

## مدلسازی و آینده‌نگری مینیم و ماکسیم درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان

منوچهر خردمندنیا\*

### چکیده

در این مقاله برای مینیم و ماکسیم درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان، یک مدل آنالیز کواریانس تعیین می‌کنیم. پس از بررسی مدل از لحاظ درستی فرضها، با استفاده از آن مقادیر آینده را تا سال ۱۳۸۰ پیش‌بینی می‌کنیم. مدل تعیین شده شامل یک متغیر توضیحی رسته‌ای دو سطحی با سطوح مینیم (۱) و ماکسیم (۲)، و تعداد معدودی متغیرهای توضیحی سینوسی - کسینوسی است. برای تعیین مؤلفه‌های سینوسی-کسینوسی معنی‌دار، با استفاده از دوره‌نگار، ترتیب اهمیت همسازها را در هر یک از دو سطح تعیین می‌کنیم. سپس با جستجو در بین چند همساز مهم اول، چرخه‌های معنی‌دار پنهان را پیدا می‌کنیم. الگوریتم موفقی که در این مقاله برای مدلسازی ارائه شده است برای هر سری دو سطحی تناوبی مشابه دیگری کاربرد دارد.

در یک چرخه کامل از همساز تمام را دوره تناوب همساز تمام می‌نامند که برابر  $1/f_i = n/i$  است. اگر  $n$  فرد باشد، آنگاه  $q = (n-1)/2$  و ضرایب  $a_0, a_i, b_i$  که ضرایب فوریه نامیده می‌شوند از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$$

$$\begin{cases} a_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t C_{it} \\ b_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t S_{it} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4)$$

اگر  $n$  زوج باشد، آنگاه  $q = n/2$  و به استثنای دو ضریب  $a_q$  و  $b_q$ ، بقیه ضرایب از روابط فوق به دست می‌آیند. در حالتی که  $n$  زوج است دو ضریب  $a_q$  و  $b_q$  از روابط زیر تعیین می‌شوند:

### ۱ تحلیل دوره‌نگار

یک سری زمانی  $\{Z_t\}_{t=1}^n = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$Z_t = a_0 + h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_q(t) \quad (1)$$

که در آن

$$h_i(t) = a_i C_{it} + b_i S_{it} \quad (2)$$

همساز تمام نامیده می‌شود. در رابطه اخیر

$$C_{it} = \text{Cos}(2\pi f_i t) \quad , \quad S_{it} = \text{Sin}(2\pi f_i t) \quad (3)$$

که در آن  $f_i = i/n$  فراوانی همساز تمام نامیده می‌شود. تعداد مشاهدات

\* دکتر منوچهر خردمندنیا، گروه آمار دانشگاه اصفهان

یک جدول آنالیز واریانس،  $I(f_i)$  در واقع مجموع توان دوم متناظر با همساز تمام است (به [۱] نگاه کنید). فرض کنید که

$$I(f_k) = \max\{I(f_1), I(f_2), \dots, I(f_q)\}. \quad (۹)$$

در این صورت اگر بخواهیم امکان تقریب زدن سری زمانی  $\{Z_t\}$  را فقط با یک همساز بررسی کنیم، مدل (۶) یک مدل آزمایشی مناسب است. اگر بخواهیم امکان تقریب زدن سری را با دو همساز بررسی کنیم مدل

$$Z_t = a_0 + h_k(t) + h_\ell(t) + e_t \quad (۱۰)$$

یک مدل آزمایشی مناسب است، که در آن برای تعیین  $\ell$  ابتدا  $I(f_\ell)$  را تعیین می‌کنیم.  $I(f_\ell)$  ماکسیمم  $I(f_i)$  ها بدون در نظر گرفتن  $I(f_k)$  است.

هر چند نمایش فوریه یک سری زمانی مقوله‌ای صرفاً ریاضی است ولی تعیین آن تعداد معدود از همسازها که تقریب خوبی به دست می‌دهند یک مقوله آماری است. به زبان آماری مقصود از مدلسازی فوریه تعیین همسازهایی است که نقش معنی‌داری در تغییرپذیری سری دارند. هر روش

معقولی که برای تعیین همسازهای معنی‌دار به کار برده شود، مستلزم جستجو در بین چند همساز مهم اول است. با استفاده از دوره‌نگار به سهولت

می‌توان اهمیت همسازها و در نتیجه چند همساز مهم اول را تعیین کرد.

یک روش ساده و مؤثر در الگوسازی فوریه به این ترتیب است که همسازها را به ترتیب اهمیت یکی‌یکی به مدل اضافه کنیم و پارامترهایی را که تفاوت معنی‌دار با صفر ندارند، حذف کنیم. عمل افزودن همسازهای جدید را

تا جایی ادامه می‌دهیم که به همساز برسیم که هر دو مؤلفه کسینوسی و سینوسی آن نقش معنی‌داری در تغییرپذیری سری نداشته باشند. در اینجا

عمل افزودن همساز جدید را متوقف نموده مدل آخری را به عنوان یک مدل آزمایشی مناسب کاندید می‌کنیم. بالاخره مدل آزمایشی را از لحاظ درستی

فرضها مورد بررسیهای همه‌جانبه قرار داده در صورت لزوم تعدیلهایی در آن انجام می‌دهیم تا به مدلی برسیم که از مرحله بررسی درستی فرضها نیز

موفق بیرون آید. در آزمونهای فرض برابری ضرایب فوریه با صفر، هرچه که سطح معنی‌دار بودن را کوچکتر بگیریم مدل کوچکتری به عنوان مدل نهایی

آزمایشی تعیین خواهد شد. تجارب مدلسازی فوریه حاکی از آن است که برای سریهایی که دارای یک روند آشکار تناوبی هستند، سطح معنی‌دار

$\alpha = 0.01$  معمولاً منجر به مدل معقولی می‌شود که به طور متعادلی اصل کمترین توانهای دوم و اصل امساک را ارضاء نموده از مرحله بررسی درستی

فرضها نیز با موفقیت عبور می‌کند. برای توضیحات نظری بیشتر راجع به تحلیل دوره‌نگار و مدلسازی فوریه به خردمندیا (۱۳۷۶) مراجعه کنید. در

این مرجع همچنین یک برنامه مینی‌تب برای محاسبات مربوط به دوره‌نگار ارائه شده و چگونگی استفاده از دستور GLM در مینی‌تب برای برآورد پارامترهای یک مدل خطی توضیح داده شده است.

$$a_q = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (-1)^t Z_t, \quad b_q = 0. \quad (۵)$$

اگر یک سری زمانی از جمع یک مؤلفه تصادفی و یک مؤلفه تناوبی تشکیل شده باشد، تحت شرایطی کلی که معمولاً برقرار است، جمع تعداد معدودی از  $q$  همساز ممکن، تقریب خوبی برای توصیف آن سری تلقی می‌شود. به عنوان مثال فرض کنید که همساز تمام به تنهایی تقریب خوبی برای سری  $\{Z_t\}_{t=1}^n$  باشد. در این صورت می‌توان نوشت

$$Z_t = a_0 + a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{n} t\right) + e_t \quad (۶)$$

که در آن  $e_t$  مجموع  $q-1$  همساز دیگر است. رابطه (۶) را یک مدل فوریه گوئیم. مدل فوریه در واقع یک مدل رگرسیون است. به سهولت می‌توان نشان داد که برآورد کمترین توانهای دوم  $a_0, a_k, b_k$  از روابطی که در (۴) و (۵) داده شده به دست می‌آیند. رابطه (۱) را نمایش فوریه یک سری زمانی گوئیم که آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$Z_t = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \cos 2\pi \frac{i}{n} t + b_i \sin 2\pi \frac{i}{n} t). \quad (۷)$$

با در نظر گرفتن (۷) به عنوان یک مدل رگرسیون که در آن  $e_t = 0$  به سهولت می‌توان نشان داد که برآورد کمترین توانهای دوم  $a_0, a_i, b_i$  ها از روابط (۴) و (۵) به دست می‌آیند. توجه کنید که اگر  $q$  زوج باشد، آنگاه  $q = n/2$  و  $b_q = 0$  و ضرایب فوریه عبارت‌اند از  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n/2-1}, a_{n/2}, b_1, b_2, \dots, b_{n/2-1}$  که تعداد آنها  $n$  است و اگر  $q$  فرد باشد، آنگاه  $q = (n-1)/2$  و ضرایب فوریه عبارت‌اند از  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{(n-1)/2}, b_1, b_2, \dots, b_{(n-1)/2}$  که تعداد ضرایب برابر  $n$  یعنی برابر طول بردار پاسخ است.

تعیین تعداد معدودی از همسازها که از جمع آنها تقریب خوبی برای یک سری زمانی به دست آید مدلسازی فوریه نامیده می‌شود. یک ابزار مؤثر و مفید در مدلسازی فوریه، دوره‌نگار است. دوره‌نگار شامل  $q$  مقدار  $I(f_1), I(f_2), \dots, I(f_q)$  است. اگر  $n$  فرد باشد، آنگاه

$$I(f_i) = \frac{n}{4} (a_i^2 + b_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (۸)$$

اگر  $n$  زوج باشد، آنگاه برای  $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$  مقادیر  $I(f_i)$  از رابطه فوق به دست می‌آیند ولی برای  $i = q$  داریم  $I(f_q) = na_q^2$ ، که در آن  $a_i$  ها و  $b_i$  ها ضرایب فوریه هستند. نموداری که مقادیر  $I(f_i)$  را در مقابل  $i$  نشان دهد دوره‌نگار، نامیده می‌شود. با استفاده از دوره‌نگار، ترتیب اهمیت همسازها را می‌توان تعیین کرد. مقصود از اهمیت یک همساز، سهمی است که آن همساز از کل تغییرپذیری دارد. با در نظر گرفتن (۷) به عنوان یک الگوی رگرسیون که در آن  $e_t = 0$  می‌توان نشان داد که در

## ۲ مدل‌سازی سری دو سطحی مورد بررسی

مینیم مطلق و ماکسیم مطلق درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان از فروردین ۱۳۶۵ لغایت اسفند ۱۳۷۴ در جدول (۱) ملاحظه می‌شود. این داده‌ها با استفاده از سالنامه‌های آماری که همه ساله توسط مرکز آمار ایران منتشر می‌شود به دست آمده است. ارقام مربوط به بهمن و اسفند ۷۲ در سالنامه مربوطه گزارش نشده است. در جدول (۱) موارد گزارش نشده را با علامت \* مشخص نموده‌ایم. با نگاهی اجمالی به جدول (۱) ملاحظه می‌کنیم که بسیاری از داده‌های مربوط به دو سال ۷۳ و ۷۴ با داده‌های سالهای قبل ناهمخوانی دارند. در بررسیهایی که به عمل آمد معلوم شد که از فروردین ۷۳ مسئولیت اندازه‌گیری درجه حرارت هوای اصفهان به ایستگاه هواشناسی دیگری که از لحاظ شرایط محیطی و ارتفاع، تفاوت‌های قابل توجهی با ایستگاه هواشناسی قبلی دارد واگذار شده است. با توجه به این موارد تصمیم گرفتیم که مدل‌سازی را بر اساس داده‌های مربوط به هشت سال ۶۵-۷۲ قرار دهیم. در تجزیه و تحلیل‌های مقدماتی داده‌های هشت ساله مذکور سه مورد مینیم بهمن ۷۰، ماکسیم بهمن ۷۰ و ماکسیم اسفند ۷۰ به عنوان داده‌هایی پرت یا مشکوک تلقی شدند. داده‌های پرت و گزارش نشده را به عنوان داده‌های مفقود تلقی نموده با دستور GLM مینی‌تب و براساس مدل (۱۱) آنها را برآورد کردیم. به این ترتیب مقادیر مینیم بهمن ۷۰، مینیم بهمن ۷۲، مینیم اسفند ۷۲، ماکسیم بهمن ۷۰، ماکسیم اسفند ۷۰، ماکسیم بهمن ۷۲ و ماکسیم اسفند ۷۲ به ترتیب برابر  $-۶/۲$ ،  $-۶/۲$ ،  $-۲/۵$ ،  $۱۶/۵$ ،  $۲۰/۳$  و  $۱۶/۵$  و  $۲۰/۳$  برآورد گردید. این هفت عدد را به جای هفت مورد فوق‌الذکر قرار داده فرآیند مدل‌سازی را براساس سری حاصله قرار دادیم. دستور GLM مینی‌تب از جمله دستوراتی است که اجازه می‌دهد تعدادی از داده‌ها مفقود باشند. در مینی‌تب یک داده مفقود با علامت \* مشخص می‌شود. با توجه به ویژگیهای آشکار، سری مورد بررسی (نمودار ۱) که دو سطحی است و دارای یک دوره تناوب آشکار ۱۲ است، مدل آنالیز کواریانس (۱۱) یک مدل آزمایشی اولیه معقول به نظر می‌رسد.

$$y_{jt} = \mu + \lambda_j + a_{\lambda} \cos\left(2\pi \frac{\lambda}{96} t\right) + b_{\lambda} \sin\left(2\pi \frac{\lambda}{96} t\right) + e_{jt} \quad (11)$$

که در آن  $\lambda_j = 0$ ،  $\sum_{j=1}^2 \lambda_j = 0$ ،  $(j = 1, 2)$ ،  $(t = 1, 2, \dots, 96)$ . پارامتر  $\mu$ ، یک میانگین عمومی است، پارامتر  $\lambda_1 = -\lambda_2$  برای به حساب آوردن دو سطح مینیم و ماکسیم است و همساز هشتم یعنی  $h_{\lambda}(t) = a_{\lambda} C_{\lambda t} + b_{\lambda} S_{\lambda t}$  برای به حساب آوردن فروانی آشکار  $\frac{\lambda}{96} = \frac{1}{13}$  است. در (۱۱) به جای  $\lambda_j$  می‌توانیم عبارت  $\lambda(-1)^j$  را قرار دهیم. واضح است که  $\sum_{j=1}^2 (-1)^j \lambda = 0$ . با استفاده از دستور GLM مینی‌تب، مدل برازش شده به صورت زیر به دست می‌آید

$$y_{jt} = \underset{(0)}{16,58} + \underset{(0)}{(-1)^j 11,36} - \underset{(0)}{7,67} \cos\left(2\pi \frac{\lambda}{96} t\right) + \underset{(0)}{9,61} \sin\left(2\pi \frac{\lambda}{96} t\right) + e_{jt} \quad (12)$$

که در آن  $\hat{\sigma}^2 = 4$ ،  $R^2 = 0,9825$  و  $R_a^2 = 0,9822$ . مقادیر  $R^2$  و  $R_a^2$  هر یک به نحوی میزان موفقیت مدل را نشان می‌دهند (نگاه کنید به [۳]). اعدادی که در داخل پرانتز، زیر برآورد پارامترها نوشته شده است، مقادیر احتمال برای آزمون فرض برابری ضریب فوریه با صفر است. با توجه به اینکه در هر چهار مورد مقدار احتمال برابر صفر است، هر یک از فرض‌های صفر  $\mu = 0$ ،  $\lambda = 0$ ،  $a_{\lambda} = 0$  و  $b_{\lambda} = 0$  با قاطعیت رد می‌شود.

اکنون امکان بهبود مدل (۱۲) را از جهات مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از جهاتی که می‌بایست بررسی شود، بررسی معنی‌دار بودن اثر متقابل بین متغیر توضیحی رسته‌ای و متغیرهای توضیحی غیررسته‌ای است. به عبارت دیگر بررسی این فرض که ضریب  $C_{\lambda t}$  در دو سطح مینیم و ماکسیم تفاوت معنی‌دار دارند و نیز بررسی این فرض که ضریب  $S_{\lambda t}$  در دو سطح مینیم و ماکسیم به طور معنی‌داری متفاوت‌اند. مدل زیر فرض می‌کند که اثرات متقابل وجود دارند.

$$y_{jt} = \mu + (-1)^j \lambda + (a_{\lambda} + (-1)^j a) C_{\lambda t} + (b_{\lambda} + (-1)^j b) S_{\lambda t} + e_{jt} \quad (13)$$

مدل برازش شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_{jt} = \underset{(0)}{16,58} + \underset{(0)}{(-1)^j 11,36} - \underset{(0)}{(7,67 + (-1)^j 0,28)} C_{\lambda t} + \underset{(0,158)}{(9,61 - (-1)^j 0,24)} S_{\lambda t} + e_{jt} \quad (14)$$

مقدار احتمال برای آزمون فرض‌های صفر عدم وجود اثر متقابل یعنی فرض‌های  $a = 0$  و  $b = 0$  به ترتیب  $0,158$  و  $0,903$  به دست می‌آید. لذا فرض عدم وجود اثر متقابل پذیرفته می‌شود. جهت دیگری که برای بهبود مدل (۱۲) می‌بایست مورد بررسی قرار گیرد یافتن چرخه‌های معنی‌دار پنهان دیگری است که احتمالاً در باقیمانده‌های مدل (۱۲) وجود دارند. در نمودارهای (۳) و (۴)، دوره‌نگار باقیمانده‌های مدل (۱۲) به تفکیک دو سطح مینیم و ماکسیم ملاحظه می‌شوند. براساس این نمودارها پنج همساز مهم اول مربوط به باقیمانده‌های سطح مینیم به ترتیب اهمیت عبارت‌اند از: هفتم، شانزدهم، بیست و نهم، یکم و نهم؛ و در مورد سطح ماکسیم به ترتیب اهمیت عبارت‌اند از: هفتم، شانزدهم، بیست و هفتم، بیست و یکم و دهم. ملاحظه می‌شود که دو همساز هفتم و شانزدهم، بعد از همساز هشتم مهمترین همسازهایی هستند که احتمال دارد حضور

جدول (۱) مینیم مطلق و ماکسیم مطلق درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان ۶۵-۷۴

سال ماه	مینیم									
	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴
۱	۶٫۶	۲٫۶	۳٫۰	۱٫۰	-۲٫۱	۵٫۰	-۰٫۸	-۱٫۶	۱٫۴	-۲٫۴
۲	۸٫۶	۱۱٫۵	۱۱٫۶	۸٫۰	۹٫۲	۱۰٫۰	۸٫۰	۸٫۴	۵٫۸	۶٫۶
۳	۱۶٫۲	۱۳٫۴	۱۵٫۴	۱۶٫۰	۱۵٫۰	۱۰٫۰	۱۳٫۶	۱۵٫۲	۱۱٫۰	۱۰٫۴
۴	۱۹٫۴	۱۷٫۴	۱۷٫۴	۱۸٫۴	۱۹٫۶	۱۸٫۶	۱۹٫۲	۱۷٫۸	۱۴٫۵	۱۴٫۴
۵	۱۵٫۶	۱۸٫۸	۱۸٫۰	۱۹٫۰	۲۰٫۰	۱۹٫۲	۱۶٫۸	۱۸٫۶	۱۴٫۰	۱۴٫۶
۶	۱۲٫۰	۱۳٫۵	۱۱٫۴	۱۱٫۰	۱۲٫۰	۱۵٫۰	۱۰٫۶	۱۳٫۲	۴٫۴	۹٫۶
۷	۶٫۰	۴٫۰	۹٫۰	۷٫۰	۷٫۰	۸٫۰	۸٫۰	۵٫۴	۱٫۶	۱٫۶
۸	-۱٫۴	-۰٫۳	-۳٫۴	۱٫۰	۲٫۰	۱٫۸	۲٫۲	۰٫۰	-۲٫۵	-۱٫۰
۹	-۵٫۶	-۵٫۶	-۸٫۶	-۲٫۴	-۱٫۲	-۴٫۴	-۳٫۶	-۳٫۴	-۱۳٫۶	-۱۰٫۰
۱۰	-۴٫۶	-۶٫۵	-۶٫۶	-۷٫۲	-۸٫۶	-۸٫۰	-۷٫۲	-۴٫۲	-۹٫۶	-۱۹٫۴
۱۱	-۲٫۰	-۴٫۹	-۷٫۶	-۴٫۰	-۷٫۶	-۱۳٫۲	-۶٫۸	*	-۸٫۴	-۱۱٫۴
۱۲	-۰٫۶	-۰٫۸	-۳٫۰	-۲٫۱	-۲٫۰	-۶٫۰	-۱٫۲	*	-۸٫۰	-۳٫۴

سال ماه	ماکسیم									
	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴
۱	۲۴٫۴	۲۸٫۵	۲۷٫۸	۲۷٫۴	۲۹٫۶	۲۶٫۰	۲۶٫۰	۲۸٫۰	۲۶٫۴	۲۵٫۶
۲	۳۲٫۰	۳۳٫۰	۳۲٫۴	۳۵٫۸	۳۳٫۶	۳۱٫۰	۲۹٫۴	۳۱٫۶	۳۰٫۲	۳۰٫۴
۳	۳۹٫۰	۳۶٫۲	۳۳٫۷	۳۹٫۰	۳۸٫۰	۳۷٫۰	۳۹٫۸	۳۷٫۶	۳۹٫۰	۳۸٫۰
۴	۳۸٫۰	۳۹٫۰	۴۰٫۰	۴۰٫۶	۳۸٫۸	۴۰٫۴	۳۹٫۲	۳۹٫۰	۴۱٫۰	۴۱٫۴
۵	۳۶٫۵	۳۷٫۴	۳۸٫۵	۳۷٫۲	۳۹٫۰	۳۹٫۰	۳۷٫۸	۳۹٫۲	۴۱٫۶	۳۸٫۶
۶	۳۲٫۳	۳۶٫۰	۳۶٫۰	۳۵٫۲	۳۷٫۵	۳۷٫۰	۳۶٫۲	۳۵٫۶	۳۷٫۰	۳۸٫۶
۷	۳۰٫۶	۲۹٫۶	۲۷٫۴	۳۱٫۲	۳۲٫۵	۳۳٫۸	۳۲٫۰	۳۱٫۵	۲۸٫۸	۳۳٫۰
۸	۲۲٫۴	۲۴٫۰	۲۳٫۰	۲۰٫۰	۲۶٫۰	۲۴٫۶	۲۴٫۶	۲۳٫۰	۲۴٫۴	۲۴٫۴
۹	۱۵٫۰	۲۱٫۰	۱۷٫۰	۱۸٫۴	۲۰٫۰	۱۶٫۲	۱۹٫۴	۱۸٫۲	۱۷٫۲	۱۸٫۸
۱۰	۱۸٫۰	۱۴٫۰	۱۲٫۰	۱۳٫۰	۱۲٫۰	۱۲٫۵	۱۱٫۸	۱۹٫۶	۱۶٫۶	۱۲٫۴
۱۱	۱۹٫۵	۱۷٫۲	۱۸٫۰	۱۸٫۰	۱۶٫۰	۱۱٫۵	۱۵٫۶	*	۱۷٫۰	۲۲٫۰
۱۲	۱۹٫۸	۲۳٫۰	۲۱٫۴	۲۳٫۸	۲۰٫۶	۱۱٫۶	۱۹٫۰	*	۱۹٫۰	۱۷٫۸

همساز بیست و یکم در سطح ۰٫۰۱ معنی دار است و مؤلفه‌های همسازهای دیگر در سطح ۰٫۰۱ معنی دار نیستند. با افزودن مؤلفه کسینوسی همساز بیست و یکم، مدل برازش شده نهایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_{jt} = \underset{(0)}{16,58} + \underset{(0)}{(-1)^j 11,36} - \underset{(0)}{7,67} C_{\lambda t} + \underset{(0)}{9,61} S_{\lambda t} - \underset{(0)}{0,764} S_{\nu t} - \underset{(0,003)}{0,56} C_{\nu t} + e_{jt}, \quad (16)$$

که در آن  $R_a^2 = 0,9843$  و  $R^2 = 0,9847$ ،  $\hat{\sigma}^2 = 3,3$

در مدل (۱۳) ملاحظه کردیم که فرض عدم وجود اثر متقابل بین متغیر توضیحی رسته‌ای و هر یک از متغیرهای توضیحی غیر رسته‌ای قویاً پذیرفته شد. محاسبات مربوط به مدل‌های دیگر و از جمله مدل نهایی (۱۷) نیز نشان می‌دهد که در همه موارد بین متغیر توضیحی رسته‌ای و هر یک از متغیرهای توضیحی غیر رسته‌ای اثر متقابل وجود ندارد. موجود نبودن اثرات متقابل فوق‌الذکر در واقع انعکاس همبستگی مثبت و تقریباً کامل دو سری مینیم و ماکسیم می‌باشد.

معنی‌داری در هر دو سطح مینیم و ماکسیم داشته باشند. در صورتی که به منظور بررسی امکان بهبود مدل (۱۲)، همساز هفتم را بر مدل بیفزاییم مدل زیر به دست می‌آید:

$$y_{jt} = \mu + (-1)^j \lambda + a_{\lambda} C_{\lambda t} + b_{\lambda} S_{\lambda t} + a_{\nu} C_{\nu t} + b_{\nu} S_{\nu t} + e_{jt}. \quad (15)$$

مدل برازش شده به صورت زیر است:

$$y_{jt} = \underset{(0)}{16,58} + \underset{(0)}{(-1)^j 11,36} - \underset{(0)}{7,67} C_{\lambda t} + \underset{(0)}{9,61} S_{\lambda t} + \underset{(0,012)}{0,463} C_{\nu t} - \underset{(0)}{0,764} S_{\nu t} + e_{jt}$$

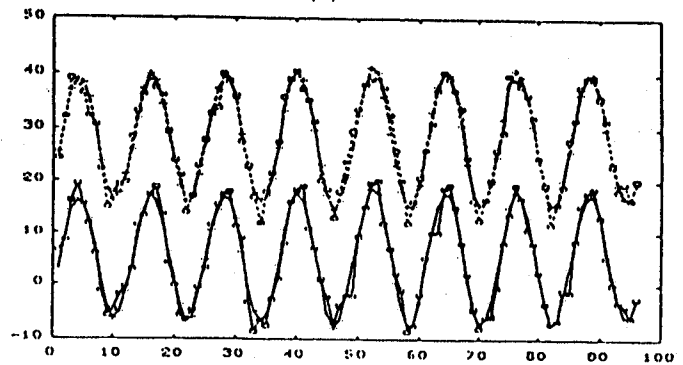
که در آن  $\hat{\sigma}^2 = 3,3$ . ملاحظه می‌شود که همه متغیرهای توضیحی موجود در این مدل به استثنای  $C_{\nu t}$  معنی دار هستند. فرض  $a_{\nu} = 0$  در سطح ۰٫۰۱ پذیرفته می‌شود، لذا  $C_{\nu t}$  را از مدل حذف می‌کنیم.

در بررسی همسازهای دیگر ملاحظه نمودیم که فقط مؤلفه کسینوسی

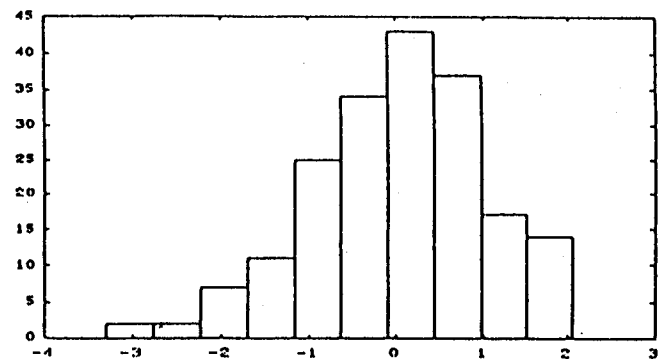
### ۳ بررسی درستی تشخیص مدل و آینده‌نگری

در نمودار (۱) سری دو سطحی مشاهده شده و مقادیر برازش شده بر اساس مدل (۱۷) مقایسه شده‌اند. این نمودار حاکی از انطباقی عالی است. در نمودار (۲) بافت‌نگار باقیمانده‌های مدل (۱۷) ملاحظه می‌شود. بررسیها و آزمونهای استاندارد مربوط به نرمال و ناهمبسته (و در نتیجه مستقل) بودن باقیمانده‌ها و ثابت بودن واریانس آنها حاکی از قابل قبول بودن این فرضهاست. به عبارت دیگر فرض  $e_{jt} \sim iidN(0, \sigma^2)$  در مورد باقیمانده‌های مدل

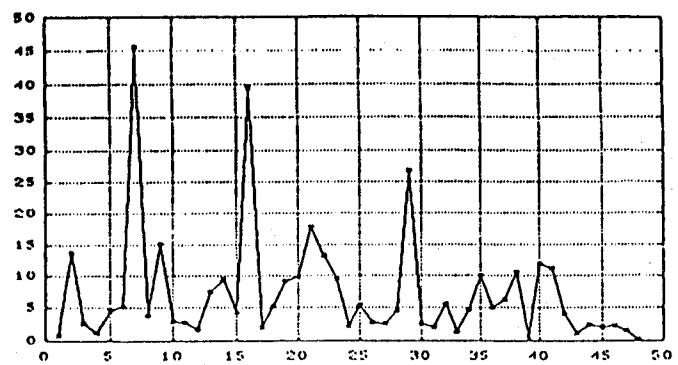
نمودار (۱) سری دو سطحی مشاهده شده (۰) و سری دو سطحی برازش شده (+)



نمودار (۲) بافت‌نگار باقیمانده‌های مدل (۱۷)



نمودار (۳) دوره‌نگار باقیمانده‌های مدل (۱۲) مربوط به سطح مینیمم



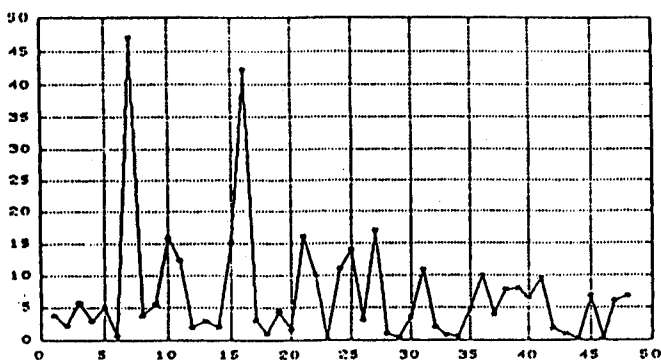
(۱۷) قابل قبول است. توجه کنید که بر اساس نتایج بخش قبل؛ حذف هر یک از پارامترهای مدل (۱۷) موجب می‌شود که این مدل به طور معنی‌داری بدتر شود. از طرف دیگر افزودن هر همساز دیگری مدل را به طور معنی‌داری بهتر نمی‌کند. بنابراین سری دو سطحی مشاهده شده را می‌توان تحقیقی از مدل (۱۷) دانست. با در نظر گرفتن قسمت سیستماتیک این مدل به عنوان مکانیزم مولد مقادیر آینده، مینیمم و ماکسیمم درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان از فروردین ۷۶ لغایت اسفند ۸۰ در جدول (۲) پیش‌بینی شده است.

جدول (۲) پیش‌بینی مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان ۷۶-۸۰

مینیمم					
سال	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۱	۳٫۶	۳٫۸	۳٫۴	۲٫۱	۳٫۱
۲	۱۰٫۶	۹٫۷	۱۰٫۳	۹٫۰	۸٫۷
۳	۱۶٫۰	۱۵٫۲	۱۵٫۱	۱۵٫۱	۱۳٫۶
۴	۱۷٫۷	۱۸٫۵	۱۷٫۴	۱۷٫۹	۱۶٫۹
۵	۱۶٫۱	۱۷٫۷	۱۷٫۳	۱۶٫۸	۱۷٫۱
۶	۱۲٫۳	۱۲٫۹	۱۴٫۱	۱۳٫۰	۱۳٫۳
۷	۶٫۹	۶٫۴	۷٫۸	۷٫۱	۷٫۱
۸	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۵	۱٫۹	۱٫۰
۹	-۵٫۴	-۴٫۴	-۵٫۰	-۳٫۸	-۳٫۳
۱۰	-۸٫۰	-۷٫۴	-۷٫۱	-۷٫۳	-۵٫۸
۱۱	-۶٫۴	-۷٫۴	-۶٫۳	-۶٫۷	-۵٫۹
۱۲	-۱٫۸	-۳٫۳	-۳٫۲	-۲٫۵	-۳٫۰

ماکسیمم					
سال	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۱	۲۶٫۳	۲۶٫۵	۲۶٫۱	۲۴٫۸	۲۵٫۸
۲	۳۳٫۳	۳۲٫۵	۳۳٫۰	۳۱٫۷	۳۱٫۴
۳	۳۸٫۷	۳۷٫۹	۳۷٫۸	۳۷٫۸	۳۶٫۳
۴	۴۰٫۴	۴۱٫۲	۴۰٫۱	۴۰٫۶	۳۹٫۷
۵	۳۸٫۸	۴۰٫۴	۴۰٫۰	۳۹٫۵	۳۹٫۸
۶	۳۵٫۱	۳۵٫۶	۳۶٫۸	۳۵٫۷	۳۶٫۱
۷	۲۹٫۶	۲۹٫۱	۳۰٫۵	۳۰٫۶	۲۹٫۸
۸	۲۳٫۱	۲۳٫۰	۲۳٫۲	۲۴٫۶	۲۳٫۷
۹	۱۷٫۲	۱۸٫۲	۱۷٫۷	۱۸٫۸	۱۹٫۲
۱۰	۱۴٫۶	۱۵٫۲	۱۵٫۵	۱۵٫۳	۱۶٫۹
۱۱	۱۶٫۲	۱۵٫۳	۱۶٫۳	۱۵٫۹	۱۶٫۷
۱۲	۲۰٫۸	۱۹٫۳	۱۹٫۵	۲۰٫۱	۱۹٫۷

نمودار (۴) دوره‌نگار باقیمانده‌های مدل (۱۲) مربوط به سطح ماکسیمم



## ۴ تقدیر و تشکر

از پیشنهادهای داوران محترم که برای بهبود مقاله مفید بوده‌اند سپاسگزارم. از آقای دکتر هوشنگ طالبی که با پیشنهاد معقولتری برای برآورد داده‌های مفقود موجب بهتر شدن مدل نهایی شدند تشکر می‌کنم. انگیزه اولیه تهیه مقاله حاضر در جریان راهنمایی پروژه خانم فیروزه روزبه، فارغ‌التحصیل رشته آمار دانشگاه اصفهان، به وجود آمد. زحمات ایشان قابل تقدیر است.

## مراجع

[۱] باکس و جنکینز، تحلیل سریهای زمانی: پیش‌بینی و کنترل، ترجمه دکتر محمدرضا مشکانی ۱۳۷۱، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

[۲] خردمندیا، م (۱۳۷۶) الگوسازی فوریه و آینده‌نگری درجه حرارت ماهانه شهر اصفهان، طرح پژوهشی مصوب ۷۶۰۲۱۵، معاونت پژوهشی دانشگاه اصفهان.

[3] Draper, N. R. and Smith, H. (1981) *Applied Regression Analysis*. 2nd ed. Wiley. New York.

## برآورد تعداد اشتباهات کتاب

غلامحسین شاهکار\*

با  $Mp$ ،  $Mq$ ، و  $Mpq$ . اگر تعداد اشتباهات پیدا شده را تقریباً برابر با میانگین آنها بگیریم، در این صورت داریم:

$$Mp = n, \quad Mq = m, \quad Mpq = k$$

و از اینجا به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{(Mp)(Mq)}{Mpq} = \frac{mn}{k}$$

در نتیجه برآورد تعداد اشتباهات پیدا نشده کتاب عبارت است از:

$$M - (m + n - k) = \frac{mn}{k} - (m + n - k) = \frac{(m - k)(n - k)}{k}$$

جرج پولیا\* ریاضیدان معاصر در ماهنامه ریاضی، شماره ژانویه سال ۱۹۷۶ این مسأله را به صورت زیر مطرح و به آن جواب می‌گوید.

مسأله قبل از چاپ کتابی دو نمونه خوان کتاب را خوانده و هر یک مستقلاً  $n$  و  $m$  اشتباه در آن یافته‌اند. اگر تعداد اشتباهاتی که دو نمونه خوان مشترکاً پیدا کرده‌اند  $k$  باشد، در این صورت تعداد اشتباهات پیدا نشده کتاب را چقدر برآورد می‌کنید؟

حل- فرض کنید احتمال یافتن اشتباه توسط نمونه‌خوان اول  $p$ ، توسط نمونه‌خوان دوم  $q$ ، و این دو پیشامد مستقل باشند. همچنین فرض کنید کل تعداد اشتباهات موجود در کتاب  $M$  باشد. میانگین تعداد اشتباهاتی که به وسیله نمونه خوانهای اول، دوم، و هر دو پیدا می‌شوند به ترتیب برابرند

\* غلامحسین شاهکار، گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

\*) Gorge Polya (1888-1985), American Mathematical Monthly.