برآوردگر بیز خطی تجربی می‌تواند از برآوردگر بیز تجربی بهتر باشد.

البته می‌توان حالتی را نیز در نظر گرفت که $T(X)$ برحسب X خطی نباشد، اما این خود می‌تواند به عنوان مقاله‌ای دیگر مطرح شده و بنابراین از موضوع این مقاله خارج است.

مراجع

- [1] Herbert Robbins (1983), *The Annals of Statistics*. Vol. 11. No. 3.
- [2] George Cassela (1985), *The American Statistical Association*, May 1985. Vol. 39. No. 2.