

معرفی کلاس‌های جدیدی از مدل ضربه‌ی نهایی

راضیه انصاری^۱

چکیده:

در طبیعت یا صنعت سیستم‌هایی وجود دارند که در معرض ضربه‌های تصادفی هستند، این ضربه‌ها موجب سالخوردگی یا از کار افتادن سیستم می‌شود. بر حسب نوع ضربه‌ها، مدل‌های ضربه را به دو نوع اصلی دسته بندی می‌کنند، مدل ضربه نهایی و مدل ضربه تجمعی. در مدل ضربه نهایی تنها اثر آخرین ضربه که ضربه کشنده نام دارد مورد بررسی قرار می‌گیرد و در مدل ضربه تجمعی اثر ضربه‌های رخ داده با هم جمع می‌شود.

در واقعیت ممکن است اثر ضربه‌ها به روی سیستم منطبق با هیچ کدام از انواع این دو مدل نباشد لذا معرفی انواع دیگری از مدل‌های ضربه و بررسی سالخوردگی سیستم در این حالات ضروری به نظر می‌رسد. در این مقاله چند مدل جدید از انواع مدل‌های ضربه را معرفی کرده و سپس در هر یک از این مدل‌ها، به بررسی تابع بقا و نرخ شکست می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های شوکی، مدل ضربه تجمعی، مدل ضربه نهایی، مدل ضربه آمیخته، فرسایش

۱ مقدمه

حال سیستم در معرض ضربه‌های تصادفی را در نظر بگیرید

که ضربه‌ها طبق فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ وارد می‌شوند. فرض کنید هر ضربه با احتمال $p(t)$ باعث شکست سیستم (و بنابراین خاتمه فرایند وقوع ضربه) می‌شود که به این نوع ضربه‌ها، ضربه بحرانی می‌گویند و با احتمال $q(t) = 1 - p(t)$

در کتب فرایندهای تصادفی با فرایند پواسون همگن آشنا شده‌اید. فرایند مهم دیگری از فرایندهای شمارشی، فرایند پواسون ناهمگن است.

برای سیستم بی ضرر است. اگر سیستم در غیاب ضربه‌ها کاملاً مطمئن باشد، تنها عامل شکست سیستم وقوع ضربه بحرانی است پس اگر بخواهیم سیستم حداقل تا زمان t زنده بماند، نباید در بازه $[0, t]$ ضربه بحرانی رخ دهد. بنابراین اگر T_S طول عمر سیستم در حضور ضربه‌ها باشد، احتمال بقای منطبق با این مدل به صورت زیر است:

تعریف ۱.۱. فرایند شمارشی N را یک فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ می‌گوییم هرگاه در چهار شرط زیر صدق کند.

$$۱. N(0) = 0$$

$$۲. N(t), t \geq 0 \text{ دارای نمو‌های مستقل باشد.}$$

$$۳. P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

$$۴. P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$

یکی از مفاهیم پرکاربرد در قابلیت اعتماد، تابع بقا است.

که در آن $\{N_p(t), t \geq 0\}$ فرایند وقوع ضربه بحرانی است که یک فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $p(t)\nu(t)$ است. بنابراین تابع نرخ شکست برابر است با:

$$۲) \lambda_s(t) = p(t)\nu(t), \quad t \geq 0.$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید X طول عمر یک سیستم را نشان می‌دهد که متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ است. احتمال $\bar{F}(x) = P(X > x)$ را تابع بقا و نسبت $r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ را تابع نرخ شکست X می‌نامیم.

برای راحتی کار، مدل ضربه نهایی‌ای که اکنون به آن اشاره کردیم

را مدل $q(t) \Leftrightarrow p(t)$ می‌نامیم.

$F_S(t)$: تابع توزیع طول عمر سیستم در حضور ضربه‌ها
 W_i : میزان فرسایش ایجاد شده توسط ضربه i ام حال فرض کنید
 i امین ضربه با احتمال $p(t)$ فوراً سیستم را از کار می‌اندازد و با
احتمال $q(t) = 1 - p(t)$ سن سیستم را به مقدار تصادفی $W_i \geq 0$
افزایش می‌دهد. بنابراین سن تصادفی سیستم در زمان t برابر
خواهد شد با:

$$T_\nu = t + \sum_{i=0}^{N(t)} W_i$$

که در آن منطبق با حالتی که $N(t) = 0$ قرار می‌دهیم، $W_0 = 0$.
در نتیجه شکست زمانی اتفاق می‌افتد که این متغیر تصادفی از مرز
 R بگذرد و یا ضربه بحرانی رخ دهد.

چون وقوع یک ضربه (ضربه بحرانی) و یا تأثیر جمعی از
ضربه‌ها (ضربه‌های غیربحرانی) در از کار افتادن سیستم تأثیر دارد،
این مدل ترکیبی از مدل ضربه نهایی و مدل ضربه تجمعی است لذا
آن را مدل ضربه ترکیبی می‌نامیم.

به شرط داشتن $R, 0 \leq s \leq t, N(s)$ و میزان فرسایش ناشی از
ضربه‌ها، احتمال شرطی تابع بقای سیستم برابر است با:

$$P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t,$$

$$W_1, W_2, \dots, W_{N(t)}; R) \\ = \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i) I\left(\sum_{i=0}^{N(t)} W_i \leq R - t\right), \quad (4)$$

که در آن $q(T_0) \equiv 1$ همانطور که می‌بینیم، فرمول (4) بسیار کلی
است. بنابراین در ادامه به بررسی دو حالت خاص که R دارای
توزیع نمایی و یا R ثابت است می‌پردازیم.

۱.۲ دارای توزیع نمایی

در این حالت علاوه بر مفروضات قبل فرض‌های زیر را نیز
می‌پذیریم:

۱. $\{N(t), t \geq 0\}$ فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ است.

۲. W_i ها مستقل و هم‌توزیع با تابع مولد گشتاور $M_W(t)$ و
تابع توزیع $G(t)$ هستند.

۳. $\{N(t), t \geq 0\}$ و $W_i, i = 1, 2, \dots$ مستقل از یکدیگرند.

^۱Cha, J. H. and Finkelstein, M.

حال اگر سیستم در غیاب ضربه‌ها مطمئن نباشد یعنی ممکن
است سیستم بدون وقوع ضربه نیز از کار بیفتد.

فرض می‌کنیم R ، عمر تصادفی سیستم در غیاب ضربه‌ها، دارای
تابع توزیع $F(t)$ باشد و نیز فرایند وقوع ضربه از R مستقل باشد.
در این حالت به دو علت سیستم از کار می‌افتد، یکی وقوع ضربه
بحرانی و دیگری پایان یافتن عمر طبیعی سیستم، پس داریم:

$$P(T_S > t)$$

$$= \bar{F}(t) \exp \left\{ - \int_0^t p(u) \nu(u) du \right\} \quad (3)$$

هر دو مدل معرفی شده در بالا از نوع مدل ضربه نهایی است. در
این مقاله با اضافه کردن شرایطی به این مدل، مدل‌های جدیدی از
انواع مدل ضربه معرفی و بررسی می‌شود. بنابراین در بخش دوم
بر اساس تحقیقات چا و فینکل‌اشتاین^۲ [۱] به شیوه‌ای خاص، مدل
ضربه نهایی با نوعی مدل ضربه تجمعی ترکیب شده و مدلی تحت
عنوان مدل ضربه ترکیبی معرفی و بررسی می‌شود. در بخش سوم
بر اساس مطالعات چا و فینکل‌اشتاین^۲ [۲] با فرض اینکه احتمال
کشنده بودن ضربه‌ای که در زمان t رخ می‌دهد به گذشته فرایند
وقوع ضربه بستگی دارد مدل‌هایی تحت عنوان مدل A و B بدست
آمده و تابع بقا و نرخ شکست محاسبه می‌شود. در بخش چهارم بر
اساس مطالعات چا و فینکل‌اشتاین^۳ [۳] در دو مدل ضربه نهایی و
مدل ضربه ترکیبی، فرض می‌شود ضربه‌ها با میزان تأخیری تصادفی
روی سیستم اثر می‌گذارد و سپس به محاسبه تابع بقا و نرخ شکست
پرداخته می‌شود.

۲ مدل ضربه ترکیبی

قبل از معرفی مدل برای راحتی کار نمادگذاری‌های زیر را انجام
می‌دهیم:

R : طول عمر سیستم (بدون وقوع ضربه)

در نتیجه $P(R \leq t) = F(t)$

$\{N(t), t \geq 0\}$: فرایند وقوع ضربه

T_i : زمان رخ دادن i امین ضربه

T_S : طول عمر سیستم (تحت وقوع ضربه)

۴. R دارای توزیع نمایی با نرخ شکست λ است و در نتیجه: برای رسیدن به این منظور تعریف می‌کنیم:

$$\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$$

$$N^*(t) \equiv N(m^{-1}(t)), t \geq 0$$

قضیه زیر تابع بقا و تابع نرخ شکست T_S را بدست می‌دهد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $m(t) = E[N(t)] = \int_0^t \nu(x)dx$ و نیز مفروضات ۱-۴ برقرارند، $m(t)$ تابعی پیوسته و تابع معکوس $m^{-1}(t)$ وجود دارد، آنگاه:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= \exp\{-\lambda t - \int_0^t \nu(x)dx \\ &+ M_W(-\lambda) \int_0^t q(x)\nu(x)dx\}, t \geq 0 \\ \lambda_S(t) &= \lambda + (1 - M_W(-\lambda)q(t))\nu(t) \end{aligned} \quad (5)$$

می‌دانیم $\{N^*(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون همگن با نرخ ۱ است و $T_j^*, j \geq 1$ زمان رخداد ضربه‌ها در مقیاس فاصله زمانی جدید است. (سینلار^۳) اگر قرار دهیم $s = m(t)$ آنگاه:

$$\begin{aligned} &E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} [\ln q(T_i) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N^*(s)} [\ln q(m^{-1}(T_i^*)) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\}\right] \\ &= E\left[E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N^*(s)} [\ln q(m^{-1}(T_i^*))\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. + \ln(M_W(-\lambda))\right]\right|N^*(s)\right]\right] \end{aligned} \quad (V)$$

اثبات. برای بدست آوردن تابع بقا ابتدا احتمال شرطی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t, W_1, \dots, W_{N(t)}) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i)\right) P\left(R \geq t + \sum_{i=1}^{N(t)} W_i\right) \\ &= \exp\left\{-\lambda t - \lambda \sum_{i=1}^{N(t)} W_i + \sum_{i=1}^{N(t)} \ln q(T_i)\right\} \end{aligned}$$

با استفاده از امید گرفتن از این رابطه نسبت به W_i ها داریم:

$$\begin{aligned} &P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t) \\ &= e^{-\lambda t} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} \ln q(T_i)\right\} E[e^{-\sum_{i=1}^{N(t)} \lambda W_i}] \\ &= e^{-\lambda t} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} \ln q(T_i)\right\} \prod_{i=1}^{N(t)} E[e^{-\lambda W_i}] \\ &= e^{-\lambda t} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} \ln q(T_i)\right\} (M_W(-\lambda))^{N(t)} \\ &= e^{-\lambda t} \times \exp\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} [\ln q(T_i) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\} \end{aligned}$$

حال اگر از این رابطه نسبت به N امید بگیریم تابع بقا بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} &P(T_S > t) = \\ &e^{-\lambda t} E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} [\ln q(T_i) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\}\right] \end{aligned} \quad (6)$$

حال چون، $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^* | N^*(s) = n$ یعنی آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی n تایی از توزیع یکنواخت در فاصله $[0, m(t)]$ ، هم توزیع است (راس^۴)، داریم:

$$\begin{aligned} &E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N^*(s)} [\ln q(m^{-1}(T_i^*)) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\}\right|N^*(s) = n] \\ &= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n [\ln q(m^{-1}(V_i)) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n [\ln q(m^{-1}(V_i)) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\}\right] \\ &= \left(E\left[\exp\left\{\ln q(m^{-1}(V_1)) + \ln(M_W(-\lambda))\right\}\right]\right)^n \\ &= \left(E\left[\exp\left\{\ln q(m^{-1}(sU)) + \ln(M_W(-\lambda))\right\}\right]\right)^n \end{aligned}$$

که در آن $U = \frac{V_1}{s}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ است.

^۳Cinlar, E.

^۴Ross, S.

بنابراین:

$$\begin{aligned} E[\exp\{\ln q(m^{-1}(sU)) + \ln(M_W(-\lambda))\}] \\ = \int_0^1 \exp\{\ln q(m^{-1}(su)) + \ln(M_W(-\lambda))\} du \\ = M_W(-\lambda) \int_0^1 q(m^{-1}(m(t)u)) du \\ = \frac{M_W(-\lambda)}{m(t)} \int_0^t q(x)\nu(x) dx \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{N^*(s)} [\ln q(m^{-1}(T_i^*)) + \ln(M_W(-\lambda))]\right\} \middle| N^*(s)=n\right] \\ = \left(E[\exp\{\ln q(m^{-1}(sU)) + \ln(M_W(-\lambda))\}]\right)^n \\ = \left(\frac{M_W(-\lambda)}{m(t)} \int_0^t q(x)\nu(x) dx\right)^n \quad (۸) \end{aligned}$$

حال از (۶) و (۷) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_W(-\lambda)}{m(t)} \int_0^t q(x)\nu(x) dx\right)^n \times \frac{s^n}{n!} e^{-s} e^{-\lambda t} \\ = \exp\left\{-\lambda t - \int_0^t \nu(x) dx + M_W(-\lambda) \int_0^t q(x)\nu(x) dx\right\} \end{aligned}$$

بنابراین تابع نرخ شکست برابر است با:

$$\lambda_S(t) = \lambda + (1 - M_W(-\lambda)q(t))\nu(t)$$

□

نتیجه ۲.۲. اگر W_i ‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین μ باشند، تابع

نرخ شکست به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda_S(t) = \lambda + (1 - \frac{q(t)}{\lambda\mu + 1})\nu(t) \quad (۹)$$

تذکر ۳.۲. می‌توان این دیدگاه را برای W_i ‌هایی که همسان نیستند

نیز به کار برد. برای مثال فرض کنید:

$$W_{i+1} = aW_i, \quad i \geq 1, a > 1$$

در این حالت با محاسباتی همانند قبل بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= \exp\left\{-\lambda t - \int_0^t \nu(x) dx\right\} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_{W_1}\left(-\frac{\lambda}{a-1}(a^n - 1)\right) \times \frac{(\int_0^t q(x)\nu(x) dx)^n}{n!}\right] \end{aligned}$$

ولی همانطور که مشاهده می‌کنید این تابع بقا را نمی‌توان به فرم ساده و صریح مانند رابطه (۵) نوشت.

۲.۲ ثابت R

فرض کنید $R = b$ و نیز سایر مفروضات قسمت (۱.۲) برقرار باشد. در این حالت فرض را بر این می‌گذاریم که $t < b$ یعنی بدون رخ دادن ضربه شکست رخ نمی‌دهد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید مفروضات ۱-۳ برقرار است، $m(t)$ تابعی پیوسته و تابع معکوس $m^{-1}(t)$ وجود دارد. علاوه بر آن فرض کنید W_i ‌ها مستقل و هم‌توزیع از توزیع نمایی با میانگین $1/\eta$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\eta(b-t))^j}{j!} e^{-\eta(b-t)} \right) \right. \\ &\times \left(\frac{1}{m(t)} \int_0^t q(x)\nu(x) dx \right)^n \\ &\times \left. \frac{m(t)^n}{n!} e^{-m(t)} \right], \quad 0 \leq t < b \quad (۱۰) \end{aligned}$$

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به مقاله چا و فینکل اشتاین^۵ [۱]

□

نتیجه ۵.۲. تابع بقای (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی

کرد: پس:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= \exp\left\{-\int_0^t p(x)\nu(x) dx\right\} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_1 \geq n)P(Z_2 = n) \quad (۱۱) \end{aligned}$$

که در آن Z_1 و Z_2 دو متغیر تصادفی از توزیع پواسون با پارامترهای به ترتیب $\eta(b-t)$ و $\int_0^t q(x)\nu(x) dx$ هستند.

تذکر ۶.۲. ۱. وقتی $\eta = \frac{1}{\mu} \rightarrow \infty$ یعنی میانگین W_i به صفر میل کند، معادله (۱۱) به مدل $q(t) \Leftrightarrow p(t)$ تبدیل می‌شود چرا که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Z_1 \geq n)P(Z_2 = n) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_2 = n) = 1$$

چون برای هر $n \geq 1$ $P(Z_1 \geq n) \rightarrow 1$ و $P(Z_1 \geq 0) = 1$ طبیعی است که اگر نمودهای فرسایش از بین بروند، اثر آنها روی مدل نیز از بین خواهد رفت.

^۵Cha, J. H. and Finkelstein, M.

۲. وقتی $0 \rightarrow \eta$ یعنی میانگین فرسایش به بی نهایت میل می کند، احتمال اینکه با رخ دادن اولین ضربه سیستم از کار بیفتد به یک میل می کند و داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Z_1 \geq n)P(Z_2 = n) \rightarrow P(Z_2 = 0)$$

چون $P(Z_1 \geq 0) = 1$ و وقتی $0 \rightarrow \eta$ برای هر $n \geq 1$ ، $P(Z_1 \geq n) \rightarrow 0$ بنابراین:

$$P(T_S > t) \rightarrow \exp \left\{ - \int_0^t \nu(x) dx \right\}$$

که برابر است با احتمال اینکه در بازه $[0, t]$ هیچ ضربه ای رخ ندهد و این همان چیزی است که انتظار داریم چرا که وقتی $t < b$ سیستم فقط بدون وقوع ضربه می تواند زنده بماند.

۳ مدل های ضربه با فرض وابستگی $p(t)$ به گذشته فرایند

در مدل $q(t) \Leftrightarrow p(t)$ که در مقدمه به آن اشاره شد دو فرض اساسی که برای بدست آوردن رابطه (۲) در نظر گرفتیم عبارت است از:

۱. فرایند وقوع ضربه $NHPP(\nu(t))$ است.

۲. احتمال $p(t)$ به گذشته فرایند وقوع ضربه بستگی ندارد.

گذشته فرایند را با $H(t)$ نشان می دهیم و در حالتی که فرایند وقوع ضربه $NHPP$ است:

$$H(t) \equiv \{N(s), 0 \leq s < t\}.$$

در این بخش فرض می شود $p(t)$ به $H(t)$ وابسته است و با این فرض دو مدل A و B را تعریف می کنیم.

۱.۳ مدل A

در این مدل فرض می کنیم فرایند وقوع ضربه $NHPP(\nu(t))$ است با این تفاوت که $p(t)$ از گذشته مستقل نیست و داریم:

$$p(t|H(t)) = p(t|N(s), 0 \leq s < t).$$

ساده ترین حالتی که برای وابستگی به گذشته می توان در نظر گرفت تعداد ضربه هایی است که سیستم در فاصله زمانی $[0, t]$ با آن مواجه

می شود یعنی همان $N(t)$. منطقی است فرض شود هر ضربه با افزایش دادن احتمال $p(t|H(t)) = p(t, N(t))$ باعث ضعیف شدن سیستم شود، بنابراین تابع $p(t, N(t))$ وقتی $N(t) = n(t)$ بر حسب $n(t)$ صعودی است. فرض کنید:

$$q(t, n(t)) \equiv 1 - p(t, n(t)) = q(t)\rho(n(t)), \quad (12)$$

که $\rho(n(t))$ تابعی است که برای هر t ثابت، بر حسب مؤلفه هایش نزولی است.

پس در این مدل فرض می کنیم احتمال بحرانی بودن ضربه ای که در زمان t رخ داده است از طریق تعداد ضربه های رخ داده تا زمان t به گذشته فرایند وابسته است لذا ضربه رخ داده با احتمال $p(t, n(t))$ بحرانی است و سیستم را از کار می اندازد و با احتمال $q(t, n(t))$ سیستم را از کار نمی اندازد. توجه کنید ضربه ای که سیستم را از کار نمی اندازد در از کار افتادن سیستم بی تأثیر نیست چون احتمال از کار افتادن سیستم توسط ضربه بعد را بالا می برد.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $m(t) \equiv E[N(t)] = \int_0^t \nu(x) dx$ تابعی پیوسته، $\rho(0) = 1$ ، $\Psi(n) \equiv \prod_{i=0}^n \rho(i)$ و تابع معکوس $m^{-1}(t)$ وجود دارد. آنگاه:

$$P(T_S \geq t) = E[\Psi(N_{q\nu}(t))] \exp \left\{ - \int_0^t p(x)\nu(x) dx \right\}, \quad (13)$$

که $\{N_{q\nu}(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون غیر همگن با نرخ $q(t)\nu(t)$ است.

اثبات. اگر $N(s), 0 \leq s < t$ معلوم باشد زمانی سیستم تا زمان t زنده می ماند که ضربه های رخ داده بحرانی نباشند، پس:

$$P(T_S \geq t|N(s), 0 \leq s < t) = \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i, n(T_i)) = \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i)\rho(i),$$

که طبق قرارداد منطبق با وقتی که $N(t) = 0$ ، $q(T_0) \equiv 1$ و $\rho(0) \equiv 1$ با امید گرفتن نسبت به N داریم:

$$P(T_S \geq t) = E \left[\prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i)\rho(i) \right] = E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} q(T_i)\rho(i) \right].$$

حال با توجه به همان نکات و جزئیاتی که در اثبات قضیه (۱.۲)

آورده شد داریم:

(۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} P(T_S \geq t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(n) \left(\frac{1}{m(t)} \int_0^t q(x) \nu(x) dx \right)^n \\ &\quad \times \frac{(m(t))^n}{n!} e^{-m(t)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(n) \left(\int_0^t q(x) \nu(x) dx \right)^n \\ &\quad \times \frac{e^{-\int_0^t \nu(x) dx}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(n) \left(\int_0^t q(x) \nu(x) dx \right)^n \\ &\quad \times \frac{e^{-\int_0^t (p(x)+q(x)) \nu(x) dx}}{n!} \\ &= E[\Psi(N_{q\nu}(t))] \exp \left\{ - \int_0^t p(x) \nu(x) dx \right\}, \end{aligned}$$

که $N_{q\nu}(t), t \geq 0$ فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $q(t)\nu(t)$ است. $\square$

۲.۳ مدل B

این مدل نوع متفاوتی از مدل ضربه نهایی است. در حقیقت این مدل را می‌توان تعمیمی از مدل A دانست. در زیر بخش قبل دومین عامل شکست، تنها به تعداد ضربه‌های غیر بحرانی رخ داده بستگی دارد و شدت ضربه‌ها مهم نیست. ولی در این مدل ضربه‌هایی را به شمار می‌آوریم که شدت آنها از یک سطح داده شده k بزرگتر باشد و این نوع ضربه‌ها را ضربه خطرناک می‌نامیم. فرض کنید دومین عامل شکست زمانی محقق می‌شود که تعداد ضربه‌های خطرناک از سطح تصادفی M تجاوز کند پس اگر $M = m$ باشد، در غیاب ضربه‌های بحرانی، سیستم زمانی از کار می‌افتد که $m+1$ امین ضربه خطرناک رخ دهد. فرض کنید شدت ضربه‌ها متغیری تصادفی با تابع توزیع $G(t)$ است و نیز تابع بقای $l = 0, 1, 2, \dots$ $P(M > l)$ داده شده است. اگر تا زمان t هیچ ضربه بحرانی‌ای رخ ندهد و تعریف کنیم:

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ امین ضربه خطرناک باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, N(t)$ آنگاه می‌توان گفت:

$$\Psi(N_{q\nu}(t), \Theta) = I \left(M \geq \sum_{i=1}^{N_{q\nu}(t)} \varphi_i \right)$$

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} q(T_i) \rho(i) \right] &= E \left[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q(m^{-1}(T_i^*)) \rho(i) \right] \\ &= E \left[E \left[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q(m^{-1}(T_i^*)) \rho(i) \middle| N^*(s) \right] \right]. \end{aligned}$$

حال چون $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^* | N^*(s) = n$ با

$V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ یعنی آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی n تایی از توزیع یکنواخت در فاصله $[0, m(t)]$ هم توزیع است، داریم:

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q(m^{-1}(T_i^*)) \rho(i) \middle| N^*(s) = n \right] &= \prod_{i=1}^n \rho(i) E \left[\prod_{i=1}^n q(m^{-1}(T_i^*)) \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \rho(i) E \left[\prod_{i=1}^n q(m^{-1}(V_i)) \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \rho(i) E \left[\prod_{i=1}^n q(m^{-1}(V_i)) \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \rho(i) (E[q(m^{-1}(V_1))])^n \\ &= \prod_{i=1}^n \rho(i) (E[q(m^{-1}(sU))])^n, \end{aligned}$$

که در آن $U = V_1/s \sim U[0, 1]$

از طرفی:

$$\begin{aligned} E[q(m^{-1}(sU))] &= \int_0^t q(m^{-1}(su)) du \\ &= \int_0^t q(m^{-1}(m(t)u)) du \\ &= \frac{1}{m(t)} \int_0^t q(x) \nu(x) dx. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q(m^{-1}(T_i^*)) \rho(i) \middle| N^*(s) = n \right] &= \prod_{i=1}^n \rho(i) \left(\frac{1}{m(t)} \int_0^t q(x) \nu(x) dx \right)^n. \quad (۱۴) \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\Psi(n) \equiv \prod_{i=1}^n \rho(i)$ سپس با امید گرفتن از رابطه

و $S = \{1\}$ بنابراین:

۴ مدل‌های ضربه تأخیری

در فرایندهایی که در فصل‌های قبل در نظر می‌گرفتیم بلافاصله بعد از وقوع رخداد، شاهد تأثیر آن به روی سیستم بودیم. ولی اکنون فرض می‌کنیم وقتی رخدادی به وقوع می‌پیوندد با تأخیری تصادفی روی سیستم تأثیر می‌گذارد. اگر $\{N(t), t \geq 0\}$ نشان دهنده فرایند وقوع رخدادها و $T_1 > T_2 > \dots$ زمانهای ورود رخداد باشد و رخداد نام از این فرایند با تأخیر زمانی تصادفی D_i روی سیستم اثر بگذارد. بنابراین دنباله $\{T_i + D_i\}, i = 1, 2, \dots$ دیگر لزوماً ترتیبی نیست.

$$\begin{aligned} P(T_s \geq t | E_C(t)) &= E[I(\Psi(N_{qv}(t), \Theta)) \in S] \\ &= E\left[I\left(M \geq \sum_{i=1}^{N_{qv}(t)} \varphi_i\right)\right] \\ &= E\left[E\left[I\left(M \geq \sum_{i=1}^{N_{qv}(t)} \varphi_i\right) \middle| N_{qv}(t)\right]\right] \\ &= E\left[P\left(M \geq \sum_{i=1}^{N_{qv}(t)} \varphi_i \middle| N_{qv}(t)\right)\right], \end{aligned}$$

که در آن:

۱.۴ مدل ضربه نهایی تأخیری

سیستمی را در نظر بگیرید که در معرض ضربه‌هایی است که بر طبق فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ وارد می‌شوند. اگر $T_1 > T_2 > \dots$ زمانهای ورود ضربه‌ها باشد، λ امین ضربه با احتمال $q(T_i)$ برای سیستم بی‌ضرر است و با احتمال $p(T_i)$ شکست سیستم را به میزان تصادفی $D(T_i)$ به تأخیر می‌اندازد. $D(t)$ متغیر تصادفی نامنفی و شبه پیوسته است که برای هر t ثابت، در نقطه صفر جرم دارد یعنی این احتمال وجود دارد که میزان تأخیر صفر باشد و بلافاصله بعد از وقوع ضربه سیستم از کار بیفتد. اگر $D(t)$ برای هر t ثابت در نقطه صفر جرم نداشته باشد متغیری کاملاً پیوسته خواهد بود.

فرض کنید T_S طول عمر سیستم و $G(t, x) \equiv P(D(t) \leq x)$ و $\bar{G}(t, x) = 1 - G(t, x)$ تابع بقا و تابع چگالی $D(t)$ باشند. برای هر $J_i, i = 1, 2, \dots$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \lambda \text{ امین ضربه بی‌ضرر باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در صورتی سیستم تا زمان t زنده می‌ماند که ضربه‌های رخ داده بی‌ضرر باشد یا اگر بی‌ضرر نیست زمان شکست سیستم را تا بعد از زمان t به تعویق بیندازد. اگر $N(s), 0 \leq s \leq t$ و $J_1, J_2, \dots, J_{N(t)}$

سیستم تا زمان t کار کند صفر یا یک است و به صورت زیر

$$\begin{aligned} P\left(M \geq \sum_{i=1}^{N_{qv}(t)} \varphi_i \middle| N_{qv}(t) = n\right) &= \sum_{m=0}^n P\left(M \geq \sum_{i=1}^n \varphi_i \middle| N_{qv}(t) = n, M = m\right) \\ &= P(M = m | N_{qv}(t) = n) + P(M > n | N_{qv}(t) = n) \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\binom{n}{l} \bar{G}(k)^l \times G(k)^{n-l} P(M = m) \right] + P(M > n) \\ &= \sum_{l=0}^n \sum_{m=l}^n \left[\binom{n}{l} \bar{G}(k)^l G(k)^{n-l} P(M = m) \right] + P(M > n) \\ &= \sum_{l=0}^n \left[\binom{n}{l} \bar{G}(k)^l G(k)^{n-l} (P(M \geq l) - P(M \geq n+1)) \right] \\ &+ P(M > n) \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \bar{G}(k)^l G(k)^{n-l} P(M \geq l). \end{aligned}$$

با گرفتن امید ریاضی نسبت به $N_{qv}(t)$ داریم:

$$P(T_s \geq t | E_C(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \bar{G}(k)^l G(k)^{n-l} \times P(M \geq l) \right) \frac{m_q(t)^n e^{-m_q(t)}}{n!},$$

که در آن $m_q(t) \equiv \int_0^t q(x) \nu(x) dx$

و سرانجام:

$$\begin{aligned} P(T_S \geq t) &= P(T_S \geq t | E_C(t)) P(E_C(t)) \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t p(x) \nu(x) dx \right\} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \bar{G}(k)^l G(k)^{n-l} \times P(M \geq l) \right] \frac{m_q(t)^n e^{-m_q(t)}}{n!} \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود:

حال با امید گرفتن از این رابطه نسبت به $D(T_i)$ ‌ها داریم:

$$P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t)$$

$$\begin{aligned} &= E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + I(D(T_i) + T_i > t) \times p(T_i)) \right] \\ &= \prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) \times E[I(D(T_i) + T_i > t)]) \\ &= \prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) P(D(T_i) > t - T_i)) \\ &= \prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) \bar{G}(T_i, t - T_i)) \end{aligned}$$

و سرانجام با امید گرفتن نسبت به N رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= E[P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t)] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) \bar{G}(T_i, t - T_i)) \right] \\ &= E \left[E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \bar{G}(T_i, t - T_i)) \middle| N(t) \right] \right] \end{aligned} \quad (16)$$

برای بدست آوردن

$$E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) \bar{G}(T_i, t - T_i)) \middle| N(t) \right]$$

با توجه به نکات و جزئیات گفته شده در اثبات قضیه (۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} &E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} (q(T_i) + p(T_i) \times \bar{G}(T_i, t - T_i)) \middle| N(t) \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^{N^*(s)} (q(m^{-1}(T_i^*)) + p(m^{-1}(T_i^*)) \right. \\ &\quad \left. \times \bar{G}(m^{-1}(T_i^*), t - m^{-1}(T_i^*)) \right) \middle| N(t) \right] \end{aligned}$$

حال چون $N^*(s) = n$ با $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$ و $V(1), V(2), \dots, V(n)$ یعنی آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی n تایی از توزیع یکنواخت در فاصله

$$\begin{aligned} &P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t; D(T_1), \dots, D(T_{N(t)}); J_1, \dots, J_{N(t)}) \\ &= \prod_{i=1}^{N(t)} (J_i + (1 - J_i) I(D(T_i) + T_i > t)) \end{aligned} \quad (15)$$

قبل از محاسبه تابع بقا در قالب یک قضیه، مفروضات زیر را که در مورد استقلال شرطی است، می‌پذیریم:

۱. اگر فرایند وقوع ضربه معلوم باشد، $D(T_i)$ ‌ها از هم مستقلند.۲. اگر فرایند وقوع ضربه معلوم باشد، J_i ‌ها از هم مستقلند.

۳. اگر فرایند وقوع ضربه معلوم باشد، $\{D(T_i), i = 1, 2, \dots\}$ و $\{J_i, i = 1, 2, \dots\}$ از هم مستقلند.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $m(t) = E(N(t)) = \int_0^t \nu(t) dt$ پیوسته و تابع $m^{-1}(t)$ وجود داشته باشد. اگر $\nu(+0) > 0$ آنگاه تابع بقا و تابع نرخ شکست سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= \exp \left\{ - \int_0^t G(x; t - x) p(x) \nu(x) dx \right\} \\ \lambda_S(t) &= \int_0^t g(x; t - x) p(x) \nu(x) dx \\ &\quad + G(t, 0) p(t) \nu(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

اثبات. برای بدست آوردن تابع بقا از رابطه (۱۵) نسبت به J_i ‌ها و $D(T_i)$ ‌ها و N امید می‌گیریم. ابتدا با امید گرفتن نسبت به J_i ‌ها داریم:

$$\begin{aligned} &P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t; D(T_1), D(T_2), \dots, D(T_{N(t)})) \\ &= E \left[\prod_{i=1}^{N(t)} (J_i + (1 - J_i) I(D(T_i) + T_i > t)) \right] \\ &= \prod_{i=1}^{N(t)} [q(T_i) + I(D(T_i) + T_i > t) \times p(T_i)] \end{aligned}$$

$[0, m(t)]$ هم توزیع است، داریم:

با توجه به روابط (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} P(T_S > t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m(t)} \int_0^t [q(x) + p(x) \right. \\ &\times \left. \overline{G}(x, t-x)] \nu(x) dx \right)^n \frac{m(t)^n}{n!} e^{-m(t)} \\ &= e^{-m(t)} \exp \left\{ \int_0^t [q(x) + p(x) \overline{G}(x, t-x)] \nu(x) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_0^t q(x) \nu(x) dx + \int_0^t \overline{G}(x, t-x) p(x) \nu(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \nu(x) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t (1 - q(x)) \nu(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \overline{G}(x, t-x) p(x) \nu(x) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t G(x, t-x) p(x) \nu(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

پس تابع نرخ شکست سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} \lambda_S(t) &= \int_0^t g(x; t-x) p(x) \nu(x) dx \\ &\quad + G(t, 0) p(t) \nu(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

□

۲.۴ مدل ضربه ترکیبی تأخیری

مدل ضربه ترکیبی را در نظر بگیرید که در آن مدل وقتی جمع فرسایش ناشی از ضربه‌ها از یک حد بگذرد سیستم شکست می‌خورد. در مدل‌های ضربه ترکیبی که در فصول قبل به آنها اشاره کردیم به محض ورود ضربه، سیستم فرسوده می‌شود ولی در این مدل فرسایش ناشی از وقوع هر ضربه کم کم روی سیستم اثر می‌گذارد یعنی با وقوع ضربه فرایند فرسایش آغاز می‌شود و هر چه زمان بگذرد به طور پیوسته میزان فرسایش بیشتر خواهد شد. میزان فرسایش تصادفی ناشی از ضربه‌ای که در زمان t رخ داده است، پس از گذشت u واحد زمانی بعد از وقوع ضربه را با $W(t, u)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم برای هر $t, u \geq 0$ $W(t, 0) \equiv 0$ و $W(t, u)$ نسبت به t و u از نظر تصادفی صعودی است. بنابراین جمع فرسایش‌های ناشی از ضربه‌های رخ داده در بازه $[0, t]$ برابر است با:

$$W(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} W(T_i, t - T_i),$$

$$\begin{aligned} &E \left[\prod_{i=1}^{N^*(s)} (q(m^{-1}(T_i^*)) + p(m^{-1}(T_i^*))) \right. \\ &\quad \left. \times \overline{G}(m^{-1}(T_i^*), t - m^{-1}(T_i^*)) \right] \Big| N^*(s) = n \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n (q(m^{-1}(V_i)) + p(m^{-1}(V_i))) \right. \\ &\quad \left. \times \overline{G}(m^{-1}(V_i), t - m^{-1}(V_i)) \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n (q(m^{-1}(V_i)) + p(m^{-1}(V_i))) \right. \\ &\quad \left. \times \overline{G}(m^{-1}(V_i), t - m^{-1}(V_i)) \right] \\ &= (E[q(m^{-1}(V_1)) + p(m^{-1}(V_1)) \\ &\quad \times \overline{G}(m^{-1}(V_1), t - m^{-1}(V_1))])^n \\ &= (E[q(m^{-1}(m(t)U)) + p(m^{-1}(m(t)U)) \\ &\quad \times \overline{G}(m^{-1}(m(t)U), t - m^{-1}(m(t)U))])^n \quad (۱۷) \end{aligned}$$

که در آن $U = \frac{V_1}{m(t)}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی صفر و یک است، بنابراین:

$$\begin{aligned} &E[q(m^{-1}(m(t)U)) + p(m^{-1}(m(t)U)) \\ &\quad \times \overline{G}(m^{-1}(m(t)U), t - m^{-1}(m(t)U))] \\ &= \int_0^1 q(m^{-1}(m(t)u)) + p(m^{-1}(m(t)u)) \\ &\quad \times \overline{G}(m^{-1}(m(t)u), t - m^{-1}(m(t)u)) du \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x = m^{-1}(m(t)u)$ داریم:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 q(m^{-1}(m(t)u)) + p(m^{-1}(m(t)u)) \\ &\quad \times \overline{G}(m^{-1}(m(t)u), t - m^{-1}(m(t)u)) du \\ &= \int_0^t [q(x) + p(x) \overline{G}(x, t-x)] \frac{\nu(x)}{m(t)} dx \quad (۱۸) \end{aligned}$$

فرض کنید هر ضربه با احتمال $p(t)$ فوراً سیستم را از کار می‌اندازد و تابع نرخ شکست منطبق با آن برابر است با:

$$\lambda_S(t) = p(t)\nu(t) - \int_0^t \frac{d}{dt}(M_{W(x,t-x)}(-\lambda))q(x)\nu(x)dx$$

که در آن برای هر t و u ثابت، $M_{W(t,u)}(\cdot)$ تابع مولد گشتاور $W(t, u)$ است.

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به مقاله چا^۶ و فینکل اشتاین^۷ □ [۳]

۵ نتیجه گیری

در بخش‌های قبل با اضافه کردن شرایطی به مدل ضربه نهایی، مدل‌های جدیدی معرفی شد. با اضافه کردن شرایط دیگری مثل معالجه پذیر بودن سیستم به مدل، می‌توان مدل‌های جدیدتر و کلی‌تری بدست آورد. در تمامی مدل‌هایی که در این مقاله مطرح شد فرض بر این بود که ضربه‌ها طبق فرایند پواسون ناهمگن رخ می‌دهند. می‌توان این نتایج را به مواردی که ضربه‌ها بر طبق فرایندهای تصادفی دیگر رخ می‌دهند، تعمیم داد.

و با احتمال $q(t)$ به روشی که در بالا گفتیم سیستم را فرسوده می‌کند و سیستم زمانی شکست می‌خورد که جمع فرسایش‌ها به مرز R برسد. می‌خواهیم توزیع زمان شکست سیستم را بدست آوریم. با توجه به نکاتی که در قسمت قبل گفتیم به شرط داشتن $N(s), 0 \leq s \leq t$ و $W(T_i, t - T_i), i = 1, 2, \dots, N(t)$ و R اگر $\sum_{i=0}^{N(t)} W(T_i, t - T_i) \leq R$ باشد، وقتی طول عمر سیستم از t بیشتر می‌شود که ضربه‌های رخ داده سیستم را از کار انداخته نباشد. بنابراین تابع بقای شرطی طول عمر سیستم در این مدل برابر است با:

$$P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t$$

$$; W(T_i, t - T_i), i = 1, 2, \dots, N(t); R)$$

$$= \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i) I\left(\sum_{i=0}^{N(t)} W(T_i, t - T_i) \leq R\right) \quad (20)$$

حال در قضیه زیر در حالتی که R دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، تابع بقا و تابع نرخ شکست سیستم را بدست می‌آوریم:

قضیه ۲.۴. فرض کنید فرایند وقوع ضربه فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ و $\nu(+0) > 0$ باشد. آنگاه:

$$P(T_S > t) =$$

$$\exp\left\{-\int_0^t \nu(x)dx + \int_0^t M_{W(x,t-x)}(-\lambda)q(x)\nu(x)dx\right\}$$

مراجع

- [1] Cha, J. H. and Finkelstein, M. , (2009). On a terminating shock process with independent wear increments. *J. Appl. Prob.*, **44**, 506-513.
- [2] Cha, J. H. and Finkelstein, M. , (2011). On new classes of extreme shock models and sum generalizations. *J. Appl. Prob.*, **48**, 258-270.
- [3] Cha, J. H. and Finkelstein, M. , (2012). Stochastic survival models with events triggered by external shocks. *Prpbability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 183-195.
- [4] Cinlar, E. , (1975). *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- [5] Ross, Sheldon. , (1995). *Stochastic Processes*. John Wiley and sons, INC. New York.

^۶Cha, J. H.

^۷Finkelstein, M.