کاربرد توزیع آماری گامای دو متغیره کرولی در تحلیل فرآیندهای هیدرولوژیکی

مطالعه موردی: ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت

آنیتا عبداللهی نانواپیشه [۱]

چکیده:

روش‌های ریاضی و توزیع‌های آماری، نتایجی دقیق در محاسبات اقلیمی و فرآیندهای هیدرولوژیکی ارائه می‌دهند. آگاهی از توزیع احتمال بارندگی‌ها، زمینه مناسبی برای برنامه‌ریزی منابع آب فراهم می‌آورد. به‌علت اهمیت بارش در مطالعات اقتصادی، اجتماعی و به‌خصوص کشاورزی تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج بیشتر تحقیقات مناسب بودن مدل گاما از جمله توزیع گامای دو متغیره را برای داده‌های بارش نشان می‌دهد. توزیع گامای دومتغیره در مدل‌بندی فرآیندهای هیدرولوژیکی کاربرد دارد. در مقاله حاضر با فرض این‌که X و Y از مدل گامای دو متغیره کرولی پیروی می‌کنند، پس از توضیح مختصری در مورد توزیع دقیق توابع $U = X + Y$ ، $P = XY$ ، $Q = X/(X + Y)$ و همچنین گشتاورهای مربوط به آن‌ها، اعتبار این مدل برای داده‌های ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت بررسی شد. نتایج نشان داد که داده‌های بارندگی این منطقه نیز مناسب بودن مدل گامای دومتغیری کرولی را تأئید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: توزیع گامای دو متغیره کرولی، گشتاورهای توزیع گامای دو متغیره کرولی، مدل توزیع بارش.

۱ مقدمه

پیش‌بینی وقوع یا عدم وقوع بارندگی روزانه و مقدار این بارندگی در مقیاس روزانه و سالانه اهمیت بسیاری در برنامه‌ریزی آبیاری و مدیریت منابع آب دارد. در نواحی دیم‌کاری، که بارش تنها منبع آب برای کشاورزی است، تغییر در مقدار و توزیع فصلی بارش می‌تواند تاثیر زیادی بر اقتصاد منطقه داشته باشد. تعیین مدل توزیع بارش طی سال و تغییرات زمانی آن در ایران که عمدتا دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است و در آن آب مهمترین نهاد محدود کننده تولید است می‌تواند بسیار مهم باشد. به‌علت اهمیت توزیع بارش، تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج بیشتر تحقیقات مناسب بودن مدل گاما از جمله توزیع گامای دو متغیره را برای داده‌های بارش نشان می‌دهد. (برای اطلاعات بیشتر در این زمینه بالاکریشنان [۲] و لای [۳] را ببینید [۱].) این مدل یکی از پرکاربردترین مدل‌ها در تحلیل فرآیندهای هیدرولوژیکی است که در مقالات موجودند [۲]. در بین همه مدل‌های گامای دو متغیره ارائه شده، یک مدل ساده و انعطاف‌پذیر، مدل کرولی است [۳]، که تابع چگالی احتمال توام X و Y در آن به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$f(x.y) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha\beta \exp(-\beta y)[1 - exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha\beta \exp(-\alpha y)[1 - exp(-\beta y)] & \text{اگر } 0 \leq \beta x \leq \alpha y \end{array} \right\} \qquad (۱)$$

که در آن $x > 0$، $y > 0$، $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ است. ترکیب متغیرهایی مثل $U = X + Y$، $P = XY$، $Q = X/(X + Y)$ به‌طورویژه در مطالعه پدیده‌های هیدرولوژیکی

[۱] کارشناس ارشد آمار

کد موضوع بندی ریاضی: ۶۲P۱۲ ، ۶۲GO۷

[۲] Balakrishnan

[۳] Lai

اهمیت دارند [٤،٥،٦]. اهداف این مقاله عبارت از مرور ویژگی‌های مدل ۱، بیان توزیع دقیق متغیرهای $U = X + Y$، $P = XY$ و $Q = X/(X+Y)$، که توسط آناپائولا و همکاران [۷] ارائه شده‌اند و همچنین بررسی احتمالات متغیرهای بارش داده‌های ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت است. در بخش ۲ امیدریاضی و واریانس ، توزیع‌های حاشیه ای ، ضریب همبستگی ، ضریب چولگی و ضریب برجستگی توزیع گامای دومتغیره کرولی را محاسبه خواهیم کرد. در بخش ۳ و ٤ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی دقیق متغیرهای U، P و Q را بیان خواهیم کرد و در نهایت در بخش ٥ و ٦ گشتاورهای آن‌ها و کاربردهایی از نتایج به‌دست آمده را در داده‌های بارندگی ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت ارائه می‌کنیم. محاسبات شامل چندین تابع خاص است مانند تابع بسل اصلاح شده، تابع گامای ناکامل و تابع بتای ناکامل است که به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_n(x) = (\sqrt{\pi}x^n)/(2^n\Gamma(n+1/2)) \times \int_1^\infty \left(t^2-1\right)^{n-1/2}\exp\left(-xt\right)\mathrm{d}t) \tag{۲}$$

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}\exp\left(-t\right)\mathrm{d}t \tag{۳}$$

$$\beta_x(a,b) = \int_0^\infty t^{a-1}\exp\left(1-t\right)^{b-1}\mathrm{d}t. \tag{٤}$$

ویژگی‌های این توابع خاص در اولدهام و همکاران[۸] ارائه شده است.

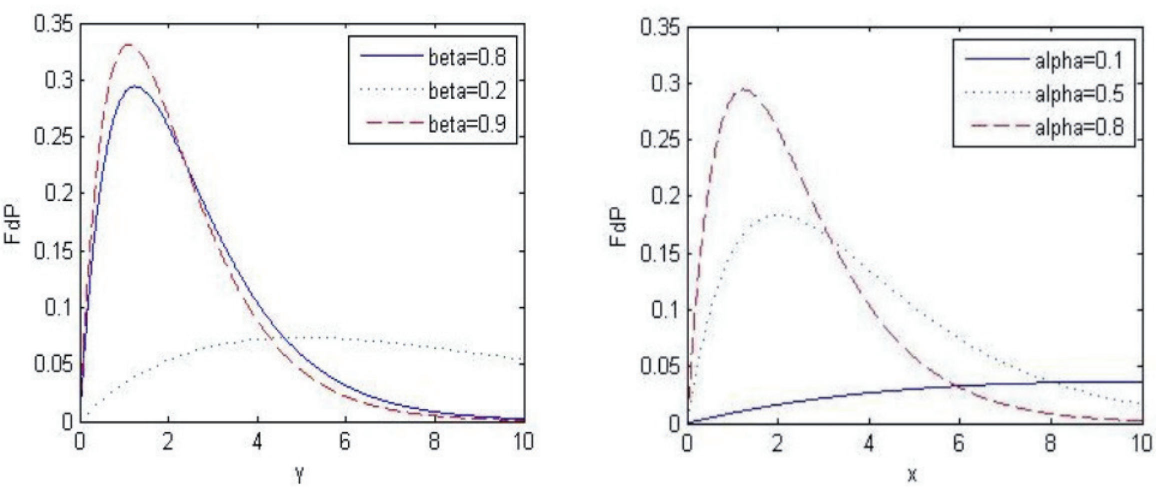
۲ توزیع گامای دومتغیره کرولی

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمالی به شکل معادله ۱ باشند، در این صورت توزیع حاشیه‌ای آن‌ها به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$$f_X\left(x\right) = \alpha^2 x\exp\left(-\alpha x\right) \tag{٥}$$

$$f_Y\left(y\right) = \beta^2 y\exp\left(-\beta y\right) \tag{٦}$$

شکل ۱ توابع چگالی احتمال فوق را را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم‌افزاری مناسب که در محیط متلب[٤] نوشته شده است نشان می‌دهد.



(ب) (الف)

شکل ۱– تابع چگالی احتمال (الف) $f_x(x)$ به ازای $\alpha = 0.1, 0.5, 0.8$ و (ب) $f_y(y)$ به ازای $\beta = 0.8, 0.2, 0.9$

[٤] Matlab

به‌علاوه توزیع شرطی x به شرط $Y=y$ به‌صورت زیر است:

$$f(x|Y=y)=\begin{cases}\alpha(\beta y)^{-1}\left[1-\exp(-\alpha x)\right] & \text{اگر } 0\le\alpha x\le\beta y\\ \alpha(\beta y)^{-1}exp(-\alpha x)\left[\exp(\beta y)-1\right] & \text{اگر } 0\le\beta y\le\alpha x\end{cases},\tag{۷}$$

و به‌طور مشابه توزیع شرطی Y به شرط $X=x$ به‌صورت زیر است:

$$f(Y|X=x)=\begin{cases}\beta(\alpha x)^{-1}exp(-\beta y)\left[\exp(\alpha x)-1\right] & \text{اگر } 0\le\alpha x\le\beta y\\ \beta(\alpha x)^{-1}\left[1-\exp(-\alpha x)\right] & \text{اگر } 0\le\beta y\le\alpha x\end{cases}\tag{۸}$$

لم ۱.۲. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند [۷]، در این‌صورت برای مقادیر صحیح مثبت $n\ge 1$ و $m\ge 1$ داریم:

$$E[X^nY^m]=\frac{m!}{\alpha^n\beta^m 2^{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(n+k)!\left(2^{n+k+1}-1\right)}{k!2^k}+\frac{n!}{\alpha^n\beta^m 2^{m+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(m+k)!\left(2^{m+k+1}-1\right)}{k!2^k}.$$

برهان با استفاده از معادله (۱) داریم:

$$\begin{aligned}E[X^nY^m]&=\alpha\beta\int_0^\infty\int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^\infty x^ny^m exp(-\beta y)\left[1-\exp(-\alpha x)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&+\alpha\beta\int_0^\infty\int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^\infty x^ny^m exp(-\alpha x)\left[1-\exp(-\beta x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\alpha\beta^{-m}\int_0^\infty x^n\Gamma(m+1,\alpha x)\left[1-\exp(-\alpha x)\right]\mathrm{d}x\\&+\beta\alpha^{-n}\int_0^\infty y^m\Gamma(n+1,\beta y)\left[1-\exp(-\beta y)\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

از طرفی با استفاده از اتحاد ارائه شده در اولدهام و همکاران [۸]

$$\Gamma(n+1,x)=\mathrm{n}!\exp(-x)\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{\ k}}{k!},\tag{۹}$$

و به‌این‌ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}E[X^nY^m]&=\alpha\beta^{-m}\int_0^\infty x^n\left[\mathrm{m}!\exp(-\alpha x)\sum_{k=0}^{m}\frac{(\alpha x)^{\ k}}{k!}\right]\left[1-\exp(-\alpha x)\right]\mathrm{d}x\\&+\beta\alpha^{-n}\int_0^\infty y^m\left[\mathrm{n}!\exp(-\beta y)\sum_{k=0}^{m}\frac{(\beta y)^{\ k}}{k!}\right]\left[1-\exp(-\beta y)\right]\mathrm{d}y\\&=\alpha\beta^{-m}m!\sum_{k=0}^{m}\frac{\alpha}{k!}^{\ k}\int_0^\infty x^{n+k}\exp(-\alpha x)\left[1-\exp(-\alpha x)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

در نهایت نتیجه لم، با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$E[X^nY^m]=\frac{m!}{\alpha^n\beta^m 2^{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(n+k)!\left(2^{n+k+1}-1\right)}{k!2^k}+\frac{n!}{\alpha^n\beta^m 2^{m+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(m+k)!\left(2^{m+k+1}-1\right)}{k!2^k}.$$

با استفاده از توزیع‌های X و Y و با استفاده از لم ۱، امید ریاضی و کواریانس X و Y به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$E[X]=\int_0^\infty x\alpha^2xe^{-\alpha x}dx=\int_0^\infty x^2\alpha^2e^{-\alpha x}dx=\frac{2}{\alpha}$$

،

$$E[y]=\int_0^\infty y\beta^2ye^{-\beta y}dy=\int_0^\infty y^2\beta^2e^{-\beta y}dy=\frac{2}{\beta}$$

،

$$\begin{aligned}E[XY]&=\alpha\beta\int_0^\infty\int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^\infty xyexp(-\beta y)\left[1-\exp(-\alpha x)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&+\alpha\beta\int_0^\infty\int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^\infty xyexp(-\alpha x)\left[1-\exp(-\beta x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{\alpha\beta},\end{aligned}$$

$$Con[x,Y]=E[xy]-E[x]E[Y]=\frac{1}{\alpha\beta},\tag{۱۰}$$

و به‌همین ترتیب $E[X^2]$، $E[Y^2]$، $Var[X]$ و $Var[Y]$ به‌شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$E[X^2]=\int_0^\infty x^2\alpha^2xe^{-\alpha x}dx=\int_0^\infty x^3\alpha^2e^{-\alpha x}dx=\frac{6}{\alpha^2},$$

$$E[Y^2]=\int_0^\infty y^2\beta^2ye^{-\beta y}dy=\int_0^\infty y^3\beta^2e^{-\beta y}dy=\frac{6}{\beta^2},$$

$$Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=\frac{6}{\alpha^2}-(\frac{2}{\alpha})^2=\frac{2}{\alpha^2},$$

$$Var[Y]=E[Y^2]-E^2[Y]=\frac{6}{\beta^2}-(\frac{2}{\beta})^2=\frac{2}{\beta^2}.$$

به‌این‌ترتیب ضریب همبستگی X و Y را به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}\left[\mathrm{x},\mathrm{y}\right]}{\sqrt{VAR\left[X\right]}\sqrt{VAR\left[Y\right]}}=\frac{\frac{1}{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}}\sqrt{\frac{2}{\beta^2}}}=\frac{1}{2},$$

و ضریب تغییرات و تابع مولد گشتاور X و Y نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Cv[X]=Cv[Y]=\frac{\sigma}{\mu}=\frac{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}}}{\frac{2}{\alpha}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$M_X[t]=E\left[e^{tx}\right]=\int_0^\infty e^{tx}\alpha^2xe^{-\alpha x}dx=\frac{\alpha^2}{(t-\alpha)^2}],$$

$$M_Y[t] = E\left[e^{tY}\right] = \int\limits_0^\infty e^{tY}\beta^2 Y e^{-\beta Y}dY = \frac{\beta^2}{(t-\beta)^2}.$$

فلذا ضریب چولگی و ضریب برجستگی X به‌ترتیب $\gamma_1[X]$ و $\gamma_2[X]$ به‌صورت زیر است:

$$\gamma_1[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X-\mu_x)^3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3}\int\limits_0^\infty (X-\mu_x)^3\alpha^2 x e^{-\alpha x}dx = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X-\mu_x)^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\sigma^4}\int\limits_0^\infty (X-\mu_x)^4\alpha^2 x e^{-\alpha x}dx - 3 = 3,$$

به طریق مشابه، ضریب چولگی و ضریب برجستگی Y، $\gamma_1[Y]$ و $\gamma_1[Y]$ به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\gamma_1[Y] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(y-\mu_y)^3}{\sigma^3} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[Y] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(y-\mu_y)^4}{\sigma^4} - 3 = 3.$$

۳ تابع چگالی احتمال

قضیه‌های ۳.۱تا ۳.۳ تابع چگالی احتمال $U = X+Y$، $P = XY$، $Z = X/Y$ و $Q = X/(X+Y)$ را زمانی که تابع چگالی توأم X و Y به‌شکل (۱) باشد، ارائه می‌دهد:

قضیه ۳.۱. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند در این صورت داریم:

$$f_U(u) = (\alpha+\beta)\exp(-\alpha u) + \frac{\alpha^2\exp(-\beta u) - \beta^2\exp(-\alpha u)}{\beta-\alpha}, \tag{۱۲}$$

که در آن $u \geq 0$ و $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم $U = X+Y$ و $Q = X/(X+Y)$ به‌صورت زیر است:

$$f(u,q) = \begin{cases} \alpha\beta u\exp[-\beta u(1-q)][1-\exp(-\alpha uq)] & \text{اگر } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta u\exp(-\alpha uq)[1-\exp(-\beta u+\beta uq)] & \text{اگر } \lambda \leq q \leq 1 \end{cases}, \tag{۱۳}$$

که در آن $u > 0$ و $0 \leq q \leq 1$ و $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. □

از معادله (۱۳) تابع چگالی احتمال u به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_U(u) = \int\limits_0^\lambda \alpha\beta u\exp[-\beta u(1-q)][1-\exp(-\alpha uq)]\,dq + \int\limits_\lambda^1 \alpha\beta u\exp(-\alpha uq)[1-\exp(-\beta u+\beta uq)]\,dq.$$

در نهایت نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_U(u) = (\alpha+\beta)\exp(-\alpha u) + \frac{\alpha^2\exp(-\beta u) - \beta^2\exp(-\alpha u)}{\beta-\alpha}.$$

لم ۲.۳. با توجه به معادله (۲.۳.۱٦.۱) در مرجع [۹]، در صورتی که $q > 0$ باشد داریم:

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\exp\left(-px-\frac{q}{x}\right)dx = 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2}k_\alpha\left(2\sqrt{pq}\right). \tag{۱٤}$$

قضیه ۳.۳. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، برای $0 < P < \infty$ داریم:

$$f_P(p) = 2\alpha\beta[\Gamma\left(0,\sqrt{\alpha\beta p}\right) - k_0\left(2\sqrt{\alpha\beta p}\right)]. \tag{۱۵}$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم X و $P = XY$ به‌صورت زیر است:

$$f(x,p) = \begin{cases} \alpha\beta x^{-1}\exp\left(-\beta px^{-1}\right)[1-\exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq x \leq \delta \\ \alpha\beta x^{-1}\exp(-\alpha x)\left[1-\exp\left(-\beta px^{-1}\right)\right] & \text{اگر } \delta < x \end{cases}, \tag{۱٦}$$

که در آن $\delta = \sqrt{\frac{\beta p}{\alpha}}$. به‌این‌ترتیب تابع چگالی احتمال P به‌شکل زیر خواهد بود:

$$f_P(p) = \alpha\beta\int\limits_0^\delta x^{-1}\exp\left(-\beta px^{-1}\right)[1-\exp(-\alpha x)]\,dx + alpha\beta\int\limits_\delta^{+\infty} x^{-1}\exp(-\alpha x)\left[1-\exp\left(-\beta px^{-1}\right)\right]dx.$$

با جایگزینی $t = \frac{\beta p}{x}$ و $k = \alpha x$ انتگرال $f_P(p)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_P(p) = \alpha\beta\int\limits_{\sqrt{\alpha\beta p}}^{+\infty} t^{-1}\exp(-t)\,dt - \alpha\beta\int\limits_0^{+\infty} x^{-1}\exp\left(-\alpha x-\frac{\beta p}{x}\right)dx + \alpha\beta\int\limits_{\sqrt{\alpha\beta p}}^{+\infty} k^{-1}\exp(-k)\,d.$$

در نهایت نتیجه با ترکیب رابطه (٤) و با استفاده از لم ۲.۳ به‌دست می‌آید. □

قضیه ۴.۳. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند، رابطه زیر برای $\eta=\frac{\beta}{\alpha}$ برقرار خواهد بود:

$$f_{\mathrm{Z}}(z)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha Z)^2} & \text{اگر } Z\le\eta\\ \frac{\beta}{\alpha Z^2}-\frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha Z)^2} & \text{اگر } \eta<Z\end{cases}\quad. \qquad (۱۷)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم X و $Z=X/Y$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x,\mathrm{z})=\begin{cases}\alpha\beta xz^{-2}\exp\left(\frac{-\beta}{z}x\right)\left[1-\exp(-\alpha x)\right] & \text{اگر } 0\le z\le\eta\\ \alpha\beta xz^{-2}\exp(-\alpha x)\left[1-\exp\left(\frac{-\beta}{z}x\right)\right] & \text{اگر } \eta<z\end{cases}\ . \qquad (۱۸)$$

به‌این‌ترتیب نتیجه تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به‌دست می‌آید. □

قضیه ۵.۳. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، رابطه زیر برای $0<q<1$ و $\lambda=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ برقرار خواهد بود:

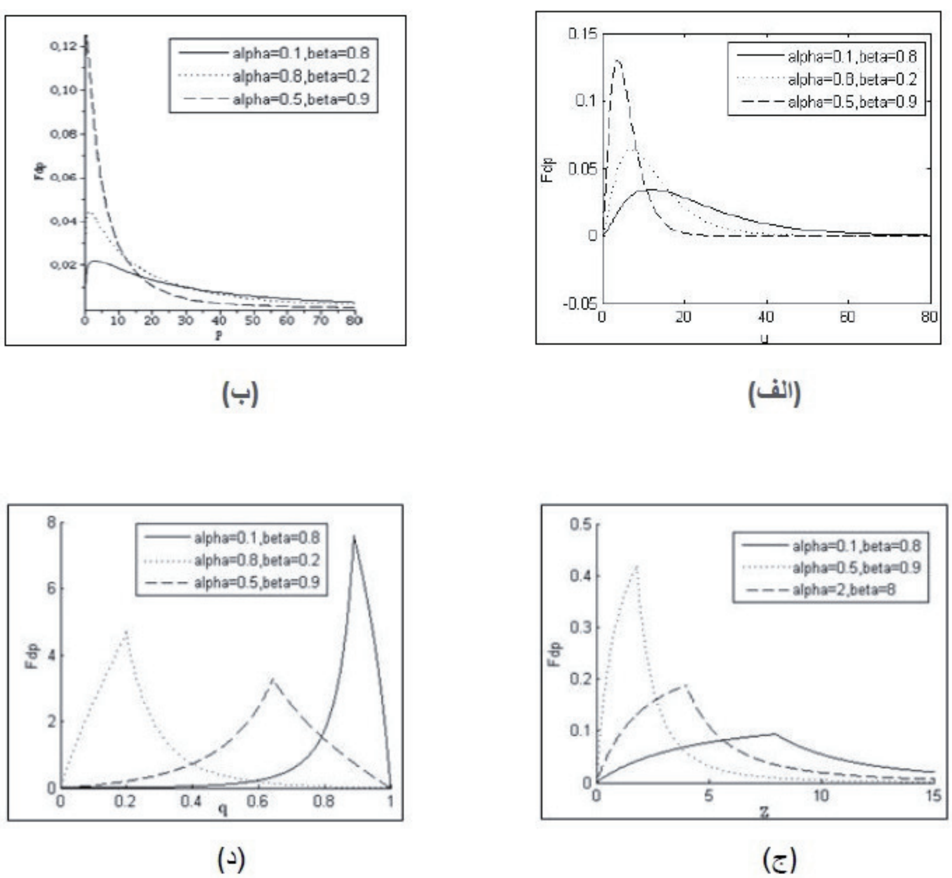
$$f_{\mathrm{Q}}(q)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta(1-q)^2}-\frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q)+\alpha q]^2} & \text{اگر } q\le\lambda\\ \frac{\beta}{\alpha q^2}-\frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q)+\alpha q]^2} & \text{اگر } \lambda<q\end{cases}\quad. \qquad (۱۹)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۳) تابع چگالی احتمال Q به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_{\mathrm{Q}}(q)=\begin{cases}\alpha\beta\int_0^\infty \mathrm{u}\exp\left[-\beta u\left(1-\mathrm{q}\right)\right]\left[1-\exp\left(-\alpha uq\right)\right]du\\ \qquad \text{اگر } 0\le q\le\lambda\\ \alpha\beta\int_0^\infty \mathrm{u}\exp\left(-\alpha uq\right)\left[1-\exp\left(-\beta u+\beta uq\right)\right]\mathrm{d}u\\ \qquad \text{اگر } 0\le q\le 1\end{cases}\ , \qquad (۲۰)$$

و نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به‌دست می‌آید. □

شکل ۲ تابع چگالی احتمال فرم‌های (۱۲)، (۱۵)، (۱۷)، (۱۹) را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم‌افزاری مناسب که در محیط متلب نوشته شده است نشان می‌دهد.



شکل ۲– تابع چگالی احتمال (الف) $f_U(u)$، (ب) $f_P(p)$، (ج) $f_Z(z)$، (د) $f_Q(q)$ با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β.

۴ تابع توزیع تجمعی

قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۴ تابع توزیع تجمعی $U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را زمانی که X و Y دارای تابع چگالی توأم رابطهٔ (۱) باشند نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۴. اگر X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند داریم:

$$F_{\mathrm{U}}\left(u\right)=\begin{cases}\frac{\beta^3\exp(-\alpha u)-\alpha^3\exp(-\beta u)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}-\frac{(\alpha+\beta)\exp(-\alpha u)}{\alpha}+1 & \text{اگر } u>0\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}. \quad (۲۱)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۲) تابع توزیع تجمعی $U = X + Y$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{U}}\left(u\right) &= \int_0^u \left(\alpha+\beta\right)\exp\left(-\alpha \mathrm{t}\right)\\ &+ \frac{\alpha^2\exp\left(-\beta t\right)-\beta^2\exp\left(-\alpha t\right)}{\beta-\alpha}dt,\end{aligned} \quad (۲۲)$$

و نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به‌دست می‌آید. □

قضیه ۲.۴. اگر X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند در این صورت برای $0 < q < 1$، داریم:

$$f_Q(q)=\begin{cases}0 & \text{اگر } q\leq 0\\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)[\beta(1-q)+\alpha q]}+\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\alpha q-\beta}{(\alpha-\beta)(1-q)}\right] & \text{اگر } q\leq\lambda\\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)[\beta(1-q)+\alpha q]}-\frac{\beta}{\alpha q}-\frac{\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)}+1 & \text{اگر } \lambda<q\\ 1 & \text{اگر } 1\leq q\end{cases}$$

(۲۳)

اثبات. با استفاده از معادله (۱۹)، تابع توزیع تجمعی $Q = X/(X + Y)$ برای $0 < q < \lambda$، به‌صورت زیر بوده

$$F_{\mathrm{Q}}\left(q\right)=\int_0^q\left\{\frac{\alpha}{\beta(1-t)^2}-\frac{\alpha\beta}{\left[\beta\left(1-t\right)+\alpha t\right]^2}\right\}\mathrm{d}t, \quad (۲۴)$$

و برای $\lambda < q < 1$ به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}F_Q(q)=&\int_0^\lambda\left\{\frac{\alpha}{\beta(1-t)^2}-\frac{\alpha\beta}{\left[\beta\left(1-t\right)+\alpha t\right]^2}\right\}\mathrm{dt}\\ &+\int_\lambda^q\left\{\frac{\beta}{\alpha t^2}-\frac{\alpha\beta}{\left[\beta\left(1-t\right)+\alpha t\right]^2}\right\}\mathrm{dt}.\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به‌دست می‌آید. □

۵ گشتاورها

در این بخش گشتاورهای متغیرهای $U = X + Y$، $P = XY$ و $Q = X/(X+Y)$ را زمانی که X و Yاز توزیع (۱) پیروی می‌کنند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned}E[u^n]=&\sum_{j=0}^n\left(\begin{array}{c}n\\ j\end{array}\right)\frac{(n-j)!}{\alpha^j\beta^{n-j}2^{j+1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(j+k)!\left(2^{j+k+1}-1\right)}{k!2^k}\right]\\ +&\sum_{j=0}^n\left(\begin{array}{c}n\\ j\end{array}\right)\frac{\mathrm{j}!}{\alpha^j\beta^{n-j}2^{n-j+1}}\left[\sum_{k=0}^{j}\frac{(n-j+k)!\left(2^{n-j+k+1}-1\right)}{k!2^k}\right].\end{aligned}$$

اثبات. نتیجه این تئوری با استفاده از لم ۱.۲ و با استفاده از ویژگی زیر به‌دست می‌آید:

$$E[u^n]=\mathrm{E}[(x+y)]^n=\sum_{j=0}^n\left(\begin{array}{c}n\\ j\end{array}\right)E[X^jY^{n-j}]. \quad (۲۵)$$

□

قضیه ۲.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$E[p^n]=\mathrm{E}[(x+y)]^n=\sum_{j=0}^n\left(\begin{array}{c}n\\ j\end{array}\right)E[X^jY^{n-j}]. \quad (۲۶)$$

اثبات. نتیجه این تئوری با استفاده از لم ۱.۲ به‌دست می‌آید. □

قضیه ۳.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned}E[Q^n] &= \frac{\alpha}{\beta}\beta\left(n+1,-1\right)+\frac{\beta}{\alpha}H\left(n\right) \quad (۲۷)\\ &- \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^n\left(\begin{array}{c}n\\ k\end{array}\right)\left(-\beta\right)^{n-k+1}J\left(k\right),\end{aligned}$$

و

$$\mathrm{H}(n)=\begin{cases}\frac{1-^{n-1}}{n-1}\ \text{اگر}\ ,n\neq 1\\ -ln,\ \text{اگر}\ n=1\end{cases},$$

$$\mathrm{J}(k)=\begin{cases}\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{K-1},\ \text{اگر}\ k\neq 1\\ ln\alpha-ln\beta,\ \text{اگر}\ k=1\end{cases}.$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned}E[Q^n]&=\int_0^{\lambda}\left\{\frac{\alpha}{\beta(1-q)^2}-\frac{\alpha\beta}{[\alpha q+\beta(1-q)]^2}\right\}q^n\mathrm{d}q\\&+\int_{\lambda}^{1}\left\{\frac{\beta}{\alpha q^2}-\frac{\alpha\beta}{[\alpha q+\beta(1-q)]^2}\right\}q^n\mathrm{d}q\\&=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{\lambda}\frac{q^n}{(1-q)^2}\mathrm{d}q+\frac{\beta}{\alpha}\int_{\lambda}^{1}q^{n-2}dq\\&-\alpha\beta\int_0^1\frac{q^n}{\alpha q+\beta(1-q)^2}\mathrm{d}q\end{aligned}\qquad (۲۸)$$

توجه کنید که دو انتگرال اول در معادله (۲۸) با استفاده از معادله (۵) و انتگرال‌گیری ساده حل می‌شوند. با جایگزین کردن $t=\alpha q+\beta(1-q)$ داریم:

$$\alpha\beta\int_0^1\frac{q^n}{[\alpha q+\beta(1-q)]^2}\mathrm{d}q=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^{n+1}}\int_{\beta}^{\alpha}(t-\beta)^n t^{-2}dt.$$

در نهایت نتیجه قضیه با استفاده از بسط چندجمله‌ای $(t-\beta)^n$ و انتگرال‌گیری ساده به‌دست می‌آید. $\square$

۶ کاربرد

داده‌های این مطالعه از ثبت اطلاعات بارندگی ۷۳۰ روزه ایستگاه فرودگاه رشت، از فروردین ماه سال ۹۰ تا اسفند ماه سال ۹۱، جمع‌آوری شده‌اند. جفت‌های (X_j,Y_j)، $j=1,...,n$ متغیرهای تصادفی هستند.

X_j تعداد روزهای بارندگی متوالی و Y_j تعداد روزهای غیر بارندگی متوالی شهرستان رشت است. فرض کنید که در اولین روز از ۷۳۰ روز باران ببارد، تعداد روزهای متوالی بارندگی را حساب می‌کنیم و آن را X_1 می‌نامیم. تعداد روزهای بارندگی غیرمتوالی را حساب کرده و آن را Y_1 می‌نامیم. با این نحوه عملکرد به n=101 دوره آب و هوایی می‌رسیم. می‌خواهیم توزیع متغیرهای تصادفی $U=X+Y$ را به‌دست آوریم. فرض کنید $X\sim Gamma(2,\alpha)$ و $Y\sim Gamma(2,\beta)$ یک نمونه به صورت $(x_1,y_1),(x_2,y_2),,(x_n,y_n)$ از (X,Y) ارائه دهد. در این صورت برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم برای α و β به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}&=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{2\times 101}{243}=0.831,\\ \hat{\beta}&=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n y_i}=\frac{2\times 101}{487}=0.414.\end{aligned}$$

لذا برآوردهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به‌صورت $\hat{\alpha}=0.831$ و $\hat{\beta}=0.414$ هستند و بنابراین مدل (۱) به‌صورت زیر اصلاح می‌شود

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.344\exp(-0.414y)\left[1-\exp(-0.831x)\right]\\ \qquad \text{اگر}\ 0\leq 0.831x\leq 0.414y,\\ 0.344\exp(-0.831x)\left[1-\exp(-0.414y)\right]\\ \qquad \text{اگر}\ 0\leq 0.414y\leq 0.831x.\end{cases}$$

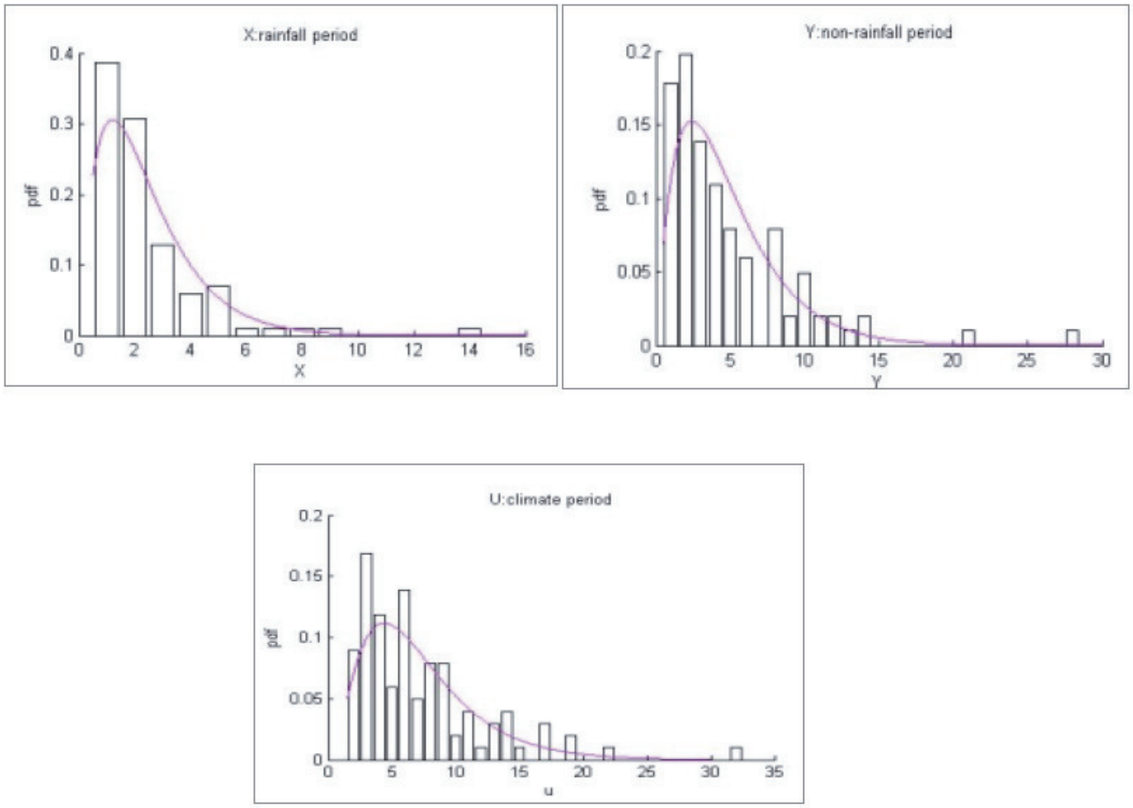
و همچنین با توجه به روابط (۵)، (٦) و (۱۲) داریم:

$$f_X(x)=(0.831)^2x\exp(-0.831x),$$

$$f_Y(y)=(0.414)^2y\exp(-0.414y),$$

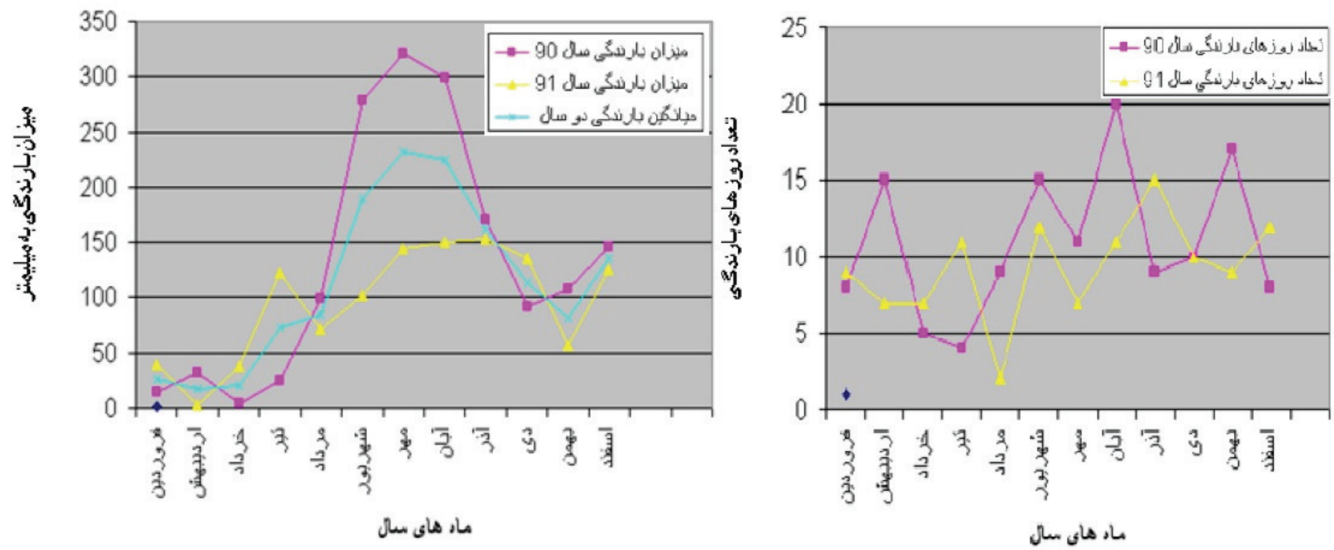
$$f_U(u)=(1.245)\exp(-0.831u)+\frac{(0.831)^2\exp(-0.414u)-(0.414)^2\exp(-0.831u)}{0.414-0.831}.$$

در شکل ۳ تابع چگالی احتمال مناسب برای X و Y و U به‌ترتیب نشان داده شده است. این شکل مناسب بودن مدل را برای متغیرهای تصادفی X و Y، که به ترتیب نشان دهندهٔ تعداد روزهای بارندگی متوالی و Y تعداد روزهای غیربارندگی متوالی هستند و همچنین $U=X+Y$، که نشان دهندهٔ دوره‌های آب و هوایی است، نشان می‌دهد.



شکل۳- توزیع مناسب برای X و Y و U با در نظر گرفتن مدل کرولی.

در شکل‌های زیر میزان بارندگی ماهانه سال‌های 90 و 91 و میانگین بارندگی این دو سال و همچنین تعداد روزهای بارندگی نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ماکسیمم متوسط بارندگی در ماه مهر و تقریبا به مقدار 230 میلی‌متر می‌باشد.



شکل ٤- میزان بارندگی ماهانه سال‌های 90 و 91 و میزان بارندگی این دو سال و همچنین تعداد روزهای بارندگی.

۷ نتیجه‌گیری

مهمترین نتایج حاصل از بررسی مدل ارائه شده و همچنین بررسی داده‌های بارندگی روزانه در ایستگاه فرودگاه رشت در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۱ را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

۱. با در نظر گرفتن این‌که X و Y از مدل گامای دو متغیره کرولی پیروی می‌کند و با استفاده از توابع خاص توانستیم ویژگی‌های مدل گامای دو متغیره کرولی و همچنین توزیع دقیق گشتاورهای متغیرهای تصادفی $U = X + Y$، $P = XY$ و $Q = X/(X + Y)$ را محاسبه کنیم.

۲. بررسی داده‌های بارندگی روزانه رشت مناسب بودن مدل گامای دو متغیره را برای داده‌های بارندگی نشان می‌دهد.

۳. با مطالعه متوسط میزان بارندگی روزانه به این نتیجه رسیدیم که ماکسیمم میزان بارندگی در ماه مهر و تقریبا به مقدار 230 میلی‌متر است.

مراجع

[1] Balakrishnan, N. and Lai, CD. (2009). *continuos bivariate distributions*, vol 120, Springer-verlag.

[2] Nadarajah, S. (2007). A bivariate gamma model for drought Water Resour Res, **43,** 749-759.

[3] Crovelli, RA. (1973). A bivariate precipitation model Amer Meteor Soc **1,** 130-134.

[4] Gupta, AK. and Nadarajah, S. (2006). Sums, products and rations for Mckay's bivariate gamma Distributions. *Math Comput Model,* **1,** 185-193 .

[5] Nadarajah, S. (2005). Products and ratios for a bivariate gamma distribution. *J Appl Math comput,* **24,** 581-595.

[6] Nadarajah, S. (2009). A bivariate gamma distribution with gamma and beta marginal with application to drought data. *J Appl Stat* **36,** 277-301.

[7] Paula, A.C., Silva, M. Araujo Rodrigues, J., Monterio Chaves, L. and Jaques de Souza, D. (2013). Sums, Products and Ratio for Crovelli's Bivariate Gamma Distribution.

[8] 1. Oldham, K., Myland. J, and Spanier, J. (2009). *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator.* Springer- Verlag.

[9] 1. Prudnikov, AP., Brychkov, YA. and Marichev, OI. (1998). *Integrals and series*, vol 1, Gordon and Breach, Amsterdam