معیار نزدیکی پیتمن در برابر میانگین توان دوم خطا

علیرضا نعمت اللهی*

چکیده

زمانی که برای یک مسئلهٔ آماری، چند برآوردگر متفاوت در اختیار داریم، یافتن «بهترین» برآوردگر دارای اهمیت بوده و مسلم است که قضاوت باید بر اساس معیارهای معقول باشد. بعضی از این معیارها، مانند میانگین توان دوم خطا (MSE) در بین پژوهشگران، بسیار معمول بوده، ولی معیار نزدیکی پیتمن (PMC) به سبب ناآشنایی با ویژگیهای آن، کمتر مورد استفاده قرار گرفته است. در این مختصر ضمن معرفی و بررسی معیار نزدیکی پیتمن، کوشش شده است تا با بر شمردن نقاط ضعف MSE، به اهمیت به کارگیری معیارهایی نظیر معیار پیتمن به جای میانگین توان دوم خطا در بعضی مسائل اشاره گردد.

۱ مقدمه و تعاریف

از دیدگاه تاریخی، تحقیق در نظریهٔ برآورد، با به دست آوردن برآوردگرهایی بر اساس خواص آماری آنها (مانند برآوردگری باحداقل واریانس) آمیخته است. روشهای متفاوتی برای برآورد پارامترهای مجهول وجود دارد، که از آن جمله می‌توان از روش گشتاورها،کمترین توانهای دوم، درستنمایی ماکسیمم، نا اریبی با کمترین واریانس، روش بیز، روش بیز تجربی و غیره نام برد. کارآیی هر روش به آسان بودن و خواص آن روش بستگی دارد. با اینکه وجود روشهای مختلف برای برآورد پارامترهای مجهول یک برتری به‌حساب می‌آید، امّا پرسش اساسی در این زمینه این است که «از بین روشهای موجود کدامیک را باید برگزید؟»

یک معیار بسیار معمول برای به‌دست آوردن «بهترین» برآوردگر، که در بین آماردانان از مطلوبیت خاصی برخوردار است، میانگین توان دوم خطا[۱] یا به اختصار MSE است. استفاده از MSE برای اولین بار را به گاوس[۲] ریاضیدان آلمانی نسبت می‌دهند. با استفاده از این معیار، برآوردگری که دارای کمترین MSE باشد انتخاب می‌شود.

واضح است که اگر تعداد برآوردگرها متناهی باشد، انتخاب بین آنها کار نسبتاً ساده‌ای است. در صورتی که امکان یافتن یک برآوردگر که در یک ردهٔ نامتناهی از برآوردگرها، به‌طور یکنواخت دارای کمترین MSE باشد، غالباً غیر ممکن است. مناسبات عملی، عقاید سنتی و راحتی محاسبات ریاضی باعث شده‌اند تا از MSE معیاری بسیار معمول و متداول ساخته شود.

در صورتی که در نظریهٔ برآورد، تنها به استفاده از MSE (و در حالت کلی استفاده از تابع مخاطره) به عنوان معیاری در مقایسهٔ برآوردگرها بسنده کنیم، مشکلات و ضعفهای ذاتی اجتناب ناپذیری بروز خواهد کرد.

در این مقاله سعی خواهیم کرد ضمن بر شمردن برخی از محدودیتها و نقاط ضعف MSE که در مسائل مختلف رخ می‌دهند، به معرفی و بررسی معیار نزدیکی پیتمن[۳] یا به اختصار PMC که نخستین بار آن را پیتمن [۷] برای مقایسهٔ دوبه‌دوی برآوردگرهای آماری، معرفی کرده است، بپردازیم. این معیار به صورت زیر تعریف شده است:

*) علیرضا نعمت اللهی، بخش آمار، دانشگاه شیراز

1) Mean Square Error 2) Gauss 3) Pitman's Measure of Closeness

تعریف ۱: فرض کنید T_1 و T_2 دو برآوردگر برای پارامتر مجهول $\theta(\in\Omega)$ باشند. معیار نزدیکی پیتمن (PMC) برای این دو برآوردگر که آن‌را با نماد $PMC(T_1,T_2|\theta)$ نشان خواهیم داد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PMC(T_1,T_2|\theta)=P_\theta(|T_1-\theta|<|T_2-\theta|).$$

در ساده‌ترین تعبیر PMC، می‌توان آن‌را به عنوان فراوانی نسبی اینکه، T_1 نزدیکتر از رقیبش یعنی T_2 به پارامتر واقعی ولی مجهول θ باشد، تلقی کرد.

معیار نزدیکی پیتمن دارای سابقه‌ای در حدود نیم قرن است. مسائلی نظیر عدم اتکا به وجود گشتاورها (بر خلاف MSE)، تعبیر ساده و بدیهی که در این معیار نهفته است، و وجود مواردی که در آنها معیارهای دیگر غیر قابل استفاده هستند، باعث شدند تا از PMC خود به خود یک معیار شهودی ساخته شود. البته این معیار به خاطر پیچیدگی ظاهری ساختارش کمتر مورد استفاده قرار گرفته است.

تعریف ۲: (برآوردگر پیتمن‌ـنزدیکتر[4]) در بین برآوردگرهای θ، $\theta\in\Omega$، بر اساس یک متغیر تصادفی X، برآوردگر $T_1=T_1(X)$ راپیتمن‌ـنزدیکتر از $T_2=T_2(X)$ و T_2 را پیتمن‌ـغیرمجاز[5] گوییم هرگاه

$$PMC(T_1,T_2|\theta)=P_\theta(|T_1-\theta|<|T_2-\theta|)\ge \text{۰/۵},\ \forall\theta\in\Omega$$

و حداقل به ازای θیی نا مساوی اکید برقرار باشد. برآوردگر T_2 را پیتمن‌ـمجاز[6] گوییم، اگر چنین T_1ی وجود نداشته باشد.

لازم به ذکر است که پیتمن، تعریف اولیه خود را برفرض زیر بنا نهاد:

$$P_\theta(|T_1-\theta|=|T_2-\theta|)=0,\ \forall\theta\in\Omega$$

(فرض پیش نیامدن تساوی). واضح است که این شرط همیشه برقرار نیست، زیرا ممکن است T_1 و T_2 با احتمال مثبت برابر باشند. به عنوان مثال زمانی که برآوردگرها دارای توزیع گسسته ویا زمانی که دو برآوردگر پیوسته در توافق باشند، نظیر برآوردگرهای توافقی زیر،

$$T_1=X,\qquad T_2=\begin{cases}X, & |X|>C\\ 0, & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

امکان دارد که احتمال فوق مثبت باشد. (در چنین مواردی، PMC احتیاج به یک اصلاح اساسی دارد که بحث آن از حوصلهٔ این مقاله خارج است.)

تعریف ۳: (پیتمن ـ نزدیکترین برآوردگر[7]) برآوردگر $T^*=T^*(X)$ را پیتمن‌ـ نزدیکترین برآوردگر θ گوییم، هرگاه برای هر برآوردگر دیگری مانند $T=T(X)$ داشته باشیم:

$$P_\theta(|T^*-\theta|<|T-\theta|)\ge \text{۰/۵},\quad \forall\theta\in\Omega.$$

به سهولت می‌توان نشان داد که وجود نزدیکترین برآوردگر از دیدگاه معیار پیتمن، تنها در حالتهای ویژه‌ای که برآوردگرهای بدون خطا یعنی $P_\theta(T^*=\theta)=1$ وجود داشته باشند، امکان‌پذیر است. (رجوع کنید به [1]). نکتهٔ دیگر این است که در مورد دو برآوردگر T_1 و T_2 برای θ، ممکن است T_1 پیتمن‌ـنزدیکتر از T_2 یا T_2 پیتمن‌ـنزدیکتراز T_1 باشد، یا ممکن است T_1 و T_2 هم ارز پیتمنی باشند، یعنی به‌ازای هر θ، $\theta\in\Omega$، داشته باشیم $PMC(T_1,T_2|\theta)=\text{۰/۵}$. اما در حالت کلی، T_1 تنها روی بخشی از Ω نزدیکتر از T_2 و T_2 روی بخش دیگری از Ω، نزدیکتر از T_1 است وهم ارزی را روی بقیهٔ Ω خواهیم داشت. بنابراین در چنین حالتهایی، معیار پیتمن توانایی انتخاب یکی از این دو را نخواهد داشت.

۲ پدیدهٔ رائو

شاید مهمترین ضعف MSE را بتوان در مباحثهٔ بین برکسن[8] و رائو[9] در سال ۱۹۸۰ یافت. پرسشی که رائو مطرح کرد این بود: «آیا تابع زیان درجه دوم همواره مناسب است؟».

رائو مثالهای مختلفی را ارائه نمود که در آنها، برآوردگرهایی که MSE کمتری داشتند، دارای عملکرد ضعیفی نسبت به معیارهای ذاتی (معیارهایی که بر احتمال پیشامدهای معین مبتنی هستند، مانند معیار پیتمن) بودند. از جمله، فرض کنید $X\sim N(0,\sigma^2)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$E\left(\frac{X^2}{3}-\sigma^2\right)^2=\frac{6}{9}\sigma^4<2\sigma^4=E(X^2-\sigma^2)^2,\ \forall\sigma^2>0$$

بنابراین، برمبنای MSE، $\frac{X^2}{3}$ برآوردگری بهتر از X^2 برای برآورد σ^2 است.

4) Pitman-closer 5) Pitman-inadmissible 6) Pitman-admissible 7) Pitman-Closest Estimator 8) Berkson 9) Rao

حال آیا می‌توان از این حکم نتیجه گرفت که $\frac{X^2}{3}$ نزدیکتر از X^2 (برآوردگر نااریب σ^2) به پارامتر σ^2 است؟ ملاحظه می‌شود که

$$PMC(X^2, \frac{X^2}{3}|\sigma^2) = P_{\sigma^2}(|X^2 - \sigma^2| < |\frac{X^2}{3} - \sigma^2|)$$
$$= P_{\sigma^2}(\frac{4}{3}X^2 - 2\sigma^2 < 0)$$
$$= P(\mathcal{X}^2_{(1)} < 1/5)$$
$$> 0/5 \quad , \forall \sigma^2 > 0$$

در نتیجه، X^2 پیتمن-نزدیکتر از $\frac{X^2}{3}$ به σ^2 است. حال کدامیک را باید برگزید؟

مثالهایی از این قبیل، باعث شدند تا رائو به طورکلی موضوع را بررسی کند. او [۹] موفق شد به پدیده‌ای دست یابد که طی آن استفاده از MSE را بایستی کاملاً با احتیاط و با رعایت جوانب انجام داد. او با ارائهٔ مثالهای مختلف نشان داد که «کوتاه کردن»[10] میانگین توان دوم خطای یک برآوردگر نااریب و رسیدن به برآوردگری با کمترین MSE، الزاماً منجر به یافتن برآوردگری نمی‌شود که از دید معیار پیتمن، بهتر باشد. این پدیده در نوشته‌های آماری به نام پدیدهٔ رائو [11] معروف است. رائو پیشنهاد می‌کند شرط کمترین MSE را به عنوان یک ابزار اولیه برای به دست آوردن برآوردگرها، به لحاظ راحتی محاسبات و بعضی ملاحظات شهودی، می‌توان مورد استفاده قرار داد، اما برای قبول یا رد هر یک از این برآوردگرهای به دست آمده، باید قضاوت را بر اساس معیارهایی با تعبیر ذاتی بیشتر، نظیر معیار پیتمن صورت داد.

مثال ۱: مسئلهٔ برآورد واریانس توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ را با استفاده از یک نمونه تصادفی n تایی در نظر بگیرید. واضح است که $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ یعنی واریانس نمونه، تابعی از آمارهٔ بسندهٔ کامل و برآوردگری نااریب برای پارامتر σ^2 است. بنابراین S^2 برآوردگر نااریب σ^2 با کمترین واریانس یعنی $UMVUE$ است. توجه خود را به ردهٔ زیر از برآوردگرها معطوف می‌کنیم:

$$B = \{cS^2; c > 0\}$$

زمانی که $c = c_1 = 1$، برآوردگر $S^2 \in B$ را داریم که برای σ^2، $UMVUE$ است. با انتخاب $c = c_2 = \frac{n-1}{n+1}$ برآوردگری با کمترین MSE (هر چند اریب) به دست می‌آید. این امر با استفاده از محاسبات ساده وآزمون مشتق دوم و همچنین استفاده از این حکم که $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{(n-1)}$ به سادگی تحقیق می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که S^2 یک برآوردگر غیر مجاز [12] برای σ^2 نسبت به MSE است. حال پرسشی که مطرح می‌شود این است که با معیار پیتمن وضع چه گونه خواهد بود؟

با فرض $n \geq 2$ ، $c_1 = 1$ و $c_2 = \frac{n-1}{n+1}$، داریم:

$$PMC(c_1S^2, c_2S^2|\sigma^2) = P_{\sigma^2}(|c_1S^2 - \sigma^2| < |c_2S^2 - \sigma^2|)$$
$$= P_{\sigma^2}(c_1S^2 + c_2S^2 - 2\sigma^2 < 0)$$
$$= P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)(n+1)}{n})$$
$$= P(Y < \frac{(n-1)(n+1)}{n})$$
$$> P(Y < n-1)$$
$$> P(Y < m_{n-1})$$
$$= 0/5,$$

که در آن m_f، میانهٔ توزیع خی‌دو با f درجه آزادی است. (توجه کنید دلیل درستی نامساوی آخر این است که توزیع خی‌دو تک‌نمایی و دارای چولگی مثبت است و در نتیجه خواهیم داشت:

میانگین > میانه > نما

پس در مثال فوق، $m_{n-1} < n-1$.)

ملاحظه می‌شود که PMC، یعنی احتمال اینکه برآوردگر $UMVU$ از برآوردگری با حداقل MSE به σ^2 نزدیکتر باشد، به طور یکنواخت برای هر σ^2 و هر n، از ۰/۵ بیشتر است. بنابراین کوتاه کردن برآوردگر نااریب S^2 برای رسیدن به حداقل MSE، منجر به کاهش دادن MSE می‌شود، اما منجر به برآوردی نزدیکتر به مقدار واقعی پارامتر نمی‌شود. (توجه کنید که $c_2S^2 = S^2 - \frac{2}{n+1}S^2$، برآوردگر نااریب را به سمت صفر، کوتاه[13] می‌کند.)

در سال ۱۹۸۵، کتینگ[14] [۳] موفق شد، پدیدهٔ رائو را به حالت کلی زیر تعمیم دهد:

تعمیم پدیدهٔ رائو: کوتاه کردن ریسک یک برآوردگر ریسک-نااریب [15]، تا رسیدن به برآوردگری با حداقل ریسک، خاصیت نزدیکی پیتمن را بهبود نمی‌بخشد.

توجه کنید که با ریسک درجهٔ دوم، تعمیم فوق تبدیل به همان پدیدهٔ

10) shrinking 11) Rao's phenomenon 12) inadmissible 13) shrink 14) Keating 15) risk-unbiased

رائو می‌شود که قبلاً ذکر آن رفت، زیرا با ریسک درجهٔ دوم، برآوردگر ریسکـناناریب همان برآوردگر نااریب می‌شود.(رجوع کنید به [۴] صفحه ۱۶۴).

همانگونه که اشاره شد مهمترین ضعف MSE را می‌توان در پدیدهٔ رائو جستجو نمود. در پایان این قسمت اشارهٔ مختصری به بعضی دیگر از ضعفهای ذاتی و جدانشدنی MSE می‌کنیم. (برای ملاحظهٔ توضیح بیشتر به [۶] مراجعه شود).

الف- مواردی وجود دارد که MSE قادر به تشخیص برآوردگر بهتر نیست. به عبارت دیگر زمانی که دو برآوردگر دارای توزیع حاشیه‌ای یکسان باشند، این دو برآوردگر از دید معیارهایی که فقط بر اساس توزیع حاشیه‌ای یک برآوردگر عمل می‌کنند (نظیر MSE) غیر قابل تشخیص خواهند بود. در چنین حالتی می‌توان توزیع توأم دو برآوردگر را در نظر گرفت و امتحان کرد که کدامیک در اغلب اوقات به پارامتر واقعی نزدیکتر از دیگری است. (رجوع کنید به [۲]).

ب- در بعضی موارد این امکان وجود دارد که MSE موجود نباشد. در این موارد بهتر است از معیارهایی استفاده شود که به جای اینکه بر امید ریاضی توابع معینی از متغیرهای تصادفی مبتنی باشند (نظیر MSE)، که ممکن است موجود نباشد، بر احتمالات پیشامدهای معینی‌متکی باشند که به وجود گشتاورهای برآوردگرها (مطابق با هر مرتبهٔ معینی) نیاز ندارند. معیار نزدیکی پیتمن جزو این دسته از معیارها است که کمتر نسبت به رفتار دنباله‌ای توزیع نمونه‌ای برآوردگرها حساس است (به‌خاطر در نظر نگرفتن امید ریاضی) و بیشتر به رفتار برآوردگرها در نزدیکی پارامتر واقعی اهمیت می‌دهد. (توزیع کوشی مثال مناسبی برای توجیه این مطلب است.)

ج- یکی از ایرادهای مهمی که بر MSE وارد است، تأکیدات نامناسب و غیر معقولی است که این معیار بر خطاهای بزرگی که با احتمال بسیارکم رخ می‌دهند می‌گذارد. این موضوع که رائو [۹] به آن توجه کرده است، موجب شده تامباحثات بسیاری در این زمینه فراهم آید. (رجوع کنید به[۶])

د- در مقایسه بین MSE و PMC، موضوع اساسی استفاده از اطلاعات حاشیه‌ای در برابر اطلاعات توأم می‌باشد. PMC به توزیع توأم برآوردگرهای رقیب می‌پردازد، در حالی که MSE بر اساس توزیعات حاشیه‌ای است. به عنوان مثال رکوردهایی را در نظر گیرید که دوندگان یک مسابقه دو برجا می‌گذارند، داشتن نتایج حاشیه‌ای برای هر دونده در مسابقات انفرادی مفید است اما بیشتر علاقه‌مندیم بدانیم دوندگان در رقابتهای شانه‌به‌شانه (رقابتهای توأم)، که انرژی بیشتری را صرف می‌کنند، چه رکوردی را از خود بر جا می‌گذارند. این برآورد، محتاج به داشتن توزیع توأم زمانهای دوندگان دارد که ممکن است درحالت کلی مستقل نباشند. برای روشن شدن بیشتر موضوع به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲: دو دستگاه حفاری را در نظر بگیرید. قرار است گودالی در مکان صفر بایک مقیاس مشخص اندازه‌گیری حفر شود. فرض کنید این دو دستگاه دارای امکان اشتباه بوده (همیشه مکان مورد نظر را به‌طور دقیق سوراخ نکنند) و توزیع توأم مکانهای سوراخ شده به‌وسیلهٔ دستگاهها به صورت زیر داده شده باشد.

$\hat\theta_2 \backslash \hat\theta_1$	۰	۱۰	$P(\hat\theta_2)$
۰/۰۰۱	۰/۴۹۵	۰/۰۰۵	۰/۵
۱/۰۰۰	۰/۴۹۵	۰/۰۰۵	۰/۵
$P(\hat\theta_1)$	۰/۹۹	۰/۰۱	

از دیدگاه نظری برآورد، $\hat\theta_1$ و $\hat\theta_2$ برآوردگرهای رقیب برای پارامتر معلوم $\theta = 0$ اند. بر اساس PMC، $\hat\theta_1$ بر $\hat\theta_2$ برتری دارد زیرا

$$P(|\hat\theta_1-\theta| < |\hat\theta_2-\theta|) = P(\hat\theta_1 < \hat\theta_2)$$

$$= P(\hat\theta_1 = 0, \hat\theta_2 = 0.001) + P(\hat\theta_1 = 0, \hat\theta_2 = 1.000)$$

$$= 0.99 (> 0.5).$$

حال با استفاده از توزیع حاشیه‌ای، MSEی دو برآوردگر عبارت‌اند از

$$MSE(\hat\theta_1) = E[(\hat\theta_1-\theta)^2]$$

$$= E[\hat\theta_1^{\,2}]$$

$$= 1$$

و

$$MSE(\hat\theta_2) = E[(\hat\theta_2-\theta)^2]$$

$$= E[\hat\theta_2^{\,2}]$$

$$= 0.50.$$

بنابراین از لحاظ MSE ی کمتر، $\hat{\theta}_2$ بر $\hat{\theta}_1$ برتری دارد. ملاحظه می‌شود که با دو نتیجهٔ متضاد مواجه شده‌ایم: با استفاده از PMC، $\hat{\theta}_1$ و با استفاده از MSE، $\hat{\theta}_2$ بر آوردگر بهتر است. به عبارت دیگر بااستفاده‌از توزیعهای حاشیه‌ای، $\hat{\theta}_1$ در ۹۹ درصد اوقات مکان درست را حفر می‌کند وتنها ۱ درصد اوقات اشتباه می‌کند. در مقابل $\hat{\theta}_2$ هرگز مکان مورد نظر مارا حفر نمی‌کند ($\theta = 0$). با این وجود MSE، $\hat{\theta}_2$ را ترجیح می‌دهد. بدیهی است انتخاب اصلح، استفاده از دستگاه حفاری اول (به سبب حفاری بهتر) است. مثال فوق نشان می‌دهد که استفاده کننده از PMC می‌تواند کاملاً در قبال استفاده از اطلاعات حاشیه‌ای، در بسیاری از مسائل برآورد، عمل خود را توجیه کند.

۳ یک راه حل کلی برای تعیین PMC

فرض کنید T_1 و T_2 دو برآوردگر رقیب برای پارامتر مجهول θ با تابع احتمال توأم $f(.,.)$ باشند. در این‌صورت به سادگی می‌توان نشان داد که:

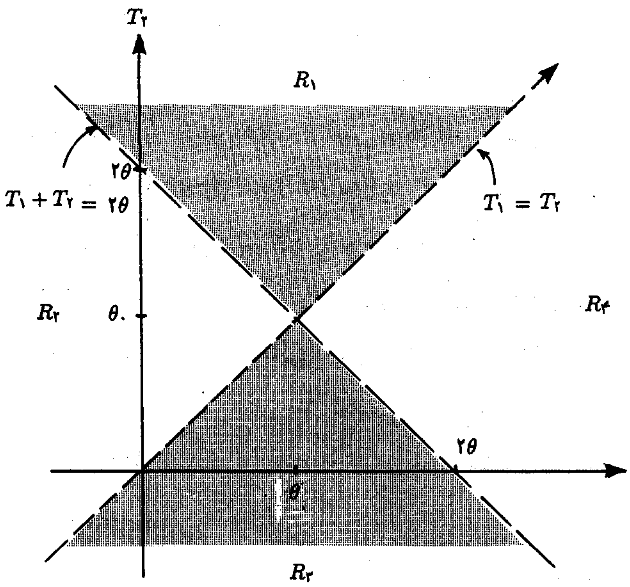
$$PMC(T_1, T_2|\theta) = P(R_1) + P(R_3)$$

که در آن R_1 و R_3 نواحی هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$R_1 = \{(T_1, T_2) : T_1 + T_2 > 2\theta, T_2 > T_1\}$$

$$R_3 = \{(T_1, T_2) : T_1 + T_2 < 2\theta, T_1 > T_2\}.$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، R_1 و R_3 در واقع ربعهای اول و سوم در یک دستگاه مختصات‌اند که هم انتقال و هم دوران یافتهٔ دستگاه اولیه است. همچنین مبدأ دستگاه مختصات جدید نقطهٔ (θ, θ) بوده و دستگاه به اندازهٔ ۴۵ درجه دوران یافته است. به شکل توجه شود:



می‌توان PMC را به طریقی دیگر بیان کرد. بردار تصادفی دو بعدی $\mathbf{T}$ به وسیله $\mathbf{T} = [T_1, T_2]'$ بردار 1×2 از عدد یک را با ۱ یعنی $\mathbf{1} = [1, 1]'$ و ماتریس A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = (\frac{\sqrt{2}}{2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال بردار $\mathbf{U} = A(\mathbf{T} - \theta\mathbf{1})$ را در نظر بگیرید. (این رابطه در واقع ارتباط بین مختصات قدیم و جدید را بیان می‌کند.) به سادگی می‌توان نشان داد که

$$PMC(T_1, T_2|\theta) = \int_0^\infty \int_0^\infty [f(u_1, u_2) + f(-u_1, -u_2)] du_1 du_2,$$

که در آن $f(0, 0)$ چگالی توأم $\mathbf{U} = [U_1, U_2]$ خواهد بود. ملاحظه می‌شود که چون فرم تبدیل $\mathbf{T}$ به $\mathbf{U}$، یک به یک است، تابع چگالی توأم $\mathbf{U}$ را می‌توان به راحتی از روی تابع چگالی توأم $\mathbf{T}$ به‌دست آورد. در ضمن رابطهٔ فوق زمانی که $\mathbf{T}$ دارای توزیع گسسته باشد، صادق بوده و در این حالت انتگرالهای موجود تبدیل به مجموع می‌شوند. در حقیقت اگر $p(u_1, u_2)$ تابع احتمال توأم U_1 و U_2 باشد خواهیم داشت:

$$PMC(T_1, T_2|\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [p(i, j) + p(-i, -j)].$$

مثال ۳: فرض کنید X_1 و X_2 دو برآوردگر ناریب با میانگین مشترک θ بوده و دارای ضریب همبستگی ρ و واریانسهای مختلف σ_1^2 و σ_2^2 باشند. برای سادگی فرض کنید که:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} \theta \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right)$$

واضح است که $MSE(X_1) = \sigma_1^2$ و $MSE(X_2) = \sigma_2^2$. در نتیجه کارآیی نسبی X_1 و X_2 بر اساس MSE به ρ بستگی نخواهد داشت. از سویی بااستفاده از تبدیل $\mathbf{U} = A(\mathbf{T} - \theta\mathbf{1})$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \sim$$

$$N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 & -\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ -\sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \end{bmatrix} \right)$$

حال اگر $\sigma_۲ = \sigma_۱$، هم با استفاده از معیار PMC و هم با استفاده از MSE نتیجه می‌شود که دو برآورد $X_۱$ و $X_۲$ هم ارزند. ولی اگر $\sigma_۲ \neq \sigma_۱$، آنگاه PMC با مقادیر مختلف ρ تغییر خواهد کرد در حالی که MSE چون به ρ بستگی ندارد، تغییری نخواهد کرد. این موضوع باعث نمی‌شود که PMC و کارآیی بر اساس MSE با هم موافق نباشند، اما مقادیر عددی PMC با استفاده از اطلاعات نهفته در ρ تغییر خواهد کرد در صورتی که در نظر نگرفتن ضریب همبستگی دو برآوردگر از سوی MSE ممکن است یک نقص به شمار آید. این مثال نمایشی مفید از به کار بردن PMC به‌جای MSE (استفاده از اطلاعات توأم در قبال اطلاعات حاشیه‌ای) را ارائه می‌دهد.

۴ فقدان خاصیت تعدی PMC

شاید بتوان مهمترین انتقاد بر PMC را دارا نبودن خاصیت تعدی[۱۶] دانست. بدین معنی که، برآوردگرهایی مانند $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$ موجودند به‌قسمی که $T_۱$ پیتمن‌ـنزدیکتر از $T_۲$ و $T_۲$ پیتمن‌ـنزدیکتر از $T_۳$ بوده، در حالی که $T_۱$ پیتمن‌ـنزدیکتر از $T_۳$ نیست. عده‌ای از آماردانان با توجه به فقدان خاصیت تعدی PMC، کاربرد آنرا توصیه نمی‌کنند. ولی این امر نمی‌تواند دلیلی بر عدم استفاده از این معیار ذاتی باشد. زیرا در نظریهٔ تصمیم، محدود کردن ردهٔ همهٔ برآوردگرها به بعضی برآوردگرهای معقول امری معمول است (نظیر یافتن برآوردگری با حداقل واریانس در ردهٔ برآوردگرهای نااریب) و بنابراین در «نظریهٔ پیتمن» نیز چنین امری امکان‌پذیر بوده و می‌توان ردهٔ برآوردگرها را به ردهٔ برآوردگرهای پایا محدود کرده و در این رده‌ها به بررسی و تحقیق پرداخت. نایاک[۱۷] [۵] ثابت کرد که خاصیت تعدی در ردهٔ برآوردگرهای پایا برقرار است. (وی همچنین پیتمن‌ـنزدیکترین برآوردگر را نیز در این رده مشخص نمود که بحث آن از حوصلهٔ این مقاله خارج است.)

در پایان اضافه می‌کنیم که معیارهای مختلف برآورد برای مقاصد مختلف مفید بوده و بررسی هر برآوردگر مفروض از دیدگاههای مختلف کاری با ارزش خواهد بود. در حقیقت حالتهایی وجود دارند که هر روش برآوردی، منجر به نتایجی غیر منتظره می‌شود. این باور که برتری یک برآوردگر، بایستی تحت معیارهای متفاوت امتحان شود تا طبیعت برآوردگر شناسایی شده بتوان اطلاعات مفیدی در زمینهٔ برآورد فراهم ساخت، باید جایگاه اساسی خود را در نظریهٔ برآورد باز یابد. در صورتی که در مقایسهٔ برآوردگرها تنها متکی به استفاده از یک معیار باشیم، اشکالات و ضعفهای اجتناب ناپذیری بروز خواهد کرد.

معیار نزدیکی پیتمن نیز باید درکنار سایر معیارها مورد استفاده قرارگیرد. این معیار دارای محاسنی نسبت به سایرین است. از جمله، به جای اینکه متکی بر امید ریاضی توابع معینی از متغیرهای تصادفی باشد، بر اساس احتمال پیشامدهای معین است و بنابراین قابلیت کاربرد بیشتری دارد. به علاوه این معیار را، درگزینش برآوردگرهایی که از دیدگاه معیارهای دیگر غیر قابل تشخیص هستند، می‌توان به کاربرد. به طور خلاصه می‌توان چنین نتیجه گیری کرد که:

> «برای به‌دست آوردن برآوردگرهای ممکن در یک مسئلهٔ معین می‌توان از معیارهایی استفاده کرد که محاسبات ریاضی ساده‌تری داشته باشند، اما برای قبول یا رد آنها، قضاوت را باید بر معیارهایی متکی کرد که بر حسب احتمال بیان می‌شوند (نظیر PMC)، هر چند که این معیارها دارای نقاط ضعف اجتناب‌ناپذیری باشند.»

مراجع

[1] Blyth, C.R. (1990), "Comments on 'The Closest Estimates of Statistical Parameters," Comm. Statist., A20, pp. 3445-3452.

[2] Blyth, C.R. and Pathak, P.K. (1985), "Does an Estimator's Distribution Suffice? ", Proceeding of the Berkely Conference in Honor of J. Neyman and J.Kiefer, 1, pp. 45-52.

[3] Keating, J.P. (1985), "More on Rao's Phe-

16) transitivity 17) Nayak

nomenon", Sankhya, Series B,47,PP.18-21.

[4] Lehmann, E.L. (1983), "Theory of Point Estimation", John Wiely, New York.

[5] Nayak, T.K. (1990), "Estimation of Location and Scale Parameters Using Generalized Pitman Nearness Criterion", J. Statist. Planning Inference, 24, pp. 259-268.

[6] Nematollahi, A.R.(1993), "Pitman's Measure of Closeness: A Statistical Survey", M.Sc. thesis , Shiraz Univ.

[7] Pitman, E.J.G. (1937), "The Closest Estimate of Statistical Parameters", Proc. Cambridge Philos. Soc., 33, pp. 212-222.

[8] Rao, C.R. (1980), "Discussion of Minimum Chi-Square not Maximum Likelihood!"'Ann. Statist. 8, pp. 482-485.

[9] Rao, C.R. (1981), "Some Comments on the Minimum Mean Square Error as a Criterion in Estimation ", in Statistics and Related Topics, North-Holland, Amesterdam, pp. 123-143.

در روزگاران گذشته

استفاده، و سوءاستفاده، از آمار

[ابوجعفر منصور دوانیقی] مردی مال دوست بود و بخل و امساک بر طبیعت او غالب و یکی از آثار بخل او آن بود که چون خلافت بر وی مقرر شد، بفرمود تا در شهر کوفه ندا کردند که: امیرالمؤمنین عطا می‌دهد باید که نسخت کنید که از کودک هفت ساله تا پیر هفتاد ساله در شهر چندند تا همه را عطا داده شود. چون نسخت پرداخت گشت و عدد رعایا او را معلوم شد، پس هر یکی را پنج درم نقره عطا داد. چون عطا داده شد، گفت: این شهرهای شما به صحراست و حصنی و حصاری نیست. اگر ناگاه خصمی تاختن آرد شما عُرضهٔ نهب و غارت شوید، صواب آن باشد که این شهرها را ربض زنید و خندق سازید تا این جماعت ضایع نمانند. پس بفرمود تا بر هر مردی چهل درم نسخت کردند، و کوفه و بصره را خندق فرمود.

به نقل از: گزیده جوامع‌الحکایات ولوامع الروایات، تالیف سدیدالدین محمد عوفی، سازمان انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی، تهران، ۱۳۶۷، ص ۶۹.