

برآوردگرهای UMVU در خانواده‌های لانه‌ای از توزیع‌ها

عبدالحمید رضائی رکن آبادی^۱

چکیده

اغلب وقتی برآوردگر $\delta = \delta(X_1, \dots, X_n)$ در خانواده‌ی توزیع‌های $\mathcal{P}_1$ ، UMVU است، به غلط نتیجه‌گیری می‌شود که در کلاس $\mathcal{P}_2$ که $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ نیز برآوردگری UMVU خواهد بود. در این مقاله نادرستی این نتیجه‌گیری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

UMVU در $\mathcal{P}_1$ ، در $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ هم نااریب است و ممکن است تصور شود در $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ نیز UMVU هست. اما واقعیت چنین نیست و پاسخ سؤال فوق همواره مثبت نیست.

اگر فرض کنیم Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 به ترتیب کلاس‌های همه‌ی برآوردگرهای نااریب θ (میانگین توزیع)، در خانواده‌های $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ باشند، به ازای هر $\delta_1 \in \Delta_1$ ؛ چون δ_1 برآوردگری نااریب برای θ در $\mathcal{P}_1$ است، با فرض $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ داریم:

$$\forall f_1 \in \mathcal{P}_1 \quad E(\delta_1) = \int f_1(\underline{x}) \delta_1(\underline{x}) d\underline{x} = \theta$$

و چون $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ پس:

$$\forall f_2 \in \mathcal{P}_2 \quad E(\delta_1) = \int f_2(\underline{x}) \delta_1(\underline{x}) d\underline{x} = \theta$$

فرض کنید $\mathcal{P}_1$ خانواده‌ی همه‌ی توزیع‌های پیوسته با امید ریاضی متناهی θ ؛ $\mathcal{P}_2$ خانواده‌ی همه‌ی توزیع‌های متقارن حول θ و $\mathcal{P}_3$ خانواده‌ی همه‌ی توزیع‌های نرمال با میانگین θ و واریانس مجهول σ^2 باشند، بدیهی است:

$$\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1. \quad (۱)$$

اگر برآوردگر $\delta^* = \delta^*(X_1, \dots, X_n)$ در کلاس $\mathcal{P}_1$ برآوردگری UMVU برای θ باشد، آیا این برآوردگر در کلاس‌های $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ نیز UMVU است؟ در برخورد اول چنین استنباط می‌شود که پاسخ این سؤال مثبت است. مثلاً اگر فردی کوتاه‌ترین فرد بالغ در کشور بوده و ساکن مشهد باشد؛ قطعاً او کوتاه‌ترین فرد بالغ در استان خراسان و شهر مشهد نیز هست. در اینجا نیز $\mathcal{P}_1$ خانواده‌های $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ را در بر دارد؛ δ^* برآوردگر

^۱ عبدالحمید رضائی رکن آبادی، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

یعنی $\delta_1 \in \Delta_2$. در نتیجه $\Delta_1 \subset \Delta_2$. بطور مشابه می توان نشان داد $\Delta_2 \subset \Delta_3$ و بنابراین:

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3. \quad (2)$$

در حقیقت براساس همین استدلال ثابت می شود که صرف نظر از نوع توزیع، $\bar{X}$ برآوردگری نارایب برای θ (میانگین توزیع) است. در توزیع نرمال، نارایب بودن $\bar{X}$ را برای میانگین توزیع نرمال بدیهی می انگاریم.

مثال زیر نشان می دهد زیرمجموعه ها در رابطه ی (۲) ممکن است، به صورت محض باشند.

• مثال ۱ - با فرض $\delta_0(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ در آن $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ به ترتیب آماره های ترتیبی اول و n ام در یک نمونه ی تصادفی n تایی از توزیع X است، ثابت می شود δ_0 برآوردگری نارایب برای مرکز تقارن هر توزیع پیوسته ی متقارن است ([۱]، تمرین ۵.۳.۱)؛ یعنی $\delta_0 \in \Delta_2$. اما اگر f_1 در P_1 به صورت نمایی

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

فرض شود، به ازای $n = 3$ ، δ_0 برآوردگری اریب برای θ ، میانگین توزیع فوق، است و اریبی آن $\frac{\theta}{3}$ است؛ یعنی $\delta_0 \notin \Delta_1$. پس لااقل عضوی در Δ_2 وجود دارد که در Δ_1 نیست.

براساس رابطه ی (۲) می توان گفت، اصولاً یافتن بهترین برآوردگر در کلاس Δ_2 (مربوط به خانواده توزیع های P_2) مشکلتر از یافتن بهترین برآوردگر در زیرکلاسهای Δ_1 و Δ_2 (مربوط به توزیع های به ترتیب P_2 و P_3) است.

مثالهای زیر منفی بودن پاسخ سؤال مطرح شده در شروع بحث را ثابت می کنند:

• مثال ۲ - $\bar{X}$ برآوردگر UMVU برای θ در خانواده ی P_1 است ([۱]، صفحه ۱۰۲) ولی $\bar{X}$ برآوردگر UMVU برای θ در خانواده ی P_2 نیست زیرا به طور کلی ثابت می شود در کلاس P_2 برآوردگر UMVU برای θ وجود ندارد ([۱]، صفحه ی ۱۳۷، تمرین ۲.۴.۴).

• مثال ۳ - اگر P_4 نیز خانواده ی توزیع های نرمال با میانگین معلوم θ و واریانس مجهول σ^2 باشد؛ بدیهی است، $P_4 \subset P_2$. در خانواده ی P_2 با استفاده از خواص خانواده ی نمایی ثابت می شود آماره ی $(\sum X_i, \sum X_i^2)$ بسنده ی کامل است. پس بنا به قضیه ی لهما شفه برآوردگر نارایب $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ برای σ^2 که تابعی از این آماره ی بسنده ی کامل است، برآوردگری UMVU برای σ^2 است. اما بطور مشابه می توان نشان داد برآوردگر UMVU برای σ^2 در خانواده ی محدودتر P_4 عبارت است از $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \theta_0)^2$ که با S^2 متفاوت است.

هر چند در بحث بالا نتیجه گرفتیم UMVU بودن در خانواده ی بزرگتر، UMVU بودن در زیرخانواده ی کوچکتر از آن را در حالت کلی نتیجه نمی دهد، ولی مسلماً این امکان وجود دارد که یک برآوردگر UMVU در خانواده ی وسیع تر، در زیرخانواده ی کوچکتر از آن نیز UMVU باشد. مثلاً $\bar{X}$ برآوردگری UMVU از میانگین توزیع، هم در خانواده ی P_1 و هم در زیرخانواده ی کوچکتر P_2 است.

مراجع

[1] Lehmann. E. L. *Theory of Point Estimation*, (1983).