توزیع متغیرهای تصادفی مرکب

محمّدحسین علامت‌ساز[۱]

چکیده

هدف اصلی این مقاله، معرفی توزیع متغیرهای تصادفی مرکب تعمیم یافته (یا توزیع مجموعهای متوقف شده‌ی متغیرهای تصادفی)، بررسی خصوصیات توزیعی و بحث در مورد کاربردهای آنهاست. به علاوه، کاربرد این توزیع‌ها در رابطه با خاصیت مهم و معروف بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری مورد توجه قرار گرفته و نتایج مفیدی در این زمینه نشان داده خواهد شد. سرانجام، رابطه‌ی بین توزیع‌های مرکب و توزیع‌های آمیزه‌ای تشریح می‌گردد و نشان داده می‌شود که چگونه می توان یکی را به دیگری تبدیل نمود و نتایج مفیدی به‌دست آورده می‌شود. به‌ویژه، با این روش نتیجه‌ای از علامت‌ساز(۱۹۹۶) در رابطه با بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری توزیع‌های آمیزه‌ای دوجمله‌ای، تعمیم داده می‌شود.

۱ مقدمه

همه با مجموعهای جزیی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (i.i.d)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

آشناهستیم و توزیع و کاربردهای آن را می دانیم. مثلاً، می دانیم که اگر توزیع مشترک X_i ها برنولی با پارامتر p باشد S_n دارای توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{bin}(n,p)$ می باشد و اگر X_iها دارای توزیع مشترک هندسی $\mathrm{Ge}(p)$ باشند، S_n دارای توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{nbin}(n,p)$ خواهد بود. در مورد کاربردهای آن، کافی است به نقش آن در قانون اعداد بزرگ و یا قضیه‌ی حد مرکزی اشاره نمود.

در مقاله‌ی حاضر، با حالت تعمیم یافته‌ی این مجموعهای جزئی از متغیرهای تصادفی i.i.d سر و کار داریم که در آن n، یک عدد ثابت نیست، بلکه خود مشاهده‌ای تصادفی از یک متغیر تصادفی نامنفی N با مقادیر صحیح در نظر گرفته

[۱] دکتر محمّدحسین علامت‌ساز، گروه آمار— دانشگاه اصفهان

می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، متغیرهای مرکب

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (۲)$$

را در نظر می گیریم. S_N را یک متغیر تصادفی مرکب یا تعمیم‌یافته (و یا مجموع متوقف شده‌ای از متغیرهای تصادفی) می‌نامند. فلر (۱۹۴۳) دو واژه‌ی اول و داگلاس (۱۹۷۱) واژه‌ی آخر را ترجیح می دهد. به هر حال چون واژه‌ی اول یعنی «مرکب» در زبان فارسی رایج‌تر است ما نیز خود را به استفاده از آن مقیّد می سازیم.

نمایش نمادین توزیع این متغیرها به شرح زیر که توسط گارلند (۱۹۵۷) ارایه شده است، مورد توافق اکثر آمار دانان است. فرض کنید F_1 نشان‌دهنده‌ی توزیع مشترک X_i ها باشد. در این صورت ، توزیع S_N با نماد $F_1 \vee F_2$ نشان داده می‌شود که آن را «ترکیب توزیع F_1 با F_2» می خوانیم. به عبارت دیگر، داریم :

$$S_N \sim F_1 \vee F_2 \ . \qquad (۳)$$

مثالهای زیادی از موقعیت‌های واقعی وجود دارند که در آنها متغیرهای مرکب رخ می دهند. برای مثال، فرض کنید X_i نشان دهنده‌ی میزان پول (یا وقت) مشتری i ام باشد که در یک فروشگاه صرف می‌کنند و N تعداد تصادفی مشتریان این فروشگاه در روز را نشان دهد. در این صورت، S_N نمایشگر میزان تصادفی پول (یا وقت) است که توسط تمام مشتریان در یک روز در این فروشگاه صرف می شود.

واضح است بسته به این‌که X_i ها گسسته یا پیوسته باشند متغیر مرکب S_N گسسته یا پیوسته خواهد بود. یکی از انواع مشهور توزیع‌های مرکب وقتی رخ می‌دهد که F_2 پوآسون باشد. این توزیع‌ها به توزیع‌های پوآسون مرکب معروفند. به طوری که مثال ۱ از بخش ۲ نشان می‌دهد، به سادگی دیده می‌شود که توزیع دوجمله‌ای منفی نیز یک توزیع پوآسون مرکب است. به عبارت دقیق‌تر، داریم :

$$negative\ binomial = poisson \vee logarithmic \qquad (۴)$$

در حقیقت، خانواده‌ی توزیع‌های پوآسون مرکب غالب توزیع‌های مرکب معروف را در بردارد. توزیع مرکب

$$Poisson(\lambda) \vee Bernulli(p) \quad ; \quad 0 < p < 1 \ , \ \lambda > 0$$

به‌ویژه «در مدلهای خسارت» مورد توجه می باشد. این ترکیب در واقع به توزیع پوآسون با میانگین λp منجر می شود. بعضی مثالهای مهم دیگر توزیع‌های پوآسون مرکب به شرح زیر هستند:

الف) توزیع پوآسون–پاسکال :

$$Poisson(\theta) \vee negative\ binomial(r,p)$$

ب) توزیع نیمن نوع A :

$$Poisson(\lambda) \vee Poisson(\theta)$$

که در آن F_2 توزیع پوآسون انتقال یافته با تکیه گاه $\{1,2,3,\ldots\}$ است. این توزیع به نام توزیع توماس مشهور است.

ج) توزیع پوآسون–دوجمله‌ای :

$$Poisson(\lambda) \vee binomial(n,p)$$

حالت خاص این توزیع مرکب وقتی $n = 2$ باشد، توزیع هرمیت نامیده می‌شود.

د) توزیع پولیا–اپلی :

$$Poisson(\theta) \vee Geometric(p)$$

واضح است که این توزیع حالت خاصی از توزیع مرکب پوآسون–پاسکال است. اینجا، متغیر هندسی به عنوان تعداد آزمایشها تا اولین شکست در نظر گرفته شده است.

توزیع‌های مرکب، به طور عام، و توزیع‌های پوآسون مرکب، به طور خاص، کاربردهای مهمی در توصیف موقعیت‌های واقعی دارند. برای مطالعه‌ی این کاربردها ،مثلاً به جانسون، کوتز و کمپ(۱۹۹۲) مراجعه کنید. توزیع‌های مرکب پوآسون همچنین نقش مهمی در ارتباط با توزیع‌های بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر ایفا می‌کنند. توزیع‌های مرکب برنولی نیز کاربردی اساسی در معرفی توزیع‌های خودتجزیه‌پذیر و پایای گسسته‌ی ون هارن و استیوتال(۱۹۷۹) دارند. این توزیع‌های گسسته نیز بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند. در بخش ۳ به خاصیت بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیري توزیع‌های مرکب پرداخته و نتایج مفیدی به دست خواهدآمد. در بخش ۴، نشان داده می‌شود که چگونه می توان توزیع‌های مرکب را به توزیع‌های آمیزه‌ای و بالعکس تبدیل نمود. سپس با استفاده از آن نتیجه‌ای از علامت‌ساز(۱۹۹۶) در این زمینه را تعمیم خواهیم داد.

سرانجام، در اینجا لازم است خاطر نشان شود که همانند حالت فرایندهای خسارت که قبلاً ذکر شد، مجموع‌های متوقف شده‌ی متغیرهای تصادفی (۲) در فرایندهای تصادفی نیز کاربرد مشابهی دارند. فرایند تصادفی

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad , \quad t \geq 0 \qquad (۵)$$

را که در آن X_i ها متغیرهای تصادفی i.i.d و $N(t)$ یک فرایند شمارشی مستقل از X_i ها است، یک فرایند تصادفی مرکب می‌گویند. فرآیندهای پوآسون مرکب(یعنی وقتی که $N(t)$ در (۵) یک فرآیند پوآسون باشد) از توجه خاصی برخوردارند (مثلاً به راس(۱۹۹۶) مراجعه کنید). در میان دیگران، اخیراً علامت‌ساز و لین(۱۹۹۸) در مورد خاصیت مهم خودمشابهي این فرآیندهای مرکب تحقیق کرده و شرایطی را که تحت آنها $Y(t)$ می‌تواند به نوعی خودمشابه باشد به دست آورده‌اند. خودمشابهی، نقش مهمی در تحلیل داده‌ها دارد. برای توصیف کامل این نوع فرآیندها، علامت‌ساز(۱۳۷۶) را ملاحظه نمایید.

۲ توزیع S_N

فرض کنید $M(t)$ و $M_2(t)$ به ترتیب توابع مولد گشتاورهای (m.g.f) S_N و X_i و $G_1(z)$ تابع مولد احتمال (p.g.f) متغیر تصادفی N باشد. آنگاه، واضح است که با توجه به خواص امید ریاضی شرطی داریم :

$$\begin{aligned} M(t) &= E\{e^{tS_N}\} \\ &= E\{E(e^{tS_N}|N\} \\ &= E\{\prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})\} \\ &= E\{[M_2(t)]^N\} \\ &= G_1[M_2(t)] \end{aligned} \qquad (۶)$$

بدیهی است که اگر F_2 نیز توزیع گسسته‌ای با تکیه گاه اعداد صحیح نامنفی و تابع مولد احتمال $G_2(z)$ باشد،آنگاه S_N متغیری گسسته با p.g.f

$$G(z) = G_1[G_2(z)] \qquad (۷)$$

خواهد بود.

لازم است خاطر نشان کنیم که داگلاس(۱۹۸۰) حالتی را که در آن F_1 نیز پیوسته است در نظر می‌گیرد. امّا، در این حالت مسلماً مُدل، معنای فیزیکی خود را از دست می دهد.

مثال ۱ — توزیع مرکب

$$Poisson(-r\ln p) \vee logarithmic(1-p) \quad ; \quad 0 < p < 1$$
$$r > 0$$

را در نظر بگیرید. در این صورت ، داریم :

$$G_1(z) = e^{(-r\ln p)(z-1)} \quad و \quad G_2(z) = \frac{\ln(1-qz)}{\ln p};$$
$$q = 1-p$$

در نتیجه بنابر (۷) به دست می آوریم:

$$G(z) = \exp\{-r\ln p[\frac{\ln(1-qz)}{\ln p} - 1]\}$$

$$\begin{aligned} &= \exp\{-r\ln[\frac{1-qz}{p}]\} \\ &= (\frac{1-qz}{p})^{-r} \qquad ; \qquad |z|<\frac{1}{q} \end{aligned}$$

که آن p.g.f توزیع دوجمله‌ای منفی $\mathrm{nbin}(r,p)$ است ($r>0$ لازم نیست عدد صحیح باشد). و این رابطه‌ی (۴) را تأیید می‌کند.

برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس S_N مشابه با روابط (۶) مجدداً می توان از خاصیت امید ریاضی شرطی سود جست و یا مستقیماً با مشتق گیری از تابع مولد گشتاورهای (۶) در نقطه‌ی $t=0$ به دست آورد :

$$\begin{aligned} E(S_N) &= E[NE(X_1)] = E(X_1)\,E(N) \qquad (8) \\ E(S_N^2) &= E[N(N-1)E^2(X_1) + NE(X_1^2)] \\ &= E(N)\,Var(X_1) + E(N^2)E^2(X_1) \end{aligned}$$

و در نتیجه :

$$Var(S_N) = E(N)\,Var(X_1) + E^2(X_1)\,Var(N) \qquad (9)$$

معادله‌ی (۸) در واقع حالت خاصی از «معادله‌ی والد» است.

مثال ۲ — یک سیستم صف M/M/1 را در نظر بگیرید؛ یعنی سیستمی که دارای یک سرویس‌دهنده است، N، تعداد مشتریهای ورودی آن در طول روز که از توزیع پوآسون با نرخ λ پیروی می کند و X_i، طول زمان سرویس مشتری i ام، که دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ است. در این صورت، متغیر تصادفی مرکب $S_N=\sum_{i=1}^{N} X_i$ نشان دهنده‌ی طول کل دوره‌ی زمانی تصادفی است که این سرویس دهنده در روز مشغول خواهدبود. پس داریم:

$$S_N \sim Poisson(\lambda) \vee \exp(\mu)$$

و در نتیجه بنابر روابط (۶)، (۸) و (۹) میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاورهای زمان اشتغال سرویس دهنده عبارت خواهند بود از :

$$\begin{aligned} E(S_N) &= (\lambda).\frac{1}{\mu} = \lambda/\mu \\ Var(S_N) &= \lambda.\frac{1}{\mu^2} + (\frac{1}{\mu})^2\lambda = \frac{2\lambda}{\mu^2} \\ M(t) &= G_1[\frac{\mu}{\mu-t}] : \quad t<\mu \\ &= \exp\{\lambda[\frac{\mu}{\mu-t}]\} ; \quad t<\mu \\ &= \exp\{\frac{\lambda t}{\mu-t}\} ; \quad t<\mu . \qquad (10) \end{aligned}$$

لازم به تذکر است که اگر تعداد مشتریهای این سیستم در طول روز ثابت و مثلاً $N=n$ باشد، آنگاه $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع گامای $\gamma(n,\mu)$ بوده و در این صورت کمیت‌های بالا در (۱۰) به ترتیب به صورتهای متفاوت n/μ، n/μ^2 و $M(t)=(\frac{\mu}{\mu-t})^n$، $t<\mu$ در خواهند آمد.

۳ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری

خانواده‌ی بزرگ و معروفی از توزیع‌ها، توزیع‌های بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند. متغیر تصادفی X با تابع مولد گشتاورهای $M(t)$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است؛ اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح و مثبت n تابع مولد گشتاورهایی چون $M_n(t)$ موجود باشد به طوری که برای $t\in\Re$ بتوان نوشت:

$$M(t) = [M_n(t)]^n . \qquad (11)$$

به عبارت دیگر، $M(t)$ یک m.g.f بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $n\in\mathbf{N}$، $M_n(t)=[M(t)]^{1/n}$ نیز یک m.g.f باشد. به طور مشابه، برحسب p.g.f، متغیر تصادفی X بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر $G_n(z)=[G(z)]^{1/n}$ برای هر $n\in\mathbf{N}$ یک p.g.f باشد. حال یک توزیع پوآسون مرکب دلخواه با نرخ λ را در نظر بگیرید. m.g.f آن عبارت است از :

$$M(t) = G_1[M_2(t)] = \exp\{\lambda[M_2(t)-1]\}.$$

پس، برای هر $n\in\mathbf{N}$،

$$[M(t)]^{1/n} = \exp\{\frac{\lambda}{n}[M_2(t)-1]\} = M_n(t)$$

یک m.g.f است (در واقع، تابع مولد گشتاورهای یک توزیع پوآسون مرکب با پارامتر λ/n است). بنابراین، هر توزیع پوآسون مرکب، گسسته یا پیوسته، بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است. به علاوه، در حالت توزیع‌های بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر با تکیه‌گاه N می‌توان نشان داد که عکس این مطلب نیز صحت دارد. یعنی داریم :

قضیه ۱ — یک توزیع گسسته با تکیه‌گاه N بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر یک توزیع پوآسون مرکب باشد. برای اثباتی مقدماتی در مورد عکس این قضیه، فلر(۱۹۷۵) را ملاحظه کنید. دِفِنیتی (۱۹۳۱)، به طور کلی‌تر، ثابت می‌کند که :

قضیه ۲ — هر توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر یا یک توزیع پوآسون مرکب است و یا صورتی حدی از چنین توزیع‌هایی است.

حال فرض پوآسون بودن توزیع F_1 را حذف کرده و تنها به خاصیت بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری آن بسنده می‌کنیم. یعنی این بار فرض کنید F_1 یک توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد. در این صورت، بنابر تعریف برای هر $n \in \mathrm{N}$، $G^{1/n}(z)$ یک p.g.f است. در نتیجه :

$$M^{1/n}(t) = G_1^{1/n}[M_2(t)]$$

نیز برای هر $n \in \mathrm{N}$ یک m.g.f است (در واقع، m.g.f یک متغیر مرکب). بنابراین، در این حالت نیز توزیع مرکب $F_1 \vee F_2$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است. بالعکس، فرض کنید توزیع مرکب $F_1 \vee F_2$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد و فرض کنید که $z = M_2(t)$ تابعی یک به یک از t باشد به طوری که $t = M_2^{-1}(z)$ به طور منحصر به فرد موجود باشد. در این صورت از (٦) داریم :

$$M[M_2^{-1}(z)] = G_1(z)$$

و در نتیجه، برای هر $n \in \mathrm{N}$، می توان نوشت :

$$G_1^{1/n}(z) = M^{1/n}[M_2^{-1}(z)] \cdot \qquad (۱۲)$$

اما $M^{1/n}$ بنابر فرض یک m.g.f است، پس طرف راست (۱۲) نیز یک m.g.f بوده و در نتیجه $G_1^{1/n}(z)$ یک p.g.f خواهد بود. بنابراین توزیع F_1 بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است. بدین ترتیب قضیه‌ی زیر را اثبات کرده‌ایم.

قضیه ۳ — اگر F_1 بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد، توزیع مرکب $F_1 \vee F_2$ نیز بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر خواهد بود. بالعکس، اگر $F_1 \vee F_2$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد و F_2 دارای m.g.f یک به یک باشد، آنگاه F_1 نیز بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر خواهد بود.

قضیه‌ی ۳ را می توان به این صورت نیز بیان کرد که اگر F_2 دارای m.g.f یک به یک باشد، $F_1 \vee F_2$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر F_1 بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد.

فرع ۱ — تمام توزیع‌های مرکب هندسی بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند.

اثبات — چون F_1 هندسی است و این توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است، نتیجه بلافاصله از قضیه‌ی ۳ حاصل می شود.

فرع ۲ — فرض کنید F_2 توزیع دوجمله‌ای $bin(m,p)$ باشد که در آن m، یک عدد صحیح مثبت فرد است. $F_1 \vee F_2$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر، F_1 بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد.

اثبات — چون تابع مولد گشتاورهای توزیع $bin(m,p)$ با m فرد، تابعی یک به یک است، نتیجه بلافاصله از قضیه‌ی ۳ حاصل می‌شود.

۴ ارتباط توزیع‌های مرکب با توزیع‌های آمیزه‌ای

هرگاه F_1 به پارامتر (یا پارامترهایی) چون θ وابسته باشد که در آن θ خود مشاهده‌ای از یک متغیر تصادفی Θ با توزیع F_2 است، توزیع حاصل را که با نماد $F_1 \bigwedge_{\Theta} F_2$ نشان می دهیم آمیزه توزیع F_1 با توزیع F_2 می خوانیم. مثلاً اگر در توزیع $bin(N,p)$، N متغیری تصادفی با توزیع پوآسون با پارامتر λ باشد توزیع حاصل عبارت است از:

$$bin(N,p) \vee Poisson(\lambda).$$

حال توزیع مرکب $F_1 \vee F_2$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که F_2 توزیع برنولی با پارامتر p باشد. در این صورت، بدیهی است که داریم:

$$S_N \sim bin(N,p)$$

که در آن N خود یک متغیر تصادفی است. به عبارت دیگر، توزیع مرکب:

$$F_1 \vee Bernulli(p)$$

با توزیع آمیزه‌ای

$$bin(N,p) \bigwedge_N F_1$$

معادل است. اما چون $F_2 = Bernulli(p) = bin(1,p)$، که در آن $1 = m$ فرد است، نتیجه‌ی زیر از علامت‌ساز(۱۹۹۶) را به عنوان نتیجه‌ای از فرع ۲ از بخش ۳ به دست می آوریم.

فرع ۳ — توزیع آمیزه‌ای دوجمله‌ای $bin(N,p)$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است اگر و فقط اگر، متغیر آمیزنده‌ی آن، N، بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد.

استدلال بالا را به سهولت می توان عمومیت داد و تمام توزیع‌های مرکب را به صورت توزیع‌های آمیزه‌ای درآورد.

فرض کنید F_1 و F_2 و F_3 به ترتیب توزیع‌های N، X_i و S_n(برای $n = N$ داده شده) باشند. آنگاه توزیع مرکب $F_1 \vee F_2$ با توزیع آمیزه‌ای $F_3 \bigwedge_N F_1$ معادل است. یعنی داریم:

$$F_1 \vee F_2 = F_3 \bigwedge_N F_1.$$

حال سؤالی که بلافاصله مطرح می شود این است که آیا برعکس هم می توان عمل کرد، یعنی آیا می‌توان یک توزیع آمیزه‌ای را به یک توزیع مرکب معادل تبدیل کرد؟ گارلند(۱۹۵۷) پاسخ این سؤال را در قضیه‌ای به صورت زیر ارایه می‌دهد.

قضیه ۴ — فرض کنید F_1 و F_2 توزیع‌های گسسته ای با تکیه‌گاه $\mathbb{N}$ و توابع مولد احتمال G_1 و G_2 باشند. اگر G_2 به پارامتری چون ϕ به گونه‌ای وابسته باشد که برای هر $k \in \mathbb{N}_0$ داشته باشیم:

$$G_2(z;k\phi) = [G_2(z;\phi)]^k \qquad (۱۳)$$

آنگاه:

$$F_2 \bigwedge_k F_1 = F_1 \vee F_2$$

اثبات این قضیه به سادگی با استفاده از شرط (۱۳) به صورت زیر می باشد. فرض کنید

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned} G(z;\phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k G_2(z;k\phi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k [G_2(z;\phi)]^k \\ &= G_1(G_2(z;\phi)). \end{aligned}$$

پس چون p.g.f های توزیع دوجمله‌ای، پوآسون و دوجمله ای منفی شرط (۱۳) را برقرار می کنند. نتیجه می‌گیریم که تمام آمیزه‌های گسسته‌ی توزیع‌های پوآسون ، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی را می توان به صورت توزیع‌های مرکب معادل در نظر گرفت.

مثال ۳ — توزیع آمیزه‌ای

$$bin(nK,p) \underset{K}{\bigwedge} Poisson(\theta)$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم :

$$P(X=x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nk)! p^x q^{nk-x}}{x!(nk-x)!} \cdot \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$$

و

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nk)! p^x q^{nk-x}}{x!(nk-x)!} \cdot \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (q+pz)^{nk} \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [(q+pz)^n]^k \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} \\
&= e^{\theta}[(q+pz)^n - 1] \\
&= G_1[G_2(z)] \qquad (14)
\end{aligned}$$

که در آن G_1 تابع مولد احتمال توزیع $Poisson(\theta)$ و G_2 تابع مولد احتمال توزیع $bin(n,p)$ است. به عبارت دیگر، (۱۴) نتیجه می‌دهد که :

$$bin(nK,p) \underset{K}{\bigwedge} Poisson(\theta) = Poisson(\theta) \vee bin(n,p) \cdot$$

مراجع

[۱] علامت‌ساز، م.ح. (۱۳۷۶) ، فرایندهای خودمشابه، اندیشه آماری ، سال دوّم ، شماره ۲، ۳۱ — ۳۵.

[2] Alamatsaz, M. H. (1996). *Preservation Properties of binomial mixtures*, Pak. J. Statist. 12(2).

[3] Alamatsaz, M. H. and Y. Xia Lin (1998). *Self-similarygty under compounding*, Pak. J. Statist. 14(1).

[4] De Finette B. (1931). *Le funzioni caratteristiche di legge instantanea dotate di valori eccerionali*, Atti della Reale Academia Narionale dei Lincei, Serie VI 14 259-65.

[5] Douglas J. B. (1971). *Stirling numbers in descrete dist's. Statistical Ecology 1: spatial patterns and statistical distributions*, 69-98. University Park, Pennsylvania State University Press.

[6] Douglas J. B. (1980). *Analysis with standard contagious dist's. Brutonsville, MD: International Co-operative*,. Publishing House.

[7] Feller W. (1943). *On a general class of contagious dist's*. Annals Math. Statist. 14, 389-400.

[8] Feller W. (1957), *An Introduction to Probability theory and its applications"*, 1, New York, Wiley.

[9] Gurland J. (1957), *Some interrelations among Compond and generalized dist's*, Biometrika, 44, 265-268.

[10] Johnson N. L., S. Kotz, and A. M. Kemp (1992), *Univariate discrete distributions.*, 2nd ed., New York, Wiley.

[11] Khatri C. G., and I. R. Patel (1961), *Three classes of univariate dist's*, Biometrics, 17, 567-575.

[12] Ross Sh. M. (1996), *Stichastic Processes*, 2nd ed., New York, Wiley.

[13] Steutel F. W., and K. Van Harn (1979), *Discrete analogues self-decomposability and stability*, Ann. Prob. 7, No. 5, 893-899.

تعداد مقالات و کتب منتشر شده توسط آمارشناسان معروف

نام	سال ۱	سال ۲	سال ۳	سال ۴	سال ۵	سال ۶	سال ۷	جمع ۷ سال اول	جمع ۲۰ سال اول	کل	
اولر	۱	۲	۵	۱	۱	۰	۰	۱۰	۴۱	۵۶۰	
توکی	۲	۲	۲	۱	۲	۰	۱	۱۰	۹۵	۳۹۶	†
فیشر	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۲	۹	۹۴	۲۹۴	
رابینز	۱	۰	۲	۰	۱	۴	۱	۹	۴۳	۱۳۳	†
لِهمَن	۱	۳	۱	۲	۵	۵	۳	۱۰	۴۸	۱۲۲	†
باکس	۲	۰	۱	۱	۱	۲	۴	۱۱	۶۱	۱۲۰	†

نقل از مقاله:

" **Publication Delays in Statistics Journals** "

E. T. Bradlow, H. Wainer, Chance, Vol. II-No. 1 (1998)