

تحلیل رگرسیون ستیغی دو پارامتری فازی با ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی

معصومه فرخی^۱، محمدرضا ربیعی^۲، محمد آرشی^۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۵/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۲/۱۷

چکیده:

در این مقاله روش رگرسیون ستیغی فازی موزون^۴ جدیدی برای مجموعه‌ای از داده‌های ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد شده است. برای این منظور، برآوردگر ستیغی پارامترهای فازی مدل رگرسیونی به دست آمده و خطای پیشگوی^۵ آن با استفاده از نرم فازی موزون به ازای ضرایب ستیغی دقیق، متفاوت ارزیابی شده است. برای ارزیابی مدل رگرسیونی پیشنهادی، ضریب تعیین تعمیم یافته را معرفی می‌کنیم. سپس با ارائه مثال‌های عددی به مقایسه مدل رگرسیون فازی معمولی و رگرسیون ستیغی فازی به کمک مقدار میانگین توان دوم خطاهای پیشگویی و ضریب تعیین فازی می‌پردازیم. در صورت وجود هم‌خطی بین متغیرهای پیش‌بین، نتایج به دست آمده از مدل رگرسیون ستیغی فازی بهتر از نتایج رگرسیون فازی معمولی خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی مثلثی، رگرسیون فازی، برآوردگر ستیغی، رگرسیون ستیغی فازی موزون، ضریب تعیین تعمیم یافته.

۱ مقدمه

هورل وکنارد [۶] پیشنهاد شد. برآوردگر ستیغی با حل یک دسته از معادلات نرمال به دست می‌آید. برآوردگر ستیغی را به عنوان جواب معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$(X'X + kI)\hat{\beta}_R = X'Y,$$

که از حل آن داریم

$$\hat{\beta}_R = (X'X + kI)^{-1}X'Y,$$

که در آن $k \geq 0$ ثابتی است که توسط تحلیلگر انتخاب می‌شود. در رگرسیون فازی نیز زمانی که بین متغیرهای پیش‌بین، رابطه هم‌خطی وجود داشته باشد، این مشکل وجود دارد و برای رفع این مشکل می‌توان از رگرسیون ستیغی فازی استفاده کرد. در زمینه رگرسیون فازی، هانگ و همکاران [۴] مطالعاتی انجام داده‌اند و از جمله کارهای اخیر در زمینه رگرسیون فازی می‌توان به کلکین نما و طاهری [۱] و همچنین میرزایی یگانه و ارقامی [۲] اشاره کرد. میرزایی یگانه و ارقامی در این مقاله چندین رویکرد

در مسائل کاربردی که مؤلفه‌های نادقیق جزء لاینفک آن‌ها هستند، استفاده از مجموعه‌های فازی برای بررسی ویژگی‌ها و اندازه‌گیری میزان کارایی آن‌ها، برخی از محدودیت‌های فعلی را برطرف می‌سازد. تحلیل آماری نادقیق با داده‌های فازی در بسیاری از شاخه‌های علوم آماری مانند کنترل کیفیت، رگرسیون و قابلیت اعتماد رو به توسعه است. در رگرسیون کلاسیک مفروضاتی در نظر گرفته می‌شود از جمله بین متغیرهای مستقل، رابطه هم‌خطی وجود ندارد و متغیرهای ورودی دقیق هستند.

وقوع هم‌خطی چندگانه بین متغیرهای پیش‌بین در تحلیل رگرسیونی خطی ممکن است باعث ناپایداری شدید در برآوردهای کمترین توان‌های دوم پارامترهای رگرسیونی شود. از این رو روش‌های مختلفی از جمله رگرسیون ستیغی، لاسو و رگرسیون مؤلفه‌های اصلی برای غلبه بر این مشکل وجود دارد. یکی از این روش‌ها رگرسیون ستیغی است که اولین بار توسط

^۱ دانش‌آموخته کارشناس ارشد آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

^۲ گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

^۳ گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

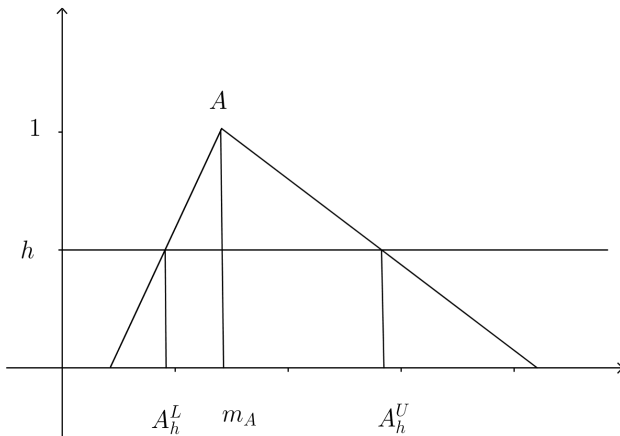
^۴ weighted

^۵ predicted error

به صورت زیر تعریف می شود:

(۱)

$$[A^L(h), A^U(h)] = [m_A - (1-h)l_A, m_A + (1-h)r_A]$$



شکل ۱. h -برش عدد فازی A

روابط زیر، جمع دو عدد فازی و ضرب یک عدد حقیقی در یک عدد فازی را نشان می دهند، که از مفهوم اصل توسیع که توسط زاده [۹] معرفی شد، برگرفته شده است. اگر $A_1 = (m_1, l_1, r_1)$ و $A_2 = (m_2, l_2, r_2)$ دو عدد فازی در $T(\mathfrak{R})$ باشند و $\lambda \in \mathfrak{R}$

$$A_1 + A_2 = (m_1 + m_2, l_1 + l_2, r_1 + r_2), \quad (2)$$

$$\lambda A_1 = \begin{cases} (\lambda m_1, \lambda l_1, \lambda r_1), & \lambda > 0 \\ (\lambda m_1, -\lambda r_1, -\lambda l_1), & \lambda < 0 \end{cases} \quad (3)$$

۱.۲ فاصلهٔ موزون بین دو عدد فازی

ژو [۱۰] فاصلهٔ بین دو عدد فازی A و B را بر پایهٔ تابع وزنی $f(h)$ به صورت زیر تعریف می کند

$$d(A, B) = \left[\int_0^1 f(h) d^*(A_h, B_h) dh \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4)$$

که در آن

$$d^*(A_h, B_h) = [A_h^L - A_h^U]^2 + [B_h^L - B_h^U]^2, \quad (5)$$

و $f(h)$ یک تابع صعودی روی بازهٔ $[0, 1]$ است و داریم $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(h) dh = \frac{1}{p}$.

قضیهٔ ۱.۲. فرض کنید A و B دو عدد فازی مثلثی باشند. در

این صورت بر پایهٔ تابع وزنی $f(h) = h$ داریم:

$$\begin{aligned} d^*(A, B) &= (m_A - m_B)^2 \\ &+ \frac{1}{3} (m_A - m_B) [(r_A - r_B) - (l_A - l_B)] \\ &+ \frac{1}{12} [(l_A - l_B)^2 + (r_A - r_B)^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

در رگرسیون فازی را بررسی کردند. در زمینهٔ رگرسیون ستیغی فازی می توان به چنگ و لی [۵] اشاره کرد که روشی جدید برای مجموعه‌ای از داده‌ها با ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد کردند و همچنین بلاسوندارام و کاپیل [۸] که رگرسیون ستیغی فازی موزون برای مجموعه‌ای از ورودی‌های دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد کردند و با استفاده از تابع کرنل در برآورد، میانگین مربع خطا را تا حد امکان کاهش دادند. فرنوش و همکاران [۷] برآورد ستیغی مدل رگرسیون ناپارامتری فازی را برای اعداد فازی مثلثی بررسی کردند. آنان از فاصلهٔ دیاموند برای محاسبهٔ خطای مدل استفاده کردند و همچنین از روش اعتبارسنجی برای انتخاب مقدار بهینه پارامتر استفاده کردند. در این مقاله یک روش رگرسیون ستیغی فازی با نرم فازی موزون، برای مجموعه‌ای از داده‌های ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد شده است. به طور دقیق‌تر، در این روش برای هر کدام از پارامترهای عرض از مبدأ و شیب مدل، جریمه‌های متفاوتی را در نظر می گیریم. با این کار می توان میزان تأثیر هر کدام از این پارامترها را به طور جداگانه کنترل کرد. همچنین با کمک نرم فازی وزن دار شده، ضریب تعیین فازی را معرفی می کنیم. ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲ مفاهیم و تعاریف اولیهٔ آمار فازی را بیان می کنیم، در بخش ۳ مدل خطی رگرسیون ستیغی فازی را ارائه می کنیم و در بخش ۴ معیار نیکویی برازش مدل را معرفی کرده، در بخش ۵ چگونگی تأثیر پارامترهای ستیغی را در قالب مثال‌های عددی بررسی می کنیم.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید هر عدد فازی مثلثی A با تابع عضویت $A(\cdot)$ و به شکل $A = (m_A, l_A, r_A)$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x - m_A + l_A}{l_A - m_A}, & m_A - l_A \leq x < m_A \\ \frac{m_A + r_A - x}{r_A - m_A}, & m_A \leq x < m_A + r_A \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که m_A مرکز و l_A و r_A به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست عدد فازی است. مجموعهٔ همهٔ اعداد فازی مثلثی را با $T(\mathfrak{R})$ نمایش می دهیم. با توجه به حد پایین و حد بالای عدد فازی A به ترتیب $m_A - l_A$ و $m_A + r_A$ است، برای هر عدد فازی $A = (m_A, l_A, r_A) \in T(\mathfrak{R})$ و $h \in [0, 1]$ که h -برش A

اثبات. فرض کنید $A = (m_A, l_A, r_A)$ و $B = (m_B, l_B, r_B)$ دو عدد فازی مثلثی باشند و $f(h) = h$. حال با استفاده از رابطه‌های ۱ و ۴ و ۵ داریم

$$\begin{aligned} d^2(A, B) &= \int_0^1 [A_h^L - B_h^L]^2 h dh + \int_0^1 [A_h^U - B_h^U]^2 h dh \\ &= \int_0^1 \left([(m_A - (1-h)l_A) - (m_B - (1-h)l_B)]^2 \right. \\ &\quad \left. + [(m_A + (1-h)r_A) - (m_B + (1-h)r_B)]^2 \right) h dh \\ &= (m_A - m_B)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} (m_A - m_B) [(r_A - r_B) - (l_A - l_B)] \\ &\quad + \frac{1}{12} [(l_A - l_B)^2 + (r_A - r_B)^2]. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۲. در رابطه فوق، فاصله هر عدد فازی مثلثی مانند A از مبدأ (یعنی $(0, 0, 0)$) به صورت

$$\begin{aligned} d^2(A, 0) &= \|A\|^2 \\ &= m_A^2 + \frac{1}{3} m_A (r_A - l_A) + \frac{1}{12} (l_A^2 + r_A^2) \end{aligned} \quad (7)$$

محاسبه می‌شود.

۳ برآوردگر ستیغی فازی پیشنهادی

مدل رگرسیون خطی فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \beta_0 + x^t \beta, \quad (8)$$

که در آن $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^t$ و $x = (x_1, \dots, x_p)^t \in \mathfrak{R}^p$ یک بردار فازی است به طوری که $\beta_j = (m_{\beta_j}, l_{\beta_j}, r_{\beta_j})$ به ازای $j = 1, \dots, p$ و $Y = (m_Y, l_Y, r_Y)$ و $\beta_0 = (m_{\beta_0}, l_{\beta_0}, r_{\beta_0})$. اعداد فازی مثلثی روی $\mathfrak{R}$ هستند.

قضیه ۱.۳. برآورد ستیغی ضرایب مدل رگرسیونی ۸ به صورت زیر است:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} x^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A^t}{\lambda_1} \\ \frac{e^t}{\lambda_2} \end{bmatrix} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} (m, l, r), \quad (9)$$

که در آن $x^t = (x_1, \dots, x_p)$ و i امین سطر ماتریس $A \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ را بردار x_i^t تشکیل می‌دهد. همچنین e بردار ستونی از یک‌ها با بُعد n و ماتریس همانی I با بُعد مناسب است و $l = (l_{Y_1}, \dots, l_{Y_p})^t$ و $m = (m_{Y_1}, \dots, m_{Y_p})^t$

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله به ازای $j, j = 1, \dots, p$ ، $x_j \geq 0$ (در صورتی که x_j ها اعدادی منفی باشند، می‌توان آن‌ها را با یک انتقال به اعدادی مثبت تبدیل کرد) با استفاده از تعریف جمع و ضرب اسکالر اعداد مثلثی در ۲ و ۳، مدل رگرسیونی ۸ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$Y = \left(\sum_{j=1}^p m_{\beta_j} x_j + m_{\beta_0}, \sum_{j=1}^p l_{\beta_j} x_j + l_{\beta_0}, \sum_{j=1}^p r_{\beta_j} x_j + r_{\beta_0} \right).$$

فرض کنید که مجموعه‌های از نمونه‌های ورودی دقیق و مقادیر مشاهده‌شده فازی مثلثی متناظر با آن $\{(x_i, Y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ داده شده باشد که برای بردار $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^t \in \mathfrak{R}^p$ مقادیر مشاهده‌شده $Y_i = (m_{Y_i}, l_{Y_i}, r_{Y_i}) \in T(\mathfrak{R})$ است. مسئله رگرسیون ستیغی دو پارامتری فازی با پارامترهای λ_1 و λ_2 را می‌توان به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر تعریف کرد:

$$(10)$$

$$\min_{\beta_0, \beta} \lambda_1 \|\beta\|^2 + \lambda_2 \|\beta_0\|^2 + \sum_{i=1}^n d^2(\beta_0 + x_i^t \beta, Y_i),$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ هستند. با استفاده از رابطه‌های ۶ و ۷ داریم:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \|\beta\|^2 + \lambda_2 \|\beta_0\|^2 + \sum_{i=1}^n d^2(\beta_0 + x_i^t \beta, Y_i) \\ &= \lambda_1 \sum_{j=1}^p \|(m_{\beta_j}, l_{\beta_j}, r_{\beta_j})\|^2 + \lambda_2 \|(m_{\beta_0}, l_{\beta_0}, r_{\beta_0})\|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|Y_i - \beta_0 - x_i^t \beta\|^2 \\ &= \lambda_1 \sum_{j=1}^p \left[m_{\beta_j}^2 + \frac{1}{3} m_{\beta_j} (r_{\beta_j} - l_{\beta_j}) + \frac{1}{12} (l_{\beta_j}^2 + r_{\beta_j}^2) \right] \\ &\quad + \lambda_2 \left(m_{\beta_0}^2 + \frac{1}{3} m_{\beta_0} (r_{\beta_0} - l_{\beta_0}) + \frac{1}{12} (l_{\beta_0}^2 + r_{\beta_0}^2) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^p m_{\beta_j} x_{ij} + m_{\beta_0} - m_{Y_i} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^p m_{\beta_j} x_{ij} + m_{\beta_0} - m_{Y_i} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\sum_{j=1}^p r_{\beta_j} x_{ij} + r_{\beta_0} - r_{Y_i} \right) \right. \right. \end{aligned}$$

$$(11)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \alpha_{ri} \left[\sum_{j=1}^p l_{\beta_j} x_{ij} + l_{\beta} - l_{Y_i} - \xi_{ri} \right] \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_{ri} \left[\sum_{j=1}^p m_{\beta_j} x_{ij} + m_{\beta} - m_{Y_i} - \xi_{ri} \right]. \quad (14)$$

با استفاده از تعریف ماتریس A ، e و I در صورت قضیه، با مشتق گیری از جمله L نسبت به هر یک از پارامترها و برابر با صفر قرار دادن آن، دستگاه معادلات زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 m_{\beta} + \frac{\lambda_1}{3} (r_{\beta} - l_{\beta}) &= -A^t \alpha_1, \\ -\frac{\lambda_1}{3} m_{\beta} + \frac{\lambda_1}{6} l_{\beta} &= -A^t \alpha_2, \\ \frac{\lambda_1}{3} m_{\beta} + \frac{\lambda_1}{6} r_{\beta} &= -A^t \alpha_3, \\ 2\lambda_2 m_{\beta} + \frac{\lambda_2}{3} (r_{\beta} - l_{\beta}) &= -e^t \alpha_1, \\ -\frac{\lambda_2}{3} m_{\beta} + \frac{\lambda_2}{6} l_{\beta} &= -e^t \alpha_2, \\ \frac{\lambda_2}{3} m_{\beta} + \frac{\lambda_2}{6} r_{\beta} &= -e^t \alpha_3, \\ 2\xi_1 + \frac{1}{3} (\xi_r - \xi_l) &= \alpha_1, \\ -\frac{1}{3} \xi_1 + \frac{1}{6} \xi_r &= \alpha_2, \\ \frac{1}{3} \xi_1 + \frac{1}{6} \xi_r &= \alpha_3. \end{aligned}$$

با حل همزمان معادلات فوق داریم:

$$\begin{aligned} m_{\beta} &= -\frac{A^t}{\lambda_1} \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right), \\ l_{\beta} &= -\frac{A^t}{\lambda_1} (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3), \\ r_{\beta} &= -\frac{A^t}{\lambda_1} (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3), \\ m_{\beta} &= -\frac{e^t}{\lambda_2} \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right), \\ l_{\beta} &= -\frac{e^t}{\lambda_2} (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3), \\ r_{\beta} &= -\frac{e^t}{\lambda_2} (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3), \\ \xi_1 &= \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right), \\ \xi_2 &= (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3), \\ \xi_3 &= (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3). \end{aligned} \quad (15)$$

حال با جایگذاری شرایط ۱۵ در ۱۴ مسئله مینیم سازی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{j=1}^p l_{\beta_j} x_{ij} + l_{\beta} - l_{Y_i} \right) \\ & + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{j=1}^p l_{\beta_j} x_{ij} + l_{\beta} - l_{Y_i} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^p r_{\beta_j} x_{ik} + r_{\beta} - r_{Y_i} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

توجه کنید که مسئله مینیم سازی رابطه ۱۰ را می توان به شکل مسئله مینیم سازی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min_{m_{\beta}, l_{\beta}, r_{\beta}, \xi_1, \xi_2, \xi_3} \sum_{j=1}^p & \left[\lambda_1 m_{\beta_j}^2 + \frac{\lambda_1}{3} m_{\beta_j} (r_{\beta_j} - l_{\beta_j}) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_1}{12} (l_{\beta_j}^2 + r_{\beta_j}^2) \right] + \lambda_2 m_{\beta}^2 \\ & + \frac{\lambda_2}{3} m_{\beta} (r_{\beta} - l_{\beta}) + \frac{\lambda_2}{12} (l_{\beta}^2 + r_{\beta}^2) \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\xi_{li}^2 + \frac{1}{3} \xi_{li} (\xi_{ri} - \xi_{li}) + \frac{1}{12} (\xi_{ri}^2 - \xi_{li}^2) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن

$$\begin{aligned} m_{\beta}^t x_i + m_{\beta} - m_{Y_i} &= \xi_{li}, \\ l_{\beta}^t x_i + l_{\beta} - l_{Y_i} &= \xi_{ri}, \\ r_{\beta}^t x_i + r_{\beta} - r_{Y_i} &= \xi_{ri} \end{aligned}$$

است و $m_{\beta} = (m_{\beta_1}, \dots, m_{\beta_p})^t$ و $l_{\beta} = (l_{\beta_1}, \dots, l_{\beta_p})^t$ و همچنین $\xi_1 = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1n})^t$ و $r_{\beta} = (r_{\beta_1}, \dots, r_{\beta_p})^t$ و $\xi_2 = (\xi_{21}, \dots, \xi_{2n})^t$ و $\xi_3 = (\xi_{31}, \dots, \xi_{3n})^t$ بردارها هستند. برای راه حل مسئله ۱۳ را به دست آوریم با معرفی ضرایب لاگرانژ $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})^t$ و $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n})^t$ و $\alpha_3 = (\alpha_{31}, \dots, \alpha_{3n})^t$ در $\mathfrak{R}^p$ تابع L را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} L(m_{\beta}, l_{\beta}, r_{\beta}, m_{\beta}, l_{\beta}, r_{\beta}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ = \lambda_1 \sum_{j=1}^p \left[m_{\beta_j}^2 + \frac{1}{3} m_{\beta_j} (r_{\beta_j} - l_{\beta_j}) + \frac{1}{12} (l_{\beta_j}^2 + r_{\beta_j}^2) \right] \\ + \lambda_2 (m_{\beta}^2 + \frac{1}{3} m_{\beta} (r_{\beta} - l_{\beta}) + \frac{1}{12} (l_{\beta}^2 + r_{\beta}^2)) \\ + \sum_{i=1}^n \left[\xi_{li}^2 + \frac{1}{3} \xi_{li} (\xi_{ri} - \xi_{li}) + \frac{1}{12} (\xi_{ri}^2 - \xi_{li}^2) \right] \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_{li} \left[\sum_{j=1}^p m_{\beta_j} x_{ij} + m_{\beta} - m_{Y_i} - \xi_{li} \right] \end{aligned}$$

(مونتگمری [۱۱] را ببینید)

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

با الهام از تعریف ضریب تعیین (R^2) در آمار کلاسیک، برای مدل‌های رگرسیونی فازی، ضریب تعیین تعمیم یافته را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۴. در مدل رگرسیون خطی فازی (۸) اگر متغیر وابسته $Y = (m_Y, l_Y, r_Y)$ و مقدار پیش‌بینی آن توسط مدل رگرسیون فازی $\hat{Y} = (m_{\hat{Y}}, l_{\hat{Y}}, r_{\hat{Y}})$ باشند، ضریب تعیین تعمیم یافته برای مدل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$R_G^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d^2(\hat{Y}_i, \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n d^2(Y_i, \bar{Y})}. \quad (18)$$

قضیه ۲.۴. ضریب تعیین مدل رگرسیونی فازی با خروجی فازی مثالی با استفاده از فاصله موزون بین دو عدد فازی در رابطه (۶) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} R_G^2 = & \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(m_{\hat{Y}_i} - m_{\bar{Y}})^2 + \frac{1}{3} (m_{\hat{Y}_i} - m_{\bar{Y}}) \right. \right. \\ & \times \left. \left[(r_{\hat{Y}_i} - r_{\bar{Y}}) - (l_{\hat{Y}_i} - l_{\bar{Y}}) \right] \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{12} \left[(l_{\hat{Y}_i} - l_{\bar{Y}})^2 + (r_{\hat{Y}_i} - r_{\bar{Y}})^2 \right] \right] \right\} \\ & \div \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(m_{Y_i} - m_{\bar{Y}})^2 + \frac{1}{3} (m_{Y_i} - m_{\bar{Y}}) \right. \right. \\ & \times \left. \left[(r_{Y_i} - r_{\bar{Y}}) - (l_{Y_i} - l_{\bar{Y}}) \right] \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{12} \left[(l_{Y_i} - l_{\bar{Y}})^2 + (r_{Y_i} - r_{\bar{Y}})^2 \right] \right] \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

اثبات. با توجه به تعریف ۱.۴ و استفاده از فاصله موزون بین دو عدد فازی در رابطه (۶) نتیجه به سادگی به دست می‌آید. $\square$

علاوه بر معیار R^2 ، می‌توان از میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MPE) به عنوان معیار دیگری برای ارزیابی نیکویی برازش استفاده کرد. در زیر، مشابه قضیه ۲.۴، معیار MPE را در قالب یک تعریف می‌آوریم.

تعریف ۳.۴. تحت مفروضات مدل رگرسیونی ۸ اگر $\hat{Y}_i$ مقدار پیشگویی Y_i باشد، آنگاه میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MPE) برابر است با

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(Y_i, \hat{Y}_i).$$

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} L = & -\frac{3}{4} \alpha_1^t \left(\frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \alpha_1 \\ & - 3 \alpha_1^t \left(\frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \alpha_2 + 3 \alpha_1^t \left(\frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \alpha_3 \\ & - 6 \alpha_2^t \left(\frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \alpha_2 + 6 \alpha_2^t \left(\frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \alpha_3 \\ & - 6 \alpha_3^t \left(\frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \alpha_3 - \frac{3}{4} \alpha_1^t \alpha_1 - 3 \alpha_1^t \alpha_2 + 3 \alpha_1^t \alpha_3 \\ & - 6 \alpha_2^t \alpha_2 + 6 \alpha_2^t \alpha_3 - 6 \alpha_3^t \alpha_3 - \alpha_1^t m_Y - \alpha_1^t l_Y - \alpha_1^t r_Y. \end{aligned} \quad (16)$$

با استفاده از روش مشتق گیری ضرایب لاگرانژ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = & \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) \left(\frac{3}{4} \alpha_1 + 3 \alpha_2 - 3 \alpha_3 \right) + m = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = & \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) (3 \alpha_1 + 12 \alpha_2 - 6 \alpha_3) + l = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_3} = & \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right) (-3 \alpha_1 - 6 \alpha_2 + 12 \alpha_3) + r = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

سپس با استفاده از معادلات ۱۵ و (۱۶) مسئله مینیم سازی (۱۳) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} m_{\beta} &= \frac{A^t}{\lambda_1} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} m, \\ l_{\beta} &= \frac{A^t}{\lambda_1} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} l, \\ r_{\beta} &= \frac{A^t}{\lambda_1} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} r, \\ m_{\beta} &= \frac{e^t}{\lambda_2} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} m, \\ l_{\beta} &= \frac{e^t}{\lambda_2} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} l, \\ r_{\beta} &= \frac{e^t}{\lambda_2} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} r. \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر بردار ورودی دقیق $x \in \mathbb{R}^n$ با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی ۸ و خروجی فازی $Y = (m_Y, l_Y, r_Y)$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} x^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A^t}{\lambda_1} \\ \frac{e^t}{\lambda_2} \end{bmatrix} \left(I + \frac{AA^t}{\lambda_1} + \frac{ee^t}{\lambda_2} \right)^{-1} (m, l, r).$$

$\square$

۴ معیار نیکویی برازش

یکی از شاخص‌های ارزیابی نیکویی برازش مدل رگرسیون آماری، محاسبه ضریب تعیین (R^2) مدل به صورت زیر است

۵ تعیین پارامترهای ستیغی λ_1, λ_2

در این بخش، رفتار برآوردگر ستیغی دوپارامتری فازی را از نظر دقت پیشگویی بر اساس پارامترهای λ_1, λ_2 در داده‌های واقعی بررسی می‌کنیم.

۱.۵ داده‌های سیمان پرتلند

در این مثال، داده‌های وود^۶ و همکاران [۱۲] را مورد استفاده قرار می‌دهیم. این داده‌ها از مطالعه تأثیر ترکیبات مختلف بر روی حرارت بیرون آمده در طول سخت شدن سیمان پرتلند به دست آمده است. در این جا داده‌هایی را که از چهار ترکیب $(x_1) 3CaO.Al_2O_3$ ، $(x_2) 3CaO.SiO_2$ ، $(x_3) 4CaO.Al_2O_3.Fe_2O_3$ و $(x_4) 2CaO.SiO_2$ و میزان گرمای بیرون آمده بعد از ۸۰ روز (y) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به برخی ابهامات در اندازه‌گیری‌های مربوط به مشاهدات متغیر پاسخ، برای مدلبندی این ابهام، این اعداد با استفاده از یک عدد فازی مثلی با پهنای راست و چپ متناسب با y فازی سازی شده‌اند. چون ورودی‌ها دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان دادن میزان هم خطی میان متغیرهای مستقل استفاده می‌کنیم که

$$VIF_1 = 38, \quad VIF_2 = 254,$$

$$VIF_3 = 46, \quad VIF_4 = 250.$$

مدل رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی (۱۰) را با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به‌ازای $\lambda_1 = 0.1$ و $\lambda_2 = 0.0001$ مینیمم کرده‌ایم. برآورد ضرایب رگرسیونی به‌صورت زیر است.

$$\hat{Y}_1 = (62/264, 12/0.95) + (1/545, 0/421)x_1 + (0/514, 0/164)x_2 + (0/087, 0/057)x_3 - 0/140x_4.$$

با توجه به بزرگتر از ۱۰ بودن همه مقادیر VIF ، وجود هم خطی میان متغیرهای مستقل تأیید می‌شود و بنا بر این لزوم استفاده از رگرسیون ستیغی فازی محرز است. در این جا با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی، مقادیر مختلفی به ضرایب λ_1, λ_2 داده‌ایم و سپس MPE را محاسبه کرده‌ایم، که در مثال زیر کمترین مقدار MPE مربوط به $\lambda_1 = 0.1$ و $\lambda_2 = 0.0001$ برابر با ۳/۵۷۷۷ است (جدول ۱ و شکل‌های ۲ و ۳).

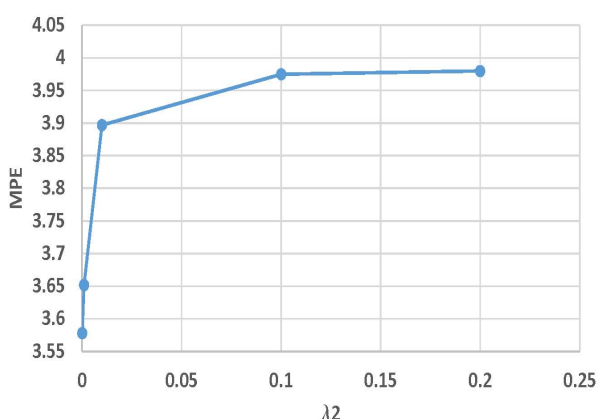
جدول ۱. محاسبه MPE به‌ازای λ_1 ها و λ_2 های مختلف در داده‌های سیمان پرتلند با استفاده از مدل رگرسیون ستیغی فازی

ردیف	λ_1	λ_2	MPE
۱	۰/۱	۰/۰۰۰۱	۳/۵۷۷۷
۲	۰/۱	۰/۱	۳/۹۷۴۸
۳	۰/۱	۰/۵	۳/۹۴۸۵۵
۴	۰/۱	۱	۳/۹۸۴۰۹
۵	۰/۱	۵	۳/۹۸۴۹۴
۶	۰/۱	۱۰	۳/۹۸۵۰۴
۷	۰/۵	۰/۱	۳/۹۷۳۱۴
۸	۱	۰/۱	۳/۹۷۲۱۹
۹	۵	۰/۱	۴/۰۰۴۶۱
۱۰	۱۰	۰/۱	۴/۱۲۵۵۲

ضریب تعیین تعمیم‌یافته این مدل برابر با ۰/۹۸ است. در این مثال که داده‌ها دارای هم خطی‌اند، اگر مسئله بهینه‌سازی را برای مدل رگرسیون فازی معمولی به کار ببریم مدل به‌صورت زیر پیش‌بینی می‌شود.

$$\hat{Y}_2 = (65/675, 12/0.94) + (1/510, 0/421)x_1 + (0/479, 0/164)x_2 + (0/052, 0/058)x_3 - 0/175x_4$$

و مقدار MPE برابر با ۳/۹۸۶۰۴ می‌شود که به‌وضوح مشخص است که با استفاده از رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی به‌جای رگرسیون فازی، خطای مدل کاهش می‌یابد.



شکل ۲. نمودار MPE در برابر مقادیر مختلف λ_2 به‌ازای

مقادیر ثابت $\lambda_1 = 0.1$ برای داده‌های سیمان پرتلند

نتایج برآورد مدل رگرسیون فازی و مدل رگرسیون ستیغی فازی به‌ازای $\lambda_1 = 0.1$ و $\lambda_2 = 0.0001$ در جدول ۲ آمده است.

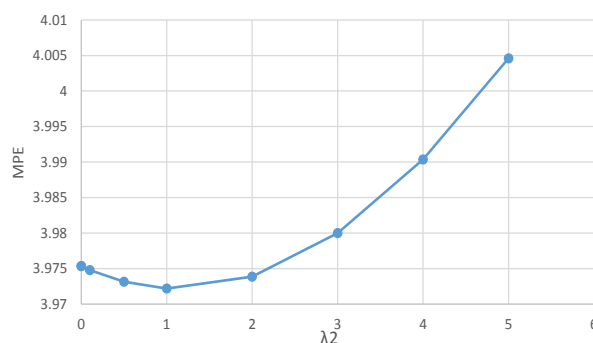
رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی (۱۰) به ازای $\lambda_1 = 0/001$ و $\lambda_2 = 0/1$ را با استفاده از نرم افزار Mathematica مینیمم کرده ایم. برآورد ضرایب مدل رگرسیون ستیغی فازی به صورت زیر به دست می آید.

$$\hat{Y} = (0/710, 0/552, 0) + (0/304, 0, 0/287)x_1 + (0/111, 0/047, 0) \times x_2 + (0/270, 0, 0/116)x_3 + (0/065, 0/001, 0)x_4$$

ضریب تعیین مدل به ازای مقادیر بهینه پارامترهای λ_1 و λ_2 برابر با ۰/۹۹۲ می شود. همچنین مقدار MPE برای مدل رگرسیون فازی برابر با ۰/۰۰۲۸۹ است. در جدول ۳ نتایج مربوط به برآورد مدل رگرسیون ستیغی فازی و برآورد مدل رگرسیون فازی با توجه به رابطه (۹) ارائه شده است و همچنین با توجه به رابطه (۶) خطای مدل در رگرسیون فازی و رگرسیون ستیغی فازی به دست آمده است، که با توجه به مقدار MPE درمی یابیم که خطای مدل در رگرسیون ستیغی فازی نسبت به رگرسیون فازی کاهش می یابد.

۶ نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید برآورد براساس مدل رگرسیون ستیغی فازی ارائه کردیم که در آن پارامترهای شیب و عرض از مبدأ هر کدام به اندازه های متفاوتی جریمه می شوند. برای این منظور، برآوردگر ستیغی فازی دوپارامتری را محاسبه کردیم و با تعریف ضریب تعیین فازی و خطای پیشگویی مدل رگرسیونی تعریف شده در این مقاله به ارزیابی این مدل در قالب مثال های عددی واقعی پرداختیم و مشاهده کردیم که به ازای برخی مقادیر ثابت از پیش تعیین شده برای یک پارامتر ستیغی، با افزایش پارامتر ستیغی دیگر، روند صعودی یا نزولی در دقت پیشگویی به دست می آید. در نهایت با معرفی شاخص های نیکویی برازش، مدل رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی را با مدل رگرسیون فازی معمولی مقایسه کردیم.



شکل ۳. نمودار MPE در برابر مقادیر مختلف λ_1 به ازای

مقادیر ثابت $\lambda_2 = 0/1$ برای داده های سیمان پرتلند

۲.۵ داده های تولید ناخالص ملی

در این مثال، داده های هزینه های تحقیق و تولید ملی خام به عنوان درصدی از تولید ناخالص ملی کشور آمریکا را در بین سال های ۱۹۷۲ تا ۱۹۸۳ بررسی می کنیم. (آکدنیز و ارول [۱۳]) این داده ها رابطه بین (متغیر وابسته Y) درصد مخارج کشور ایالت متحده آمریکا و درصد مخارج ۴ کشور دیگر (متغیرهای مستقل X_1, X_2, X_3, X_4)، به ترتیب فرانسه، آلمان، ژاپن و شوروی سابق را نشان می دهد. با توجه به برخی ابهامات در اندازه گیری های مربوط به مشاهدات متغیر پاسخ، با مشورت یک فرد متخصص با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهنای راست و چپ متناسب با y فازی سازی شده اند. چون ورودی ها دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان دادن میزان همبستگی میان متغیرهای مستقل استفاده می کنیم، که

$$VIF_1 = 6, \quad VIF_2 = 24,$$

$$VIF_3 = 29, \quad VIF_4 = 1.$$

با توجه به مقادیر VIF وجود هم خطی میان متغیرهای مستقل تأیید می شود و بنا بر این استفاده از رگرسیون ستیغی محرز است. در این مثال نیز مانند مثال قبل به ازای مقادیر مختلف پارامترهای ستیغی λ_1 و λ_2 و مقدار MPE را محاسبه کرده ایم که به ازای $\lambda_1 = 0/001$ و $\lambda_2 = 0/1$ مقدار MPE برابر ۰/۰۰۰۹۵۸ است که کمترین مقدار خود را از بین مقادیر پیشنهادی می گیرد. مدل

جدول ۲. مقایسه رگرسیون ستیغی فازی و رگرسیون فازی در داده‌های سیمان پرتلند با استفاده از شاخص MPE

ردیف	X_1	X_2	X_3	X_4	Y	رگرسیون فازی $\hat{Y}_1$	رگرسیون ستیغی فازی $\hat{Y}_2$	$d^2(Y, \hat{Y}_1)$	$d^2(Y, \hat{Y}_2)$
۱	۷	۲۶	۶	۶۰	(۷۸/۵, ۱۹/۶۲۵)	(۷۹/۱۵۷, ۱۹/۷۸۹)	(۷۸/۵۳۹, ۱۹/۶۳۴)	۰/۴۳۶	۰/۰۰۱
۲	۱	۲۹	۱۵	۵۲	(۷۴/۳, ۱۸/۵۷۵)	(۷۲/۲۷۹, ۱۸/۰۶۹)	(۷۲/۷۲۵, ۱۸/۱۸۱)	۴/۱۲۴	۲/۵۰۴
۳	۱۱	۵۶	۸	۲۰	(۱۰۴/۳, ۲۶/۰۷۵)	(۱۰۴/۴۹۸, ۲۶/۱۲۴)	(۱۰۵/۹۶۹, ۲۶/۴۹۲)	۰/۰۳۹	۲/۸۱۴
۴	۱۱	۳۱	۸	۴۷	(۸۷/۶, ۲۱/۹)	(۸۸/۷۴۳, ۲۲/۱۸۵)	(۸۹/۲۹۸, ۲۲/۳۲۴)	۱/۳۲۱	۲/۹۱۴
۵	۷	۵۲	۶	۳۳	(۹۵/۹, ۲۳/۹۷۵)	(۹۶/۰۷۰, ۲۴/۰۱۷)	(۹۵/۷۲۴, ۲۳/۹۳۱)	۰/۰۲۹	۰/۰۱۳
۶	۱۱	۵۵	۹	۲۲	(۱۰۹/۲, ۲۷/۳)	(۱۰۵/۰۵۰, ۲۶/۲۶۲)	(۱۰۵/۲۶۰, ۲۶/۳۱۵)	۱۷/۴۰۲	۱۵/۶۸۶
۷	۳	۷۱	۱۷	۶	(۱۰۲/۷, ۲۵/۶۷۵)	(۱۰۴/۲۴۲, ۲۶/۰۶۰)	(۱۰۴/۰۸۷, ۲۶/۰۲۱)	۲/۴۰۳	۱/۹۴۴
۸	۱	۳۱	۲۲	۴۴	(۷۲/۵, ۱۸/۱۲۵)	(۷۵/۸۰۹, ۱۸/۹۵۲)	(۷۵/۴۹۳, ۱۸/۸۷۳)	۱۱/۰۶۵	۹/۰۵۲
۹	۲	۵۴	۱۸	۲۲	(۹۳/۱, ۲۳/۲۷۵)	(۹۰/۹۳۵, ۲۲/۷۳۳)	(۹۱/۶۲۵, ۲۲/۹۰۶)	۴/۷۳۲	۲/۱۹۵
۱۰	۲۱	۴۷	۴	۲۶	(۱۱۵/۹, ۲۸/۹۷۵)	(۱۱۵/۷۹۶, ۲۸/۹۴۹)	(۱۱۵/۵۹۳, ۲۸/۸۹۸)	۰/۰۱۰	۰/۰۹۵
۱۱	۱	۴۰	۲۳	۳۴	(۸۳/۳, ۲۰/۸۲۵)	(۸۲/۰۷۶, ۲۰/۵۱۹)	(۸۱/۶۲۱, ۲۰/۴۰۵)	۱/۵۱۳	۲/۸۴۶
۱۲	۱۱	۶۶	۹	۱۲	(۱۱۳/۳, ۲۸/۳۲۵)	(۱۱۲/۹۰۱, ۲۸/۲۲۵)	(۱۱۲/۳۳, ۲۸/۰۸۲)	۰/۱۶۰	۰/۹۵۰
۱۳	۱۰	۶۸	۸	۱۲	(۱۰۹/۴, ۲۷/۳۵)	(۱۱۲/۳۱۴, ۲۸/۰۷۸)	(۱۱۱/۷۲۷, ۲۷/۹۳۱)	۸/۵۷۸	۵/۴۷۲
MPE								۳/۹۸۶۰۴	۳/۵۷۷۷

جدول ۳. مقایسه رگرسیون فازی و رگرسیون ستیغی فازی در داده‌های تولید ناخالص ملی

ردیف	X_1	X_2	X_3	Y	$\hat{Y}_1$ رگرسیون فازی	$\hat{Y}_2$ رگرسیون ستیغی فازی	$d^2(Y, \hat{Y}_1)$	$d^2(Y, \hat{Y}_2)$
۱	۱/۹	۲/۲	۱/۹	۳/۷ (۲/۳, ۰/۵۷۵, ۰/۸۰۴)	(۲/۲۲۹, ۰/۵۵۷, ۰/۷۸۰)	(۲/۲۵۹, ۰/۵۶۴, ۰/۷۹۰)	۰/۰۰۵۱۵	۰/۰۰۱۷
۲	۱/۸	۲/۲	۲	۳/۸ (۲/۲, ۰/۵۵, ۰/۷۷)	(۲/۲۵۷, ۰/۵۶۴, ۰/۷۹۰)	(۲/۲۲۶, ۰/۵۵۶, ۰/۷۷۹)	۰/۰۰۳۴۷	۰/۰۰۰۷
۳	۱/۸	۲/۴	۲/۱	۳/۶ (۲/۲, ۰/۵۵, ۰/۷۷)	(۲/۲۷۳, ۰/۵۶۸, ۰/۷۹۵)	(۲/۲۲۸, ۰/۵۵۷, ۰/۷۸۰)	۰/۰۰۵۶۷	۰/۰۰۰۹
۴	۱/۸	۲/۴	۲/۱	۳/۶ (۲/۳, ۰/۵۷۵, ۰/۸۰۴)	(۲/۳۴۵, ۰/۵۸۶, ۰/۸۲۰)	(۲/۲۷۳, ۰/۵۶۸, ۰/۷۹۵)	۰/۰۰۲۱۳	۰/۰۰۰۷
۵	۲	۲/۵	۲/۳	۳/۸ (۲/۴, ۰/۶, ۰/۸۴)	(۲/۴۲۸, ۰/۶۰۷, ۰/۸۵۰)	(۲/۴۲۴, ۰/۶۰۶, ۰/۸۴۸)	۰/۰۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۶
۶	۲/۱	۲/۶	۲/۴	۳/۷ (۲/۵, ۰/۶۲۵, ۰/۸۷۵)	(۲/۴۶۸, ۰/۶۱۷, ۰/۸۶۳)	(۲/۴۹۷, ۰/۶۲۴, ۰/۸۷۳)	۰/۰۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰۱
۷	۲/۱	۲/۶	۲/۶	۳/۸ (۲/۶, ۰/۶۵, ۰/۹۰۹)	(۲/۵۳۸, ۰/۶۳۴, ۰/۸۸۸)	(۲/۵۴۲, ۰/۶۳۵, ۰/۸۸۹)	۰/۰۰۰۳۹	۰/۰۰۰۳۴
۸	۲/۲	۲/۶	۲/۶	۴ (۲/۶, ۰/۶۵, ۰/۹۰۹)	(۲/۶۰۶, ۰/۶۵۱, ۰/۹۱۲)	(۲/۶۳۵, ۰/۶۵۸, ۰/۹۲۲)	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱۴
۹	۲/۳	۲/۸	۲/۸	۳/۷ (۲/۷, ۰/۶۷۵, ۰/۹۴۵)	(۲/۶۴۱, ۰/۶۶۰, ۰/۹۲۴)	(۲/۷۰۱, ۰/۶۷۵, ۰/۹۴۵)	۰/۰۰۰۳۵	۰/۰۰۰۰۱
۱۰	۲/۳	۲/۷	۲/۸	۳/۸ (۲/۷, ۰/۶۷۵, ۰/۹۴۵)	(۲/۶۴۵, ۰/۶۶۱, ۰/۹۲۵)	(۲/۷۰۸, ۰/۶۷۷, ۰/۹۴۷)	۰/۰۰۰۳۱	۰/۰۰۰۰۱
MPE							۰/۰۰۲۸۹	۰/۰۰۰۹۶

مراجع

- [۱] کلکین نما، مریم؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۶). رگرسیون فازی بر اساس کمترین قدر مطلق انحرافات. اندیشه آماری، سال ۱۲، شماره ۱ (شماره پیاپی ۲۳) (شماره ویژه دومین کارگاه آمار و احتمال فازی)، صص ۵۹-۶۷.
- [۲] میرزایی یگانه، شهره؛ ارقامی، ناصررضا (۱۳۸۶). رگرسیون فازی: مروری بر چند رویکرد. اندیشه آماری، سال ۱۲، شماره ۱ (شماره پیاپی ۲۳) (شماره ویژه دومین کارگاه آمار و احتمال فازی)، صص ۳۵-۴۷.

- [3] Asai, H. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, **12**, 903-907.

- [4] Hong, D. H. Hwangb, C. Ahna, C. (2004). Ridge estimation for regression models with crisp inputs and Gaussian fuzzy output, *Fuzzy Sets and Systems*, **142(2)**, 307-319.
- [5] Cheng, C. B. Lee, E. S (2001). Fuzzy regression with radial basis function network *Fuzzy Sets and Systems*, **119(2)**, 291-301.
- [6] Hoerl, A. E. Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems, *Technometrics*, **12**, 55-67,
- [7] Farnoosh, R. Ghasemian, J. and Solaymani Fard, O. (2012). A modification on ridge estimation for fuzzy nonparametric regression, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **9(2)** , 75-88.
- [8] Balasundaram, S., Kapil (2011). Weighted fuzzy ridge regression analysis with crisp inputs and triangular fuzzy outputs *International Journal of Advanced Intelligence Paradigms*, **3(1)**, 67-81.
- [9] Zadeh, L. A. and et.al, (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility *Fuzzy sets and systems* , **1(3-28)**, 61-72.
- [10] Xu, R. (1991). A linear regression model in fuzzy environment. *Advance in Modelling Simulation*, **27(2)**.
- [11] Montgomery, Douglas C. Elizabeth A. Peck (1992). *Introduction to linear regression analysis*, Wiley and Sons.
- [12] Woods, H., Steinour, H. H., & Starke, H. R. (1932). Effect of composition of Portland cement on heat evolved during hardening. *Industrial & Engineering Chemistry* , **24(11)**, 1207-1214.
- [13] Akdeniz, F. Erol, H. (2003). Mean squared error matrix comparisons of some biased estimators in linear regression, *Communications in Statistics-Theory and Methods* , **32(12)**, 2389-2413.