گام‌های ترتیبی یک ترکیبیات تحلیلی

رامین کاظمی،[۱] الهه نادری[۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۲/۲

چکیده:
ترکیبیات تحلیلی تلاشی برای توانمند ساختن پیش‌بینی‌های کمّی ویژگی‌های ساختارهای ترکیبیاتی بزرگ است. این نظریه در دهه‌های اخیر به‌عنوان پایه‌ای برای تحلیل الگوریتم‌ها و مطالعهٔ مدل‌های علمی در بسیاری از رشته‌ها شامل نظریهٔ احتمال، فیزیک آماری، زیست‌شناسی محاسباتی و نظریهٔ اطلاع ظاهر شده است. با یک ترکیب دقیق روش‌های ارزیابی نمادین، آنالیز مختلط، توابع مولد و تحلیل نقطهٔ زینی، این نظریه برای مطالعهٔ ساختارهای پایه‌ای نظیر جایگشت‌ها، دنباله‌ها، رشته‌ها، قدم زدن، مسیرها، درخت‌ها، گراف‌ها و نقشه‌ها به‌کار گرفته می‌شود. هدف این مقاله، معرفی گام‌های ترتیبی یک ترکیبیات تحلیلی است.
واژه‌های کلیدی: رده، تابع مولد، تبدیل مِلین، تبدیل پوآسون، تحلیل نقطهٔ زینی.

۱ مقدمه

توابع تحلیلی، یک مفهوم ریاضی مقدماتی در تحلیل مجانبی است. در واقع این توابع به دو روشِ معادل، مشخص‌سازی می‌شوند:
آ) از طریق بسط سری‌های همگرا که توسط کوشی مطرح و سپس توسط وایرشتراس گسترش داده شده است.
ب) به وسیلهٔ خاصیت‌های مشتق‌پذیری که توسط ریمان مطرح و توسط دیگران گسترش داده شده است.

رویکرد اول به‌طور مستقیم مرتبط با توابع مولد برای ارزیابی شیءهای ترکیبیاتی است. تحلیلی بودن در یک نقطه مانند z قیدهای سنگینی بر یک تابع تحمیل می‌کند. در واقع تحلیلی بودن در یک نقطه وجود همهٔ مشتق‌های بالاتر در یک همسایگی این نقطه را ایجاب می‌کند [۴]. خارج قسمت دو تابع $f(z)$ و $g(z)$، $f(z)/g(z)$، در نقطه‌ای مانند a که در آن $g(a)=0$، خاصیت تحلیلی خود را از دست می‌دهد. نقطه‌ای که به‌ازای آن تابع خاصیت تحلیلی خود را از دست می‌دهد یک تکینی تابع نامیده می‌شود. این نقاط برای مجانب‌های ضرایب نقش اساسی دارند. نقطهٔ تکینی یک تابع، نقطه‌ای است که تابع در آن قابل تعریف نباشد یا باعث نقض یک خاصیت خوب آن مانند مشتق‌پذیری شود. فرض کنید U یک زیرمجموعهٔ باز اعداد مختلط $\mathbb{C}$، a یک عضو U و f یک تابع مشتق‌پذیر مختلط روی $U-\{a\}$ باشد.

آ) نقطهٔ a یک «تکینی برداشتنی» تابع f است اگر تابع مشتق‌پذیر مختلط g روی U وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر z در $U-\{a\}$ داشته باشیم $f(z)=g(z)$.
ب) نقطهٔ a یک «قطب» تابع f است اگر تابع مشتق‌پذیر مختلط g روی U و یک عدد طبیعی n وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر z در $U-\{a\}$ داشته باشیم

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^n}.$$

در واقع قطب، ساده‌ترین نوع تکینی است.
پ) نقطهٔ a یک «تکینی اساسی» تابع f است اگر نه تکینی برداشتنی باشد و نه یک قطب باشد.

اهمیت این نقاط در رویکرد ترکیبیاتی به اندازه‌ای است که تحلیلی موسوم به تحلیل تکینی بر اساس این نقاط پایه‌گذاری شده است. تابع تام (یا تابع انتگرال) تابعی مختلط‌مقدار است که روی کل صفحهٔ مختلط، مشتق‌پذیر مختلط است. مثال‌های عمومیِ توابع تام، چندجمله‌ای‌ها، توابع نمایی و هر مجموع و حاصل‌ضربی از این توابع است. توابع برخه‌ریخت توسیعی از مفهوم تحلیلی بودن هستند و در رویکرد ترکیبیاتی یک مفهوم پایه‌ای محسوب می‌شوند. یک تابع برخه‌ریخت روی یک زیرمجموعهٔ باز D از صفحهٔ مختلط تابعی است که روی کل D به استثنای یک مجموعه از نقاط، مشتق‌پذیر مختلط است. این نقاط، قطب‌هایی

[۱] گروه آمار دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
[۲] گروه آمار دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

برای تابع هستند. در بسیاری از موارد در رویکرد ترکیبیاتی با توابع برخه‌ریختی به‌شکل $(1-f(z))^{-1}$ مواجه هستیم، که در آن $f(z)$ تابعی تام است. در این مواقع نقطهٔ تکینی را تکینی قطبی می‌نامند. در رویکرد ترکیبیاتی، یک تکینی به نقطه‌ای اطلاق می‌شود که تابع، خاصیت تحلیلی خود را در آن از دست می‌دهد. یک تکینی غالب، راست‌ترین این نقاط محسوب می‌شود. ثابت شده است که یک تابع با ضرایب مثبت که تام نیست همیشه دارای یک تکینی حقیقی مثبت غالب است [۴]. در برخی موارد رفتار مجانبی ضرایب تابع به‌وسیلهٔ تکینی غالب تعیین می‌شود. محاسبات انتگرالی برای توابع تحلیلی در نظریهٔ اعداد مختلط یک فرق اساسی با آنچه در حوزهٔ اعداد حقیقی است، دارد: انتگرال‌ها اساساً به‌طور مشخص، از مسیر انتگرال‌گیری مستقل هستند. به‌عبارت دیگر مقدار انتگرال با هر تغییر شکل پیوستهٔ مسیر انتگرال‌گیری تغییر نمی‌کند به‌شرط این‌که تابع همچنان در مسیر جدید تحلیلی باقی بماند. یک مثال مقدماتی برای اثبات این حقیقت، قضیهٔ مشهور ماندهٔ کوشی است. این استقلال، این امکان را ایجاد می‌کند که به خاصیت‌های تابع در یک نقطه و به‌طور دقیق‌تر به ضرایب بسطش در نقطهٔ صفر و مانده‌اش در یک قطب توجه کنیم. نقاط تکینی برای مجانب‌های ضرایب، نقاط کلیدی محسوب می‌شوند. در تحلیل تکینی ثابت می‌شود که نقاط تکینی یک تابع در ضرایب بسطش منعکس می‌شوند. در واقع، رفتار مجانبی ضرایب تابع (در نمایش سری آن) به‌وسیلهٔ نقاط تکینی آن تعیین می‌شود.

۲ توابع مولد

توابع مولد یکی از مهم‌ترین ابزارها برای تحلیل الگوریتم‌ها و محاسبهٔ تعداد طرق انجام یک کار به حساب می‌آیند. این تابع‌ها در ایجاد فرمول‌های دقیق و بازگشتی، متوسط‌گیری، محاسبهٔ واریانس و هر خاصیت آماری دیگر، پیدا کردن بسط‌های مجانبی، نشان دادن تک‌مُدی بودن و اثبات برابری‌های ترکیبیاتی مفید هستند [۱، ۴]. یک شیء گسسته، شیئی است که می‌توان آن را به‌طور متناهی به‌کمک قاعده‌های ساختاری بیان کرد. منظور از قاعده‌های ساختاری، مجموع ترکیبیاتی، حاصل‌ضرب دکارتی یا برچسب‌دار، دنباله‌ها، مجموعه‌ها و غیره است. مصادیق بارز شیءهای ترکیبیاتی، کلمات (رشته‌ها و دنباله‌ها)، درخت‌ها، گراف‌ها، جایگشت‌ها و غیره هستند. روش‌های ترکیبیاتی با اشیاء گسسته سروکار دارند. یک سؤال اساسی در این خصوص، ارزیابی چنین اشیائی برای برخی پارامترهای مشخص است. تابعی که یک عدد صحیح نامنفی به هر شیء ترکیبیاتی اختصاص می‌دهد، تابع اندازه نامیده می‌شود. یک ردهٔ ترکیبیاتی، یا به‌طور خلاصه یک رده، مجموعه‌ای متناهی یا شمارا با یک تابع اندازهٔ تعریف‌شده روی آن است. اگر $\mathcal{A}$ یک رده باشد، اندازهٔ یک عنصر α در $\mathcal{A}$ با $|\alpha|$ و در برخی موارد که بیان ردهٔ ترکیبیاتی ضروری به نظر می‌رسد، با $|\alpha|_{\mathcal{A}}$ نمایش داده می‌شود. برای یک ردهٔ مفروض $\mathcal{A}$، همیشه فرض می‌کنیم که $\mathcal{A}_n$ مجموعه‌ای از اشیاء ردهٔ $\mathcal{A}$ است که از اندازهٔ n برخوردار است. دنبالهٔ شمارشیِ یک ردهٔ ترکیبیاتی، دنباله‌ای از اعداد صحیح $\{A_n\}_{n\geq 0}$ است که در آن $A_n = card(\mathcal{A}_n)$، تعداد اشیاء موجود در ردهٔ $\mathcal{A}$ است که از اندازهٔ n برخوردار هستند. توابع مولد نه تنها یک ابزار مفید برای شمارش شیءهای ترکیبیاتی هستند، بلکه یک شیء تحلیلی برای به دست آوردن مجانب‌ها نیز به حساب می‌آیند. توابع مولد می‌توانند برای پیوند دادن توزیع متغیرهای تصادفی‌ای که مرتبط با مسائل شمارش هستند، مورد استفاده قرار گیرند. در نتیجهٔ این ارتباط، روش‌های مجانبی برای به دست آوردن قضیه‌های حدی احتمالاتی مانند قضیهٔ حدی مرکزی به کار گرفته می‌شوند. همچنین توابع مولد معمولاً در یک معادلهٔ تابعی–بازگشتی صدق می‌کنند. به‌طور کلی‌تر، این توابع را می‌توان با حل یک معادلهٔ تابعی مرتبط کرد. این وضعیت به‌طور طبیعی در مسائل ترکیبیاتی با یک ساختار بازگشتی و به‌ویژه در مسائل شمارش درخت‌ها اتفاق می‌افتد؛ زیرا یک ساختار بازگشتی معمولاً قابل برگرداندن به یک معادلهٔ تابعی برای تابع مولد متناظر با آن است [۱]. بسیاری از اشیاء ترکیبیاتی کلاسیک به‌طور طبیعی با ساختارهای برچسب‌دار برای اجزایشان تعریف می‌شوند. به‌عنوان بارزترین مثال‌ها می‌توان از گراف‌ها یا درخت‌ها با گره‌های برچسب‌دار نام برد. در این حالت، هر کدام از گره‌ها با یک برچسب متمایز از سایر گره‌ها برچسب‌دار می‌شود.

تابع مولد وزنی به‌صورت

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{w_n}$$

تعریف می‌شود که در آن w_n وزن را نشان می‌دهد. اگر $w_n = 1$ باشد تابع مولد، تابع مولد معمولی است که با ساختارهای بدون برچسب همخوان است. حالت $w_n = n!$، تابع مولد نمایی است. تابع مولد معمولی ردهٔ $\mathcal{A}$ دارای یک شکل ترکیبیاتی است که

به‌صورت

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|}$$

نشان داده می‌شود. در این‌صورت، توان z، اندازه را در تابع اندازه مشخص می‌کند. تابع مولد نمایی یک ردهٔ $\mathcal{A}$ دارای شکل ترکیبیاتی

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$

است. مانند تابع مولد معمولی در این‌جا نیز توان z، اندازه را مشخص می‌کند.

قضیه‌ای اساسی در رویکرد ترکیبیاتی ثابت می‌کند که ساختارهای برچسب‌دار را می‌توان به توابع مولد نمایی برگرداند. این برگرداندن به توابع مولد نمایی به‌مراتب از برگرداندن ساختارهای بی‌برچسب به توابع مولد معمولی ساده‌تر است. به‌علاوه بسیاری از موارد ترکیبیاتی وجود دارند که برحسب ساختارهای برچسب‌دار قابل نمایش هستند [۴].

درخت دودویی و بسیاری دیگر از انواع درخت‌های ریشه‌دار دارای یک ساختار بازگشتی هستند. به‌طور دقیق‌تر می‌توان تعریف بازگشتی زیر را از درخت دودیی ارائه کرد:

بر اساس تعریف، یک درخت دودویی $\mathcal{B}$ یا تنها یک گره خارجی یا یک گره داخلی (ریشه) با دو زیردرختی است که مجدداً هر کدام یک درخت دودویی هستند. به‌عبارتی

$$\mathcal{B} = \Box + \circ \times \mathcal{B} \times \mathcal{B},$$

که در آن $\Box$ بیان‌کنندهٔ یک گره خارجی و $\circ$ یک گره داخلی است [۴]. این تفسیر بازگشتی از درخت دودویی، کلید تحلیل بسیاری از خاصیت‌های این درخت است (ارزیابی نمادین). در سایر درخت‌های تصادفی نیز تفسیرهای بازگشتی کارگشاست. با برگرداندن این رابطهٔ بازگشتی برحسب تابع مولد معمولیِ این ساختار بی‌برچسب، داریم

$$B(z) = ۱ + zB^۲(z).$$

بنا بر این (دنباله‌های شمارشی اعداد صحیحی نامنفی هستند):

$$B(z) = \frac{۱ - \sqrt{۱ - ۴z}}{۲z} = \sum_{n \geq ۰} \frac{۱}{n + ۱}\binom{۲n}{n} z^n.$$

در نتیجه تعداد درخت‌های دودویی با اندازهٔ n برابر است با

$$B_n = \frac{۱}{n + ۱}\binom{۲n}{n}.$$

این اعداد، اعداد کاتالان (ریاضی‌دان بلژیکی) نامیده می‌شوند.

۳ روش‌های مجانبی

تبدیل مِلین به براوردهای مجانبی یک ردهٔ بزرگ از مجموع‌های ترکیبیاتی منجر می‌شود. اهمیت و کاربرد تحلیل تکینی در رویکرد ترکیبیاتی به‌ویژه در بررسی الگوریتم‌ها به اندازه‌ای است که قسمت اعظم هر نوشتهٔ منتشر شده در این رویکرد به این روش تحلیلی اختصاص داده می‌شود. برای تابع مولد

$$B(z) = \frac{۱ - \sqrt{۱ - ۴z}}{۲z},$$

ثابت می‌شود که

$$B_n = \frac{۱}{n + ۱}\binom{۲n}{n}.$$

با توجه به فرمول استرلینگ، یعنی

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{۲\pi n}\left(۱ + \mathcal{O}\left(\frac{۱}{n}\right)\right), \quad n \to +\infty$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$B_n \sim \frac{۴^n}{\sqrt{\pi}} n^{-\frac{۳}{۲}}.$$

امّا بدیهی است که $B(z)$ دارای یک تکینی در نقطهٔ $z = \frac{۱}{۴}$ است؛ زیرا در این نقطه مشتق‌های تابع به بی‌نهایت میل می‌کنند. این تکینی با نام «تکینی ریشه دوم» شناخته می‌شود. ثابت شده است که برای این نوع از تکینی، یک مجانب به‌صورت $\rho^{-n} n^{-\frac{۳}{۲}}$ برای ضرایب تابع وجود دارد که در آن ρ همان تکینی ریشه دوم است [۴]. بنا بر این بدون استفاده از فرمول استرلینگ و تنها به‌کمک نتایج ثابت‌شده در این خصوص می‌توان همان مجانب را نتیجه گرفت. لذا برای تقریب مجانبی ضرایب یک تابع مولد کافی است که به براورد تابع مولد نزدیک تکینی آن توجه شود.

عمومی‌ترین تبدیل در تحلیل الگوریتم‌ها، تبدیل مِلین است. این تبدیل با تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس دوطرفه مرتبط است. البته این تبدیل دارای یک هستهٔ چندجمله‌ای است. این تبدیل در دههٔ ۱۹۶۰ میلادی در حوزهٔ ریاضیات گسسته معرفی شد. به هر حال مکتب فِلاژوله استفاده از این تبدیل را برای حل مسائل پیچیده در تحلیل الگوریتم‌ها و تعداد طرق انجام یک کار در مسائل ترکیبیاتی توسیع داد. اخیراً از این تبدیل در نظریهٔ اطلاع هم استفاده می‌شود [۶]. عمومی شدن این تبدیل به‌خاطر دو خاصیت مهم زیر است. نخست این‌که این تبدیل قادر به حل معادله‌های تابعی مشخصی است که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

همچنین خواهیم دید که این تبدیل، یک نگاشت مستقیم بین بسط‌های مجانبی یک تابع نزدیک صفر یا بی‌نهایت و مجموعهٔ تکینی‌هایش در صفحهٔ مختلط ایجاد می‌کند. خاصیت مجانبی دوم این‌که این تبدیل در تحلیل الگوریتم‌ها، نظریهٔ اطلاع، تعداد طرق انجام یک کار در مسائل ترکیبیاتی و در خیلی از کاربردهای ریاضیات گسسته باعث غنای تحلیل تکینی و پوآسونی‌سازی می‌شود.

تبدیل مِلین را می‌توان با قرار دادن $x = e^t$ در تبدیل لاپلاس و قرار دادن $x = e^{i\xi}$ در تبدیل فوریه به دست آورد. با این وصف کار کردن با این تبدیل از دو تبدیل دیگر در رویکرد ترکیبیاتی راحت‌تر خواهد بود. در بیشتر مواقع در تحلیل الگوریتم‌ها با یک معادلهٔ تابعی به‌شکل

$$f(x) = \alpha f(px) + \beta f(qx) + a(x),$$

مواجه می‌شویم که در آن α و β ثابت‌اند و $a(x)$ یک تابع معلوم است. یک نگاشت مستقیم بین بسط‌های مجانبی یک تابع نزدیک صفر یا بی‌نهایت و مجموعهٔ تکینی‌های تبدیل مِلین‌اش در صفحهٔ مختلط وجود دارد. این خاصیت، یک نقش کلیدی در کاربردها و در خاصیت‌های مجانبی ایفا می‌کند.

در تحلیل الگوریتم‌ها، تابع $f(x)$ اغلب تابع مولد یک دنبالهٔ f_n است. با استفاده از خاصیت‌های مجانبی تبدیل مِلین، قادر به پیدا کردن یک بسط مجانبی برای $f(x)$ هستیم، امّا به یک ابزار برای بازیافت f_n نیازمندیم. این رویکرد با نام «رویکرد دومرحله‌ای» شناخته می‌شود. برای این منظور می‌توان از تحلیل تکینی استفاده کرد. راهی دیگر برای برون‌رفت از این مشکل، استفاده از رویکرد دیگری موسوم به «بازگشت از پوآسونی‌سازی» است.

تعریف ۱.۳. تبدیل مِلین تابع f تعریف‌شده روی $\mathbb{R}_>$، تابع مختلط $f^*(s)$ است که به‌صورت

$$f^*(s) = \int_{۰}^{\infty} f(x)x^{s-۱}dx, \quad s \in \mathbb{C}$$

تعریف می‌شود.

این تبدیل در خیلی از مواقع با $\mathcal{M}[f]$ یا $\mathcal{M}[f(x);s]$ نشان داده می‌شود. اهمیت این تبدیل در دو خاصیت زیر نمایان می‌شود:

آ) نگاشت کردن بسط مجانبی یک تابع در صفر و بی‌نهایت به تکینی‌های تبدیل،

ب) فاکتور گیری مجموع‌های همساز.

ترکیب این دو خاصیت، امکان تحلیل مجانبی مجموع‌های پیچیده‌تر را در یک صورت خطی با مقیاس‌های مختلف ایجاد می‌کند. فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر باشد که در دو شرط $(v < u)$

$$f(x) = \mathcal{O}(x^u), \qquad x \to ۰^+$$
$$f(x) = \mathcal{O}(x^v), \qquad x \to +\infty$$

صدق می‌کند. این دو شرط، وجود تبدیل مِلین را برای هر عدد مختلط s با $-u < \Re(s) < -v$، تضمین می‌کنند. گاهی از نماد $s \in \langle -u, -v\rangle$، برای نمایش این نوار که نوار پایه‌ای نامیده می‌شود، استفاده می‌شود. چون تبدیل مِلین حالت خاصی از تبدیل لاپلاس است، پس در این حالت نیز مانند تبدیل لاپلاس می‌توان معکوس تبدیل را ارائه کرد. اگر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(۰,\infty)$ پیوسته باشد، خواهیم داشت

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds,$$

که در آن $a < c < b$ و $\langle a,b\rangle$ نوار پایه‌ای $f^*(s)$ است. فرض کنید $f^*(s)$ تبدیل مِلین تابع $f(x)$ باشد و $g^*(s)$ تبدیل مِلین تابع $g(x)$ باشد. در این‌صورت،

$$\mathcal{M}[f(x)g(x), s] \;=\; \frac{۱}{۲\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(t)g^*(s-t)dt,$$

که در آن انتگرال‌گیری روی خط عمودی $\Re(s) = c$ که به‌طور کامل درون ناحیهٔ همگرایی تابع f^* است، صورت می‌گیرد.

۱.۳ پوآسونی‌سازی

در محاسبهٔ تعداد طرق انجام یک کار و در تحلیل الگوریتم‌ها اغلب یک نسخهٔ پوآسون از مسئله (که آن را پوآسونی‌سازی می‌نامیم) برای حل آن راحت‌تر از حل مستقیمِ آن است. گاهی این فن تحت عنوان مدل برنولی نیز شناخته می‌شود. در حقیقت، پوآسونی‌سازی فنی است که مسئله را به سمت یک فرایند پوآسون هدایت می‌کند. تبدیل پوآسون، دنبالهٔ توصیف‌کنندهٔ مدل برنولی را درون تابع مولد یک متغیر مختلطِ توصیف‌کنندهٔ مدل پوآسون نگاشت می‌کند. هر گاه مسئله در قلمرو پوآسون حل شود، باید برای رسیدن به نتیجه اصلی، آن را از پوآسونی‌سازی درآورد. این فن به‌ویژه به‌عنوان یک فن

مجانبی برای توابع مولدی که توابع تام هستند، به کار گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۳. فرض کنید g_n یک مشخصهٔ مدل برنولی از اندازهٔ n باشد. در این صورت تبدیل پوآسون آن به‌صورت

$$\Delta(z) = \sum_{n\geq ۰} \mathbb{E}(X_N|\ N=n)e^{-z}\frac{z^n}{n!}$$

تعریف می‌شود که N یک فرایند پوآسون با میانگین $\Re(z) > ۰$ است.

زمانی که z یک عدد مختلط است، این تبدیل را پوآسونی‌سازی تحلیلی می‌نامند. اگر بتوان تبدیل پوآسون $\Delta(z)$ را به طور دقیق محاسبه کرد، می‌توان ضرایب موجود در تبدیل را به‌صورت

$$g_n = n![z^n]\Big(e^z\Delta(z)\Big)$$

بازیافت کرد. این نوع برگشت از پوآسونی‌سازی را برگشت از پوآسونی‌سازی دقیق یا جبری گویند. به‌عنوان مثال با به کار گرفتن فرمول ضرایب کوشی برای

$$\Delta(z) = \frac{e^{-z}}{۱-z}$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$g_n = n![z^n]\Big(e^z\Delta(z)\Big) = n!.$$

در بیشتر وضعیت‌های مورد بررسی در الگوریتم‌ها، تبدیل پوآسون در یک معادلهٔ تابعی-بازگشتی صدق می‌کند که معمولاً نمی‌توان آن را به‌صورت دقیق حل کرد. در این مواقع می‌توان روی محور حقیقی زمانی $z \longrightarrow \infty$، یک مجانبِ $\Delta(z)$ را پیدا کرد یا کرانی برای آن در صفحهٔ مختلط ارائه نمود. در نهایت می‌توان از طریق مجانب‌های $\Delta(z)$ به یک بسط مجانبی g_n رسید. این روش معمولاً به برگشت از پوآسونی‌سازی تحلیلی معروف است.

یک ساختار ترکیبیاتی شامل n شیء را که قرار است نه لزوماً به‌طور تصادفی در مکان‌های مشخصی توزیع شوند، در نظر بگیرید. فرض کنید X_n یک مشخصهٔ مدل تحت بررسی باشد. برای تعریف مدل پوآسون، فرض کنید N یک متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر $\Re(z) > ۰$ باشد؛ یعنی

$$P(N=k) = e^{-z}\frac{z^k}{k!}, \quad k = ۰, ۱, ۲, \ldots .$$

فرض کنید X_N مشخصهٔ تعریف‌شده در مدل پوآسون باشد که با جایگزینی متغیر پوآسون N به‌جای n به دست می‌آید. در این‌صورت بنا بر تعریف،

$$\Delta(z) = \sum_{n\geq ۰} \mathbb{E}(X_N|\ N=n)e^{-z}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq ۰} \mathbb{E}(X_n)e^{-z}\frac{z^n}{n!},$$

که در آن $\mathbb{E}$ بیان‌کننده عملگر امید ریاضی است. فرض می‌شود مجموع بالا برای هر z، به‌طور مطلق همگرا است یا به‌طور معادل $\Delta(z)$ یک تابع تام از متغیر مختلط z است. با این وصف، تبدیل پوآسون برای هر عدد مختلط z تعریف می‌شود.

حال g_n از رابطهٔ

$$g_n = \frac{n!}{n^n ۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta(ne^{it})\exp(ne^{it})e^{-nit}dt$$

به دست می‌آید (برگشت از پوآسونی‌سازی). در این صورت همهٔ نتایج برگشت از پوآسونی‌سازی مجانبی از انتگرال بالا به‌وسیلهٔ یک براورد دقیق این انتگرال با استفاده از روش نقطهٔ زینی نتیجه می‌شود.

۴ روش نقطهٔ زینی

نقطهٔ زینی یک تابع $f(z)$، نقطه‌ای مانند $z_۰$ است که برای آن $f(z_۰) \neq ۰$ و $f'(z_۰) = ۰$. این نقطه، یک نقطهٔ زینی ساده نامیده می‌شود هرگاه همچنین $f''(z_۰) \neq ۰$ باشد. برای براورد انتگرال‌های مختلط یک تابع تحلیلی، اغلب یک تدبیر خوب، اتخاذ مسیر انتگرال‌گیری به‌صورت یک منحنی است که از یک یا چند نقطهٔ زینی تابع تحت انتگرال عبور می‌کند. به کار گرفتن این فن در مواقعی که انتگرال به یک پارامتر بزرگ وابسته است، به اطلاع مجانبی دقیقی منجر می‌شود. استفادهٔ عمومی از این روش برای انتگرال‌های کوشی مبین ضرایبِ توابع مولدِ شاخص‌های بزرگ است. چون انتگرال را می‌توان در طول یک دایره به مرکز مبدا محاسبه کرد، اجرای این روش نسبتاً ساده خواهد بود.

روش نقطهٔ زینی می‌تواند به براوردهای مجانبی دقیقی شامل بسط‌های مجانبی نیز منتهی شود. پایهٔ این روش، استفاده از مسیر عبور نقطه زینی و سپس براورد موضعی تابع تحت انتگرال نزدیک این نقطه است که در نهایت با تقریب‌های موضعی و انتگرال‌گیری، یک بسط مجانبی از انتگرال را نتیجه می‌دهد. یک شکل سادهٔ این روش، کران‌هایی را نتیجه می‌دهد که کران‌های نقطهٔ زینی نامیده می‌شوند. ثابت شده است که این روش برای انتگرال‌های ضرایب کوشیِ تابع‌های تام و تابع‌هایی

که در اطراف تکینی‌هایشان به‌سرعت رشد می‌کنند، روش مناسبی است [۴]. در واقع این روش برای توابع تام و توابعی که تکینی‌های آنها یک رشد نمایی را القا می‌کنند، مناسب است. برای مثال می‌توان به تابع $f(z) = \exp(\frac{1}{1-z})$ اشاره کرد.

انتگرال موجود در فرمول ضرایب کوشی، سطحی با یک نقطهٔ زینی تعریف می‌کند که در طول محور حقیقی مثبت است. با انتخاب کردن یک دایره به مرکز مبدأ و عبور آن از نقطهٔ زینی، این انتگرال می‌تواند کران‌های مفیدی ارائه کند.

قضیهٔ ۱.۴. فرض کنید $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ یک تابع تام با ضرایب مثبت باشد. در این صورت برای هر n داریم

$$f_n = [z^n]f(z) \leq \frac{f(r)}{r^n},$$

که در آن $r = r(n)$ کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبتی است که

$$r\frac{f'(r)}{f(r)} = n.$$

اثبات. به [۴] مراجعه شود. □

این قضیه به کران سادهٔ نقطهٔ زینی معروف است. تعداد رده‌های ترکیبیاتی که با تحلیل نقطهٔ زینی قابل جواب‌گویی هستند به‌مراتب کمتر از آن تعدادی است که با تحلیل تکینی قابل حل هستند. در حقیقت در خیلی از موارد، جواب مسئله با همان تحلیل تکینی حاصل می‌شود.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، استفادهٔ عمومی از روش نقطهٔ زینی به انتگرال‌های ضرایب کوشی محدود می‌شود. فرض کنید که $G(z)$، یک تابع مولد مفروض باشد که در مبدأ تحلیلی و دارای ضرایب نامنفی است. در این صورت

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

که در آن γ یک طوقه به مرکز مبدأ است که در ناحیه‌ای که در آن تابع G تحلیلی است قرار گرفته و به‌طور مثبت سودار است. روش نقطهٔ زینی با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ در انتگرال بالا که در آن r شعاع دایره‌ای برابر با (یا نزدیک به) نقطهٔ زینی است، آشکار می‌شود. در حقیقت با این انتخاب از مختصات قطبی استفاده می‌شود. به‌طور کلی روش نقطهٔ زینی شامل مراحل زیر است:

ورودی: فرض کنید تابع $G(z)$ برای $|z| < R$، $0 < R < +\infty$)، تحلیلی با ضرایب مثبت و با یک رشد سریع باشد زمانی که $z \to R^-$. فرض کنید $h(z) = \log G(z) - (n+1)\log z$.

خروجی: یک فرمول مجانبی برای

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(z)\frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{h(z)}dz,$$

که در آن γ یک مسیر دایره‌ای حول صفر است، استنتاج می‌شود.

مسیر انتگرال‌گیری: فرض کنید $G(z)$ در شرایط قضیهٔ ۱.۴ صدق کند. انتگرال بالا روی مسیر $\gamma = \{z : |z| = r\}$ محاسبه می‌شود.

خرد کردن: فرض کنید $h'''(r)^{\frac{1}{3}}h''(r)^{-\frac{1}{2}} \to 0$ و

$$\delta = |h'''(R)^{-\frac{1}{6}}h''(R^{-\frac{1}{4}})|,$$

به‌طوری که

$$\delta \to 0,$$

$$h''(r)\delta^2 \to \infty,$$

$$h'''(r)\delta^3 \to 0.$$

مسیر γ به‌صورت $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$ خرد می‌شود، که در آن

$$\gamma_0 = \{z \in \gamma : |\arg(z)| \leq \delta\},$$

$$\gamma_1 = \{z \in \gamma : |\arg(z)| \geq \delta\}.$$

حذف کردن: روی γ_1، $|G(re^{i\theta})| \leq |G(re^{i\delta})|$ و

$$\left|\int_{\gamma_1} e^{h(z)}dz\right| = \mathcal{O}\left(|e^{-h(re^{i\delta})}|\right).$$

تقریب موضعی: فرض کنید

$$h(re^{i\theta}) - h(r) - \frac{1}{2}r^2\theta^2h''(r) = \mathcal{O}\Big(|h'''(r)\delta^3|\Big).$$

در این‌صورت

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} e^{h(z)}dz = \frac{G(r)r^{-n}}{\sqrt{2\pi h''(r)}}\Big(1 + \mathcal{O}(|h'''(r)\delta^3|)\Big).$$

جمع‌بندی:

$$\begin{aligned}[z^n]G(z) &= \frac{G(r)r^{-n}}{\sqrt{2\pi h''(r)}}\Big(1 + \mathcal{O}(|h'''(r)\delta^3|)\Big)\\ &\sim \frac{G(r)r^{-n}}{\sqrt{2\pi h''(r)}}.\end{aligned}$$

شکل ساده‌تری از مراحل بالا در قضیهٔ زیر آمده است:

قضیهٔ ۲.۴. فرض کنید $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ یک تابع با ضرایب مثبت باشد. در این صورت

$$f_n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi C(n)}r^{n+1}},$$

$$C_n = \frac{d^2}{dz^2}\log f(z)\Big|_{z=r} + (n+1)r^{-2},$$

که در آن نقطهٔ زینی r، کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبتی است که

$$r\frac{f'(r)}{f(r)} = n + ۱.$$

اثبات. به [۴] مراجعه شود. □

به‌عنوان یک مثال ساده، برای تابع

$$f(z) = e^z = \sum_{n\geq ۰} \frac{۱}{n!} z^n$$

که دارای نقطهٔ زینی $r = n + ۱$ است،

$$\frac{۱}{n!} = [z^n]e^z \sim \frac{e^{n+۱}}{\sqrt{۲\pi/(n+۱)}(n+۱)^{n+۱}} \sim \frac{۱}{\sqrt{۲\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

این نشان می‌دهد که $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{۲\pi n}$.

۵ نتیجه‌گیری

یکی از مهم‌ترین کاربردهای ترکیبیات تحلیلی در بررسی متغیرهای تصادفی روی ساختارهای تصادفی و به‌ویژه محاسبهٔ تابع احتمال، امید ریاضی و واریانس آنها است [۲، ۳، ۵]. محاسبهٔ توزیع احتمال متغیرهای تصادفی تعریف‌شده روی الگوریتم‌ها یا ساختارهای تصادفی، اغلب ناممکن است. تحلیل ترکیبیاتی می‌تواند با اجرای چند گام ترتیبی بدون ارجاع به توزیع احتمال متغیر تصادفی منجر به پیدا کردن میانگین یا واریانس این متغیرهای تصادفی شود. در بسیاری از موارد، یک تحلیل مجانبی امکان‌پذیر است. به‌طور کلی یک تحلیل ترکیبیاتی استاندارد شامل گام‌های ترتیبی تابع مولد نمایی، پوآسونی سازی و تبدیل مِلین است. اگر هدف اجرای تحلیلی مجانبی باشد، چون انتگرال در تبدیل مِلین به یک پارامتر بزرگ وابسته خواهد شد یک تحلیل نقطهٔ زینی نیز ضروری است. برای بازیافت ضرایب تبدیل پوآسون باید گام‌های ترتیبی تبدیل مِلین معکوس و بازگشت از پوآسونی سازی انجام شود.

مراجع

[1] Drmota, M. (2009). *Random Trees: An Interplay Between Combinatorics and Probability*. Springer, New York.

[2] Drmota, M. and Szpankowski, W. (2011). The expected profile of digital search trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series A.*, **118**, 1939-1965.

[3] Drmota, M. and Szpankowski, W. (2009). Un(expected) behavior of digital search tree profile. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 130-138.

[4] Flajolet, F. and Sedgewick, R. (2008). *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Kazemi, R. and Vahidi-Asl, M. Q. (2011). The variance of the profile in digital search trees. *Disctere Mathematics and Theoritical Computer Science*, **13(3)**, 21-38.

[6] Szpankowski, W. (2001). *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, Wiley, New York.