# توزیع‌های $\alpha$-تک‌مدی و $\alpha$-یکنوای گسسته

فاطمه عسگری [۱]

چکیده:

یکی از ساختارهای ساختمانی توزیع‌ها، خاصیت تک‌مدی بودن آن‌هاست که این خاصیت، مانند چولگی، کشیدگی و تقارن، در شکل تابع، قابل مشاهده است. هنگام مقایسه‌ی دو توزیع کاملا متفاوت، یک آماردان کار بسیار سختی خواهد داشت، اما اگر هر دو توزیع از یک نوع، برای مثال هر دو تک‌مدی باشند کافیست برای مقایسه مدها، پراکندگی‌ها و چولگی‌ها را مقایسه کنیم. بنابراین مفهوم تک‌مدی و تعمیم آن $\alpha$-تک‌مدی بودن توزیع‌ها و مشخص‌سازی آن‌ها در مقایسه‌ی دو توزیع، اهمیت زیادی دارد. در طول این مقاله، مفهوم تک‌مدی و تعمیم آن یعنی $\alpha$-تک‌مدی را برای متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته بررسی و در ادامه مفهوم یکنوایی و $\alpha$-یکنوایی توزیع‌ها را که یکی دیگر از خواص توزیع‌هاست، مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین در پایان، کاربرد توزیع‌های $\alpha$-تک‌مدی گسسته را در یافتن کران‌های بالای واریانس ارائه می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** تک‌مدی، کران بالا، گسسته، مشخص‌سازی، $\alpha$-یکنوایی

## ۱ مقدمه

بررسی خاصیت تک‌مدی[۲]توزیع‌ها، در اصل در پایان قرن نوزدهم با مقایسه‌ی تابع چگالی توزیع متغیرهای تصادفی مختلف با توابع تک‌مدی آغاز گردیده است، که برای هر دو نوع توزیع‌های گسسته و پیوسته به کار می‌رود. تعریف رسمی خاصیت تک‌مدی به صورت زیر است:

**تعریف ۱.۱.** یک متغیر تصادفی $Z$ با تابع توزیع $F$ را تک‌مدی (حول $a$) گوئیم، اگر $F$ در فاصله‌ی $(-\infty,a)$ محدب (تقعر رو به بالا) و در فاصله‌ی $(a,\infty)$ مقعر (تقعر رو به پایین) باشد.

بنابراین با توجه به این تعریف، اگر تابع چگالی $Z$ موجود و آن را با $f$ نشان دهیم، متغیر تصادفی $Z$ را تک‌مدی (حول $a$) گوئیم، اگر تابع چگالی آن در فاصله‌ی $(-\infty,a)$ صعودی اکید و در فاصله‌ی $(a,\infty)$ نزولی اکید باشد.

اکثر توزیع‌های معروف، مانند نرمال، خی‌دو، $t$-استیودنت، کوشی، نمایی و $\cdots$ تک‌مدی هستند. برای مثال، توزیع نرمال استاندارد را در نظر بگیرید که مشتق تابع چگالی آن به صورت زیر است

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

همانطور که می‌بینید با توجه به رابطه‌ی فوق، تابع چگالی این توزیع، در فاصله‌ی $(-\infty,0)$ صعودی اکید و در فاصله‌ی $(0,\infty)$ نزولی اکید است. پس توزیع نرمال استاندارد یک توزیع تک‌مدی (حول مبدأ) است.

بنابر تعریف ۱.۱، اگر $Z$ یک متغیر تصادفی تک‌مدی حول $a$ باشد، تابع توزیع $Z$ در فاصله‌ی $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ پیوسته‌ی مطلق است و تنها در نقطه‌ی $a$ می‌تواند گسسته باشد. بنابراین تنها متغیر تصادفی تک‌مدی گسسته، متغیر تصادفی تباهیده (در نقطه‌ی $a$) است. لذا، مشابها خاصیت تک‌مدی برای توزیع‌های گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود.

**تعریف ۲.۱.** یک توزیع گسسته با تابع جرم احتمال $(p_n)$ را روی مجموعه‌ی اعداد صحیح تک‌مدی (حول $n_0$) نامند، اگر در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\begin{cases} p_n\geq p_{n-1}, & n\leq n_0\\ p_n\geq p_{n+1}, & n\geq n_0. \end{cases} \qquad (۱)$$

برای توزیع‌های تک‌مدی گسسته توزیع‌هایی چون برنولی، دو جمله‌ای، هندسی، پواسون و $\cdots$ را می‌توان نام برد. برای مثال، در توزیع پواسون داریم:

$$p_n=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

که اگر $\lambda$ عددی صحیح باشد، رابطه‌ی (۱) با $n_0=\lambda,\lambda+1$ برقرار

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد آمار دانشگاه اصفهان

[۲] Unimodal

است و در غیر اینصورت داریم $n_0 = [\lambda]$.

## ۲ مشخص‌سازی توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی و $\alpha$–یکنوای گسسته

خین‌چین [۱۱] مشخص‌سازی توزیع‌های تک‌مدی را با استفاده از روابط میان متغیرهای تصادفی بررسی کرد. او ثابت کرد که یک متغیر تصادفی $Z$ تک‌مدی (حول مبدا) است، اگر و تنها اگر یک متغیر تصادفی $X$ مستقل از $U$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که رابطه‌ی

$$Z \stackrel{d}{=} UX, \qquad (۲)$$

برقرار باشد، که در آن $U$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله‌ی (۰،۱) و مستقل از $X$ است.

پس از آن اولشن و ساویج [۱۳] مفهوم تک‌مدی را به $\alpha$–تک‌مدی تعمیم دادند و توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی پیوسته را مشخص‌سازی کردند. با توجه به تعریف آن‌ها، یک متغیر تصادفی $Z$ را $\alpha$–تک‌مدی (حول مبدأ) گویند اگر و تنها اگر یک متغیر تصادفی $X$ مستقل از $U$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$Z \stackrel{d}{=} U^{\frac{1}{\alpha}} X, \qquad (۳)$$

که در آن $\alpha > 0$ مقداری ثابت و $U$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله‌ی (۰،۱) و مستقل از $X$ است. اولشن و ساویج [۱۳] همچنین ثابت کردند که این تعریف، معادل است با اینکه رابطه‌ی

$$S(\alpha,t,f) = t^{\alpha} E\{f(tZ)\} \qquad t>0, \qquad (۴)$$

برای هر تابع کران دار، نامنفی و اندازه‌پذیر $f$، نسبت به $t$ غیر نزولی باشد. پس از آن ابواموه [۲] یک تعریف مشابه برای توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته به دست آورد، که تعریف او نادرست بود و بعدا توسط استیوتل [۱۴] و علامت‌ساز [۸] اصلاح شد. یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)$ روی مجموعه‌ی اعداد صحیح (حول مبدا) $\alpha$–تک‌مدی است، اگر در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\begin{cases} (i)(\alpha-n)p_n \geq (1-n)p_{n-1}, & n\leq 0 \\ (ii)(\alpha+n)p_n \geq (1+n)p_{n+1}, & n\geq 0. \end{cases} \qquad (۵)$$

با توجه به تعریف توزیع‌های تک‌مدی گسسته و رابطه‌ی (۱)، اگر یک متغیر تصادفی، تک‌مدی حول مبدا باشد، به ازای $\alpha \geq 1$ رابطه‌ی (۵) همواره برقرار است. بنابراین همه‌ی توزیع‌های تک‌مدی گسسته برای $\alpha \geq 1$، $\alpha$–تک‌مدی نیز هستند. سپس ابواموه [۳] ادعا کرد که یک توزیع شبکه‌ای با تابع جرم احتمال $(p_n)$ با گشتاور اول متناهی و تابع توزیع $P_n = \sum_{k=-\infty}^{n} p_k$، $\alpha$–تک‌مدی (حول مبدأ) است، اگر و تنها اگر

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1} n p_n, \qquad n\in Z, \qquad (۶)$$

یک تابع توزیع گسسته باشد.

اما مثال زیر نشان می‌دهد که این نتیجه نادرست و بنابراین مشخص‌سازی‌های بعدی او نیز نادرست هستند.

**مثال ۱.۲.** فرض کنید $\alpha = 2$ باشد. یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)$ که در جدول ۱ داده شده است، در نظر بگیرید.

با توجه به جدول ۱، $Q_n$ یک تابع توزیع گسسته است زیرا همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $Q_n$ غیر نزولی، از راست پیوسته و $Q_{\infty} = 1$ و $Q_{-\infty} = 0$ است. اما $p_n$، ۲–تک‌مدی نیست، زیرا رابطه‌ی ($5.ii$) برای $n=2$ برقرار نیست. □

بنابراین نتیجه‌ی ابواموه در حالت کلی نادرست است.

علامت‌ساز [۸] توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته را براساس تابع توزیع، مشخص‌سازی کرد.

**قضیه ۲.۲.** یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)$، $\alpha$–تک‌مدی است، اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{(\alpha P_n - n p_n)}{(\alpha + p_1)}, & n\leq 0 \\ &= \frac{(\alpha P_n + p_1 - (n+1)p_{n+1})}{(\alpha+p_1)}, & n\geq 0, \end{aligned}$$

یک تابع توزیع گسسته باشد.

حال مفهوم $\alpha$–یکنوایی توزیع‌ها را که یکی دیگر از خواص توزیع‌هاست، ابتدا بر حسب متغیرهای تصادفی و سپس با استفاده از مفهوم $\alpha$–تک‌مدی گسسته برای متغیرهای تصادفی شبکه‌ای گسسته بیان می‌کنیم. استیوتل [۱۴] توزیع‌های $\alpha$–یکنوای گسسته را براساس روابط میان متغیرهای تصادفی، به صورت زیر مشخص‌سازی کرد.

**تعریف ۳.۲.** متغیر تصادفی شبکه‌ای $Z$ با تکیه‌گاه $N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$، $\alpha$–یکنوا است، اگر وتنها اگر متغیر تصادفی

$X$ مستقل از $U$ وجود داشته باشد به طوریکه رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$Z \stackrel{d}{=} U^{\frac{1}{\alpha}} \oplus X, \tag{۷}$$

که در آن متغیر تصادفی $U$ دارای توزیع یکنواخت در فاصله‌ی (۰,۱) است و $c \oplus X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$، که $Y_i$ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع برنولی با $P(Y_1 = 1) = c$ هستند.

استیوتل [۱٤] و علامت‌ساز [۸] ثابت کردند که توزیع‌های $\alpha$-یکنوا را با استفاده از تابع مولد احتمال نیز می‌توان مشخص‌سازی کرد و نشان دادند که متغیر تصادفی $Z$ روی $N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$، $\alpha$-یکنوا است، اگر و تنها اگر تابع مولد احتمال آن به شکل زیر باشد

$$P(z) = \alpha(1-z)^{-\alpha} \int_z^1 (1-\omega)^{\alpha-1} Q(\omega) d\omega, \tag{۸}$$

که در آن $Q(\omega)$ تابع مولد احتمال یک متغیر تصادفی روی $N_0$ است.

استیوتل [۱٤] همچنین مفهوم $\alpha$-یکنوایی را با استفاده از مفهوم $\alpha$-تک‌مدی گسسته به صورت زیر به دست آورد.

**قضیه ٤.۲.** یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)$ روی مجموعه‌ی $N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$، $\alpha$-یکنوا است، اگر وتنها اگر در رابطه‌ی($5.ii$) صدق کند و یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)$ را روی مجموعه‌ی $Z_0^- = \{0, -1, -2, \cdots\}$، $\alpha$-یکنوا گوئیم، اگر وتنها اگر در رابطه‌ی ($5.i$) صدق کند.

توزیع هندسی با توجه به فرم تابع چگالی آن، یک توزیع یکنوای گسسته است. بنابراین با توجه به تعریف ٤.۲، این توزیع شبکه‌ای با تابع جرم احتمال $p_n = pq^n$ روی مجموعه‌ی $N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$، برای $\alpha \geq 1$ یک توزیع $\alpha$-یکنوای گسسته است.

در این بخش، روابط موجود بین دو مفهوم $\alpha$-یکنوایی و $\alpha$-تک‌مدی گسسته و برخی خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم:

۱. یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)$، $\alpha$-تک‌مدی است، اگر و تنها اگر $(p_n)_{-\infty}^0$ و $(p_n)_0^\infty$ هر دو $\alpha$-یکنوا باشند.

۲. هر توزیع $\alpha$-یکنوا، $\alpha$-تک‌مدی است.

۳. فرض کنید $c > 0$ یک مقدار ثابت باشد. $(p_n)$، $\alpha$-تک‌مدی ($\alpha$-یکنوا) است، اگر وتنها اگر $(cp_n)$، $\alpha$-تک‌مدی ($\alpha$-یکنوا) باشد.

٤. اگر $(p_n)$، $\alpha$-تک‌مدی ($\alpha$-یکنوا) باشد، آنگاه $(p_n)$ برای $\beta \geq \alpha$، $\beta$-تک‌مدی ($\beta$-یکنوا) است.

۵. یک توزیع $\alpha$-تک‌مدی، دارای تکیه‌گاه اعداد صحیح متوالی با $p_{n_0} > 0$ است که در آن $n_0$ مد است.

٦. $(p_{n+r})_0^\infty$ به ازای همه‌ی مقادیر صحیح $r \geq 0$، $\alpha$-یکنوا است اگر $(p_n)_0^\infty$ $\alpha$-یکنوا باشد. به طور مشابه $\alpha$-یکنوا بودن $(p_n)_{-\infty}^0$ ، $\alpha$-یکنوایی $(p_{n-r})_{-\infty}^0$ را نتیجه می‌دهد.

۷. متغیر تصادفی $X$ روی مجموعه‌ی $Z_0^-$، $\alpha$-یکنوا است، اگر وتنها اگر متغیر تصادفی $-X$ روی مجموعه‌ی $N_0$، $\alpha$-یکنوا باشد.

۸. متغیر تصادفی متقارن $X$ با تابع جرم احتمال $(p_n)$، $\alpha$-تک‌مدی است، اگر وتنها اگر $|X|$، $\alpha$-یکنوا و $\alpha p_0 \geq 2p_1$ باشد.

۹. متغیر تصادفی شبکه‌ای $X$ با تابع جرم احتمال $(p_n)$، $\alpha$-تک‌مدی است، اگر و تنها اگر $X^+$ و $X^-$ هر دو $\alpha$-یکنوا باشند و

$$\alpha p_0 \geq max(p_1, p_{-1}).$$

علامت‌ساز [۸] توزیع‌های $\alpha$-یکنوای گسسته را نیز مشابه با توزیع‌های $\alpha$-تک‌مدی گسسته براساس تابع توزیع، به صورت زیر مشخص‌سازی کرد.

**قضیه ۵.۲.** یک توزیع با تابع جرم احتمال $(p_n)_0^\infty$، $\alpha$-یکنوا است، اگر و تنها اگر

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1}(n+1)p_{n+1}, \qquad n \epsilon N_0,$$

یک تابع توزیع گسسته باشد که در آن $P_n = \sum_{k=-\infty}^{n} p_k$.

## ۱.۲ خاصیت بسته بودن

در این بخش، نشان می‌دهیم که خاصیت $\alpha$-تک‌مدی توزیع‌ها تحت چه اعمالی بسته است.

**تحت همگرایی ضعیف:** از قضیه‌ی (۵.۲) و تعریف (۳.۲) فورا می‌توان نتیجه گرفت که هر دو خاصیت $\alpha$-تک‌مدی و

$\alpha$–یکنوایی گسسته تحت همگرایی ضعیف، بسته هستند. یعنی اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با خاصیت $\alpha$–تک‌مدی ($\alpha$–یکنوایی) باشند و دنباله‌ی $X_n$ به طور ضعیف (در توزیع) همگرا به $X$ باشد، آن‌گاه $X$ نیز یک متغیر تصادفی دارای خاصیت $\alpha$–تک‌مدی ($\alpha$–یکنوایی) است.

**تحت پیچش:** ابواموه [۳] با یک مثال نادرست ادعا کرد که خاصیت $\alpha$–تک‌مدی برای توزیع‌های گسسته، تحت پیچش بسته نیست، اما علامت‌ساز [۸] نادرستی این مثال را اعلام و ثابت کرد که پیچش دو متغیر تصادفی گسسته‌ی $\alpha$ و $\beta$–یکنوا روی $N_0$، یک متغیر تصادفی $\alpha+\beta$–یکنوا روی $N_0$ است.

**تحت آمیختن:** به راحتی می‌توان دید که هر دو کلاس توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی و $\alpha$–یکنوا تحت آمیزش، بسته هستند. هم‌چنین جالب است بدانید که اگرچه یک توزیع پواسون الزاما $\alpha$–یکنوا نیست، اما آمیخته‌ی آن می‌تواند، $\alpha$–یکنوا باشد. آلزید و آلوش [۹] در قضیه‌ی زیر نشان دادند که توزیع آمیخته‌ی پواسون، $\alpha$–یکنوای پیوسته است.

**قضیه ۶.۲.** فرض کنید $(t_m)_0^\infty$ یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشد که به $\infty$ میل می‌کند. آن‌گاه آمیخته‌ی پواسون

$$P_n(t_m)=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-xt_m}(xt_m)^n dG(x),\quad n\in N_0,$$

به ازای هر $t_m$ آلفا–یکنوا است، اگر و تنها اگر $G$ یک توزیع $\alpha$–یکنوا روی $[0,\infty)$ باشد.

# ۳ کران بالای واریانس برای توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته

یکی از کاربردهای توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته، مشخص کردن کران بالای واریانس در این نوع توزیع‌هاست که از این کران‌ها می‌توان در بسیاری از بخش‌های آماری مانند برآورد واریانس و فرآیندهای تصادفی استفاده کرد. در این بخش، کران‌های بالایی را برای واریانس توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته بررسی می‌کنیم. این کران‌ها به تکیه‌گاه و شاخص $\alpha$ بستگی دارند و رابطه‌ی مستقیم بین $\alpha$ و این کران‌ها وجود دارد. دارامادهیکاری [۳] و جواگ–دئو [۴] [۱۰] ثابت کردند که اگر $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع $\alpha$–تک‌مدی (حول $M$) باشد به طوریکه $0\le X\le 1$ و $\mu=E(X)$، آن‌گاه:

$$(\alpha+2)Var(X)\le \mu(\alpha+1+2M)-(\alpha+2)\mu^2-M. \qquad (۹)$$

آن‌ها همچنین در نتایج دیگر نشان دادند که کران بالایی برای واریانس یک توزیع $\alpha$–تک‌مدی پیوسته با تکیه‌گاه $[0,1]$، به صورت

$$\frac{(\alpha+1)^2}{4(\alpha+2)^2}$$

است.

فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی گسسته روی مجموعه‌ی $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ باشد به طوریکه $x_1<x_2<\cdots<x_n$ و $P(X=x_i)=p_i$.

مایلویجک[۵] [۱۲] نشان داد که اگر

$$\mu=\sum x_ip_i,$$

آن‌گاه:

$$Var(X)\le (x_n-\mu)(\mu-x_1). \qquad (۱۰)$$

بنابراین اگر متغیر تصادفی $X$ روی مجموعه‌ی اعداد $\{b,b+1,\cdots,N\}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه:

$$Var(X)\le (N-\mu)(\mu-b),$$

که در آن $b$ و $N$ اعداد صحیح و $N>b\ge 0$ است.

ابواموه، علی و مشهور [۴] به ازای مقادیر $\alpha\ge 1$، یک مشخص‌سازی از توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته به صورت زیر به دست آوردند.

**قضیه ۱.۳.** یک متغیر تصادفی با تابع جرم احتمال $(p_n)$، $n\in I=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$، و تابع مشخصه‌ی $p(t)$، $\alpha$–تک‌مدی (حول $a$) است، اگر و تنها اگر:

$$q(t)=\frac{\{\alpha+a(1-e^{it})\}p(t)}{\alpha}+\frac{i(1-e^{it})p'(t)}{\alpha} \qquad (۱۱)$$

[۳]Dharamaddhikari

[۴] Joag-Dev

[۵]Muilwijk

و

$$r(t)=\frac{\{\alpha+a(e^{-it}-1)\}p(t)}{\alpha}+\frac{i(e^{-it}-1)p'(t)}{\alpha} \quad (۱۲)$$

دو تابع مشخصه باشند.

سپس ابواموه و مشهور [۵] با استفاده از قضیه‌ی فوق، ثابت کردند که اگر $X$ یک متغیر تصادفی $\alpha$-تک‌مدی گسسته (حول $a$) با تابع جرم احتمال $(p_n)$، تکیه‌گاه $S=\{0,1\cdots,N\}$ و واریانس $\sigma^2$ باشد، آن‌گاه یک کران بالای واریانس برای متغیر تصادفی $X$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}(\alpha+2)Var(X)\leq&-(\alpha+2)\mu^2+[(\alpha+1)N+2a)]\mu\\&-Na+\alpha[min\{\mu,(N-\mu)\}], \quad (۱۳)\end{aligned}$$

که با جایگذاری $\alpha=1$ در رابطه‌ی (۱۳) یک کران بالای واریانس برای توزیع‌های تک‌مدی گسسته با تکیه‌گاه $S=\{0,1,\cdots,N\}$ به دست می‌آید.

فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $\{0,1,\cdots,N\}$ باشد. واضح است که در حالت $N=1$، $X$ یک متغیر تصادفی تک‌مدی قوی است. (توزیع‌های تک‌مدی قوی، توزیع‌هایی هستند که پیچش آن‌ها با هر توزیع تک‌مدی دیگر نیز تک‌مدی می‌باشد.) به علاوه فرض می‌کنیم که $X$ مقادیر ۰ و ۱ را به ترتیب با احتمال $q$ و $p$ به طوریکه $p+q=1$ اختیار کند. پس می‌توان گفت که $Var(X)=pq\leq\frac{1}{4}$ و در حالت $p=q=\frac{1}{2}$، تساوی برقرار است.

در ادامه فرض می‌کنیم $N\geq 2$ باشد. فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی $\alpha$-تک‌مدی گسسته (حول $a$) با $\alpha\geq 1$ باشد. حال با توجه به قضیه‌ی (۱.۳)، فرض کنید $X_1$ و $X_2$ دو متغیر تصادفی گسسته با توابع مشخصه‌ی به ترتیب $q(t)$ و $r(t)$ و تکیه‌گاه‌های به ترتیب $S_1=\{0,1,\cdots,N+1\}$ و $S_2=\{-1,0,\cdots,N\}$ و میانگین‌های به ترتیب $\mu_1=E(X_1)$ و $\mu_2=E(X_2)$ باشند. با مشتق‌گیری از دو طرف روابط $q(t)$ و $r(t)$ معین شده در (۱۱) و (۱۲) نسبت به $t$ و قرار دادن $t=0$، رابطه‌ی

$$\mu_1=\mu_2=\alpha^{-1}[(\alpha+1)\mu-a], \quad (۱٤)$$

به دست می‌آید. با توجه به اینکه $S_1$ یک تکیه‌گاه با مقادیر نامنفی و تکیه‌گاه متغیر تصادفی $X_2-N$ یعنی مجموعه‌ی $\{-N-1,-N,-N+1,\cdots,0\}$ یک تکیه‌گاه با مقادیر منفی است پس $\mu_1>0$ و $\mu_2<N$ است. بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱٤) داریم:

$$\frac{a}{\alpha+1}<\mu<\frac{a+N\alpha}{\alpha+1}.$$

از طرف دیگر با توجه به $min\{\mu,N-\mu\}\leq\frac{N}{2}$، رابطه‌ی (۱۳) نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned}(\alpha+2)Var(X)\leq&-(\alpha+2)\mu^2+[(\alpha+1)N+2a)]\mu\\&-Na+\alpha\frac{N}{2}. \quad (۱۵)\end{aligned}$$

سمت راست معادله‌ی (۱۵) مقدار ماکزیمم خود را در

$$\mu=\frac{(\alpha+1)N+2a}{2(\alpha+2)}, \quad (۱٦)$$

اختیار می‌کند. با جایگذاری $\mu$ از رابطه‌ی (۱٦) در معادله‌ی (۱۵)، سمت راست این نامساوی ماکزیمم می‌شود و قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.

**قضیه ۲.۳.** اگر $X$ یک متغیر تصادفی $\alpha$-تک‌مدی گسسته (حول $a$) با تکیه‌گاه $\{0,1,\cdots,N\}$ باشد، آن‌گاه:

$$Var(X)\leq\frac{N^2(\alpha+1)^2-4a(N-a)}{4(\alpha+2)^2}+\frac{\alpha N}{2(\alpha+2)}. \quad (۱۷)$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی فوق، با جایگذاری مقادیر $a$ حالت‌های خاص برای کران بالای واریانس متغیر تصادفی $X$ به صورت زیر به دست می‌آید:

الف) اگر $a=0$ یا $a=N$، آن‌گاه:

$$Var(X)\leq\frac{N^2(\alpha+1)^2}{4(\alpha+2)^2}+\frac{\alpha N}{2(\alpha+2)}.$$

ب) اگر $N$ زوج و $a=\frac{N}{2}$ باشد، آن‌گاه:

$$Var(X)\leq\frac{\alpha N(N+2)}{4(\alpha+2)}.$$

پ) اگر $N$ فرد و $a=\frac{N\pm1}{2}$ باشد، آن‌گاه:

$$Var(X)\leq\frac{\alpha N(N+2)}{4(\alpha+2)}+\frac{1}{4(\alpha+2)^2}.$$

توجه داشته باشید که به ازای $\alpha=1$، متغیر تصادفی $X$ با تابع جرم احتمال $(p_n)$، روی تکیه‌گاه $\{0,1,\cdots,N\}$ تک‌مدی است و کران بالای واریانس برای توزیع‌های تک‌مدی به دست می‌آید.

جدول ۱: مقادیر تابع جرم احتمال $p_n$، تابع توزیع $P_n$ و تابع $Q_n$.

| $n$ | کمتر از ۱− | ۱− | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | بزرگتر از ۳ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | ۰ | ۰/۲۲۵ | ۰/۱۵ | ۰/۳۰ | ۰/۱۲۵ | ۰/۲۰ | ۰ |
| $P_n$ | ۰ | ۰/۲۲۵ | ۰/۳۷۵ | ۰/٦۷۵ | ۰/۸۰ | ۱ | ۱ |
| $Q_n = P_n - \frac{1}{2}np_n$ | ۰ | ۰/۳۳۷۵ | ۰/۳۷۵ | ۰/۵۲۵ | ۰/٦۷۵ | ۰/۷۰ | ۱ |

## ٤ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا مفهوم تک‌مدی و تعمیم آن یعنی $\alpha$–تک‌مدی بودن توزیع‌ها را برای هر دو نوع توزیع‌های گسسته و پیوسته بررسی کردیم و در ادامه خاصیت $\alpha$–یکنوایی توزیع‌های گسسته را مورد بررسی قرار دادیم. مشخص‌سازی این نوع توزیع‌ها برای تشخیص نوع توزیع یک متغیر تصادفی، اهمیت بسیاری دارد که در طول این مقاله به این موضوع پرداختیم. همچنین نشان دادیم که توزیع‌های $\alpha$–تک‌مدی گسسته، نقش مؤثری در تعیین کران‌های واریانس دارند.

## مراجع


[۱] خواص توزیع‌های تک‌مدی و برخی کاربردهای آن‌ها، علمی ترویجی، اندیشه آماری–انجمن آمار ایران، ۱۳۹۰، مهدی علیمحمدی، محمد حسین علامت‌ساز.

[2] Abouammoh, A.M., (1987). On Discrete $\alpha$ -Unimodality. *Statistica Neerlandica*, **41**, 239-244.

[3] Abouammoh, A.M., (1988). Correction to ”On Discrete $\alpha$ -Unimodality”. *Statistica Neerlandica*, **42**, 141.

[4] Abouammoh, A.M., Ali, A.M. and Mashhour, A.F., (1994). On characterizations and variance bounds of discrete $\alpha$ -Unimodality. *Statist, Papers*, **35**, 151-161.

[5] Abouammoh, A.M. and Mashhour, A.F., (1994). Variance upper bounds and convolutions of $\alpha$ -Unimodal distributions. *Statist. Probab. Lett*, **21**, 281-289.

[6] Ageel, M.I., (2000). Variance upper bounds and a probability inequality for discrete $\alpha$ -Unimodality. *Department of Mathematics*, **27**, 403-410.

[7] Alamatsaz, M.H., (1992). Generalized Unimodality. *Proc. of The First Iranian Statistics Conference, Isfahan. Iran.*

[8] Alamatsaz, M.H., (1993). On discrete $\alpha$-Unimodal distributions. *Statistica Neerlandica*, **47**, 245-252.

[9] Alzaid, A.A. and Al-osh, M.A., (1990). Some Results on Discrete $\alpha$-Monotonicity. *Statictica Neerlandica*, **44**, 29-33.

[10] Dharmadhikari, S.W. and Joag-Dev, K., (1989). Upper bounds for the variance of certain random variables. *Comm. Statist. Theory methods*, **18**, 3235-3247.

[11] Khintchine, A.Y., (1938). On Unimodal Distributions. *Inst. Mat. Mcch. Tonsk. Gos. Univ*., **2**, 1-7.

[12] MuilWijk, J., (1966). Note on a theorem of M.N. Murthy and V.K. Sethi. *Sankhya Ser, B*. **28**, 183.

[13] Olshen, R.A. and Savage, L.J., (1970). A Generalized Unimodality. *J. App. Prob*., **7**, 21-34.

[14] Steutel, F.W., (1988). Note on Discrete $\alpha$-Unimodality. *Statistica Neerlandica*, **42**, 137-140.