

## آنالیز ترکیبی ترازو و وزنه‌ها

خسرو فضلی\*

### چکیده

در مقاله حاضر تحت شرایط ویژه‌ای به این سؤال پاسخ می‌دهیم که با یک ترازوی دو کفه‌ای و تعدادی وزنه مشخص، چند مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

### مقدمه

فرض کنید یک ترازوی دو کفه‌ای و تعدادی وزنه در اختیار داریم. چند مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد؟ مثلاً با وزنه‌های ۱، ۳ و ۹ کیلوگرمی می‌توان ۱۳ مقدار مختلف و با سه وزنه ۱، ۳ و ۹ کیلوگرمی می‌توان ۷ مقدار مختلف را توزین کرد.

برای بررسی مسأله، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که وزنه‌ها متمایز هستند. بنابراین فرض کنید  $n$  وزنه متمایز  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کیلوگرمی در اختیار داریم. برای توزین یک چیز  $M$  کیلوگرمی آنرا در کفه راست ترازو گذاشته و سپس هر وزنه  $x_i$  را به یکی از صورتهای زیر به کار می‌بریم:

(۱)  $x_i$  را در کفه چپ می‌گذاریم،

(۲)  $x_i$  را در کفه راست می‌گذاریم،

(۳)  $x_i$  را به کار نمی‌بریم.

بنابراین هر مقدار قابل توزین  $M$  کیلوگرمی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$M = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (۱)$$

که هر  $\alpha_i$  عضو مجموعه  $\{-1, 0, 1\}$  است. اگر  $\alpha_i = 1$  یعنی  $x_i$  را در کفه چپ، اگر  $\alpha_i = -1$  یعنی  $x_i$  را در کفه راست گذاشته‌ایم و اگر  $\alpha_i = 0$  یعنی  $x_i$  را به کار نبرده‌ایم. بنابراین حداکثر  $3^n$  مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد، زیرا هر  $M$  ای که در معادله (۱) صدق کند، با انتخاب مقادیری برای  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  از مجموعه  $\{-1, 0, 1\}$  به دست می‌آید. اما باید به دو نکته توجه داشت. اول اینکه برخی از مقادیر  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  منجر به مقادیر غیر مثبت  $M$  می‌شوند که مورد نظر نیستند. نکته دوم که اهمیت زیادی دارد این است که، امکان دارد مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  منجر به مقداری یکسان برای  $M$  بشوند. شرایطی که از چنین امکانی جلوگیری می‌کند در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱. اگر مقادیر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  در دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} x_2 > 2x_1 \\ x_3 > 2(x_1 + x_2) \\ \vdots \\ x_n > 2(x_1 + \dots + x_{n-1}) \end{cases}$$

صدق کنند، آنگاه می‌توان  $\frac{3^n - 1}{2}$  مقدار مختلف را توزین کرد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تحت این شرایط نمایش  $M$  به صورت معادله

(۱) یکتاست. برای این منظور فرض کنید ضرایب  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  که در

مجموعه  $\{-1, 0, 1\}$  قرار دارند، به قسمی باشند که

\* - خسرو فضلی، گروه ریاضی، دانشگاه کردستان

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 2x_n \\
 & < (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 4x_1 \\
 & \quad - 4x_2 - \dots - 4x_{n-1} \\
 & = (\alpha_1 - \beta_1 - 4)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - 4)x_{n-1} \\
 & \leq (2 - 4)x_1 + \dots + (2 - 4)x_{n-1} = -2x_1 + \dots - 2x_{n-1} \\
 & \leq 0
 \end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین  $\alpha_n - \beta_n \neq -2$ .

با همین روش و با به کارگیری معادله (۳) می‌توان نشان داد که

$$\alpha_n - \beta_n \neq 1.$$

پس بنا بر (الف) و (ب) داریم  $\alpha_n - \beta_n = 0$ . بنابراین در این صورت معادله (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} = 0$$

با توجه به استدلال قبلی و مجموعه نامعادلاتی که در قضیه آمده است می‌توان نشان داد که  $\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} = 0$  یعنی  $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ . بنابراین با تکرار استدلال بالا، داریم:

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

پس متناظر با هر  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  که  $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$  مقادری یکتا برای  $M$  از معادله (۱) به دست می‌آید. بنابراین  $3^n$  مقدار مختلف برای  $M$  داریم که یکی از آنها ۰ است و به ازای  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  حاصل می‌شود. پس  $3^n - 1$  مقدار غیرصفر داریم که نیمی از آنها مثبت‌اند. در نتیجه می‌توان  $\frac{3^n - 1}{4}$  مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

مثال: با وزنه‌های  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 9, x_4 = 27, x_5 = 81$  می‌توان ۱۲۱ مقدار مختلف را توزین کرد، زیرا این مقادیر در شرایط قضیه (۱) صدق می‌کنند و بنابراین  $121 (= \frac{3^5 - 1}{4})$  مقدار مختلف داریم.

حال فرض کنید  $k_1$  تا وزنه  $x_1$  کیلوگرمی،  $k_2$  تا وزنه  $x_2$  کیلوگرمی، ...

و  $k_n$  تا وزنه  $x_n$  کیلوگرمی داریم و برای هر  $i, k_i \geq 1$ .

تعمیم قضیه ۱ به صورت زیر است:

قضیه ۲. فرض کنید  $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$  و مقادیر  $x_1, x_2, \dots$

در دستگاه نامعادلات زیر صدق کنند:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n.$$

نشان می‌دهیم برای هر  $i = 1, 2, \dots, n, \alpha_i = \beta_i$ .

از تساوی فوق داریم:

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n = 0 \quad (2)$$

یا

$$(\beta_1 - \alpha_1)x_1 + (\beta_2 - \alpha_2)x_2 + \dots + (\beta_n - \alpha_n)x_n = 0 \quad (3)$$

واضح است که  $\alpha_i - \beta_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . ابتدا نشان می‌دهیم  $\alpha_n - \beta_n = 0$ . اگر چنین نباشد یکی از موارد زیر را داریم:

$$\alpha_n - \beta_n = -1 \text{ (الف)}$$

در این صورت معادله (۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - x_n = 0$$

از طرفی با توجه به شرایط قضیه

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - x_n \\
 & < (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 2x_1 - \dots - 2x_{n-1} \\
 & = (\alpha_1 - \beta_1 - 2)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - 2)x_{n-1} \\
 & \leq (2 - 2)x_1 + \dots + (2 - 2)x_{n-1} = 0
 \end{aligned}$$

یعنی

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - x_n < 0$$

که تناقض است. بنابراین  $\alpha_n - \beta_n \neq -1$ .

با همین روش و با به کارگیری معادله (۳) می‌توان نشان داد که

$$\alpha_n - \beta_n \neq 1.$$

$$\alpha_n - \beta_n = -2 \text{ (ب)}$$

در این صورت معادله (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 2x_n = 0$$

از طرفی

که تناقض است. بنابراین  $\alpha_n - \beta_n \neq -1$ .

حال نشان می‌دهیم که  $\alpha_n - \beta_n$  نمی‌تواند از  $-1$  کمتر باشد. زیرا در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i + (\alpha_n - \beta_n)x_n \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i - x_n \leq 0 \end{aligned}$$

بنابراین اگر  $\alpha_n - \beta_n \leq -1$ ، به تناقض می‌رسیم. پس  $\alpha_n - \beta_n \geq 0$ . حال فرض می‌کنیم  $\alpha_n - \beta_n = 1$ ، داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i + x_n \\ &> \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i + \sum_{i=1}^{n-1} 2kx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i + 2k)x_i \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

که بازم به تناقض می‌رسیم. بنابراین  $\alpha_n - \beta_n \neq 1$ .

همانند استدلال قبلی می‌توان نشان داد که  $\alpha_n - \beta_n$  نمی‌تواند از  $1$  نیز بزرگتر باشد. بنابراین  $\alpha_n - \beta_n \leq 0$ . ولی دیدیم که  $\alpha_n - \beta_n \geq 0$ ، پس  $\alpha_n - \beta_n = 0$  یا  $\alpha_n = \beta_n$ . اینک با توجه به اینکه  $\alpha_n - \beta_n = 0$ ، داریم:

$$0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i$$

حال با همین روش و مجموعه شرایط قضیه، می‌توان نشان داد که  $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$  و بدین ترتیب سایر ضرایب مساوی‌اند.

پس معادله  $M = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n$  به صورتی یکتا به وسیله ضرایب  $\alpha_i$  مشخص می‌شود. چون  $\alpha_i \in \{-k_i, \dots, 0, \dots, k_i\}$  پس  $\prod_{i=1}^n (2k_i + 1)$  مقدار مختلف برای  $M$  به دست می‌آید. یکی از این مقادیر صفر و نیمی از مقادیر غیر صفر، مثبت‌اند. بنابراین  $\frac{[\prod_{i=1}^n (2k_i + 1)]^{-1}}$  مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

$$\begin{cases} x_2 > 2kx_1 \\ x_2 > 2k(x_1 + x_2) \\ \vdots \\ x_n > 2k(x_1 + \dots + x_{n-1}) \end{cases}$$

در این صورت با این وزنه‌ها می‌توان  $\frac{[\prod_{i=1}^n (2k_i + 1)]^{-1}}$  مقدار مختلف را توزین کرد.

برهان. هر چیز قابل توزین  $M$  کیلوگرمی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$M = \left( \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1j} \right) x_1 + \left( \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_{2j} \right) x_2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj} \right) x_n$$

که  $\alpha_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ . اگر قرار دهیم  $\alpha_i = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij}$ ، معادله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$M = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n$$

که برای هر  $i$ ،  $\alpha_i \in \{-k_i, \dots, 0, \dots, k_i\}$ .

حال نشان می‌دهیم که تحت شرایط قضیه ۲، ضرایب  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  به صورتی یکتا،  $M$  را مشخص می‌کنند. یعنی اگر مجموعه ضرایب دیگری مانند  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  داشته باشیم که

$$M = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + \beta_nx_n$$

آنگاه  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ .

بنابراین  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)x_i = 0$  در ضمن برای هر  $i$ ،

$$\alpha_i - \beta_i \in \{-2k_i, \dots, 0, \dots, 2k_i\}.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که  $\alpha_n - \beta_n = 0$ . اگر چنین نباشد حالت‌های مختلفی داریم. اگر  $\alpha_n - \beta_n = -1$  در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i - x_n \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)x_i - 2k \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i - 2k)x_i \\ &\leq 0 \end{aligned}$$