

اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱، شماره پیاپی ۳۳

سال هفدهم شماره اول، ص ۴۴-۵۴

طرح تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده

سمیرا جالایی^۱، عبدالحمید رضایی رکن آبادی^۲، غلام رضا محتشمی برزادران^۳

چکیده:

اجرای نمونه گیری با احتمالات متغیر به شیوه بدون جایگذاری، علیرغم اهمیت آن بسیار پیچیده است و روش های متعددی برای اجرای آن پیشنهاد شده است ازجمله: طرح میدزونی و طرح سیستماتیک. یکی از روش هایی که در سال های اخیر توسط دوئل و تایل (۱۹۹۸)^۴ معرفی شده است. روش تفکیکی منجر به نمونه گیری تصادفی ساده است که در این مقاله ضمن تشریح کامل این طرح، با بیان مثالی، نحوه محاسبه احتمال هر یک از نمونه های ممکن را بیان نموده و با استفاده از نرم افزار R برنامه اجرای آن را ارائه نموده ایم. شایان ذکر است این طرح را می توان با استفاده از برنامه مربوطه در جوامع مختلف پس از تعیین احتمالات شمول دلخواه، اجرا نمود.

واژه های کلیدی: تفکیک کردن، برداراحتمال شمول، خروجی، درخت تفکیک، تابع احتمال.

^۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد- دانشکده علوم- گروه آمار- samirajalayeri@yahoo.com

^۲ دانشگاه فردوسی مشهد- دانشکده علوم ریاضی- گروه آمار- rezaei@um.ac.ir

^۳ دانشگاه فردوسی مشهد- دانشکده علوم ریاضی- گروه آمار- gmb1334@yahoo.com

^۴ Devill and Tille

۱ مقدمه

در این مورد اطلاعات بیشتری ارائه نمودند. بریور و

حنیف^۸ (۱۹۸۳)، هجک^۹ (۱۹۸۱) و تایل^{۱۰}

(۲۰۰۶) نیز نمونه گیری با احتمالات نابرابر در

جوامع متناهی را از دیدگاه نظریه اطلاع مورد بررسی

قرار داده اند. پی^{۱۱} و همکاران (۲۰۰۷) طرح

نمونه گیری حداقل پشتیبانی را پس از مشخص

کردن احتمالات شمول اولیه معرفی کردند. ماتئی و

تایل^{۱۲} (۲۰۰۷) شیوه ای را ارائه نمودند که ترتیب

انتخاب نمونه در آن حائز اهمیت است که آن را

نمونه گیری *PPS* ترتیبی نامیدند. فرض کنید Q

مجموعه تمام زیر مجموعه های X و $P(X)$ توزیع

احتمال تعریف شده در Q باشد. توزیع احتمال

$\{P(X); X \in Q\}$ را طرح نمونه گیری گویند.

در طرح نمونه گیری یک زیرمجموعه X به عنوان

یک نمونه تلقی می گردد و همواره $P(X > 0)$

و $\sum_{X \in Q} P(X) = 1$ است. مجموعه کلیه ی

نمونه هایی که احتمال مثبتی برای انتخاب شدن دارند

را تکیه گاه طرح گویند. روشی که برای تولید یک

نمونه تصادفی به کار می رود، الگوریتم نمونه گیری

نامیده می شود. شایان ذکر است الگوریتم های متمایز

می توانند مربوط به اجرای یک طرح نمونه گیری

هنسن و هارویتز^۵ (۱۹۴۳) نظریه ی نمونه گیری با

احتمالات متغیر را به منظور استفاده در طرح نمونه

گیری خوشه ای متناسب با حجم (*PPS*)^۶ ارائه

نمود. در نمونه گیری با احتمالات متغیر، انتخاب

واحدهای جامعه برای شرکت در نمونه، ثابت نیست

و معمولاً از واحدی به واحد دیگر تغییر می کند.

نمونه گیری تصادفی با احتمالات متغیر را می توان

به دو روش جایگذاری و بدون جایگذاری انجام

داد. در روش جایگذاری احتمال انتخاب واحد

i -ام برای شرکت در نمونه به همان مقداری است

که از قبل مشخص شده، زیرا در هر انتخاب با کل

جامعه سروکار داریم، در حالی که در نمونه گیری

بدون جایگذاری با وضعی پیچیده تر روبرو هستیم

و با انتخاب هر واحد شانس انتخاب دیگر واحدها

دائماً تغییر می کند. هارویتز و تامپسون^۷ (۱۹۵۲)

یک روش کلی برای استخراج این نوع نمونه در

حالت بدون جایگذاری ارائه نموده و چگونگی یک

تخصیص بهینه برای احتمال انتخاب هر یک از

اعضا (احتمالات شمول) را مطرح نمودند. روش

تفکیک، یک روش کلی برای به دست آوردن یک

نمونه *PPS* می باشد که دوئل و تایل (۱۹۹۶ و ۱۹۹۸)

^۸Brewer and Hanif

^۹Hajek

^{۱۰}Tille

^{۱۱}Pea

^{۱۲}Matei and Tille

^۵Hansen and Hurwitz

^۶Probability Proportional to Size

^۷Horvitz and Thompson

یکسان باشند. رهیافت کلی برای یافتن تابع احتمال حاصل می‌گردد. طرح تفکیک منجر به نمونه گیری یک طرح نمونه گیری در مورد الگوریتم‌هایی به کار می‌رود که شامل دنباله‌ای از تصمیم‌هایی هستند که در مورد آن‌ها احتمالات مسیر قابل محاسبه باشند. فرض کنید الگوریتم نمونه گیری متشکل از k تصمیم متوالی D_i ، $(i = 1, \dots, k)$ باشد. برآمدهای k و نرم افزاری ارائه شده است و در مثالی عددی تصمیم، یک مسیر $d = (d_1, \dots, d_k)$ را تشکیل می‌دهند. احتمال چنین مسیری عبارت است از: مفروض، محاسبه خواهد شد.

$$Pr(\mathbf{D}) = Pr(\mathbf{d}) = pr(D_1 = d_1) \times \prod_{i=2}^k Pr(D_i = d_i \mid D_1 = d_1, \dots, D_{i-1} = d_{i-1})$$

۲ طرح تفکیک منجر به نمونه

گیری تصادفی ساده

طرح تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده^{۱۴}

(SSRS)، حالت خاصی از روش تفکیک کلی است. در این طرح بردار احتمال شمول یعنی برداری

که احتمال عضویت یکایک اعضای جامعه N عضوی در نمونه n تایی را مشخص می‌کند، به دو روش تفکیک می‌شود که تنها در یکی از آن‌ها، احتمالات شمول برای اجزاء برابر هستند. در روش اول به طور تصادفی انتخاب می‌شوند، اگر برداری که در آن احتمالات شمول برابر هستند انتخاب شود، آنگاه یک نمونه تصادفی ساده داریم و اگر بردار دیگر انتخاب شود، آنگاه یک تفکیک جدید

اگر الگوریتم رد کننده نباشد یعنی هر مسیر به یک

نمونه $X \in Q$ منجر شود، احتمال به دست آوردن

X را می‌توان به صورت

$$P(X) = \sum_{\{\mathbf{d}: \mathbf{d} \Rightarrow X\}} Pr(\mathbf{d}), X \in Q$$

نوشت که در آن جمع روی همه ی مسیرهای $\mathbf{d}$

که نمونه X را به دست می‌آورند، صورت گرفته

است. اگر الگوریتم، یک شروع مجدد را دربرگیرد

یا الگوریتم برطبق آن که تنها نمونه‌های معینی قابل

پذیرش هستند، نمونه حاصل را رد کند، یعنی مسیر

منجر به یک نمونه $X \in Q$ نشود، یک عامل

ثابت مانند C برای تغییر مقیاس در اندازه احتمال به

صورت $P(X) = C \sum_{\mathbf{d}: \mathbf{d} \Rightarrow X} Pr(\mathbf{d})$ مورد

نیاز است، که مقدار C از تساوی

$$\sum_{X \in Q} P(X) = 1$$

^{۱۳} Grafstrom

^{۱۴} Splitting into Simple Random Sampling (SSRS)

انجام می‌دهیم. این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا ادامه می‌دهیم.

نمونه حاصل یک نمونه تصادفی ساده باشد. فرض کنید $E_k, \dots, E_2, E_1$ تمامی خروجی‌های این روش را می‌توان به شرح زیر توصیف کرد: ممکن باشد، در این صورت تعداد تفکیک‌ها حداکثر فرض کنید $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ بردار شمول $k-1$ خواهد بود.

اولیه باشد. در تفکیک اول دو بردار جدید ممکن حال اگر حداکثر تعداد تفکیک‌هایی که انجام شده است کم‌تر از N باشد، تابع احتمال طرز $SSRS$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \pi^a &= (\pi_1^a, \pi_2^a, \dots, \pi_N^a) \\ &= \left(\frac{n}{N}, \frac{n}{N}, \dots, \frac{n}{N} \right) \quad (۱) \end{aligned}$$

$$P(X) = \sum_{i=1}^k Pr(X | E_i) Pr(E_i) \quad (۴)$$

$$\pi^b = (\pi_1^b, \pi_2^b, \dots, \pi_N^b) = \frac{\pi - \alpha \pi^a}{1 - \alpha} \quad (۲)$$

در تفکیک (مرحله) i -ام باشد، یعنی

که در آن

$$\begin{aligned} N_i &= \text{مؤلفه‌های غیر صفر و یک بردار } \pi^b \text{ در تفکیک } i\text{-ام} \\ \alpha &= \min \left[\frac{N}{n} \min_i (\pi_i), \frac{N}{N-n} \min_i (1 - \pi_i) \right] \quad (۳) \\ n_i &= \text{مجموع مؤلفه‌های غیر صفر و یک بردار } \pi^b \text{ در تفکیک } i\text{-ام} \end{aligned}$$

π^a را با احتمال α و π^b با احتمال $(1-\alpha)$ انتخاب برای هر i ، $(i = 1, \dots, k-1)$ داریم:

$$\begin{aligned} &\text{می‌کنیم. اگر } \pi^a \text{ انتخاب شد، نمونه حاصل تصادفی} \\ &\text{ساده است و نمونه‌گیری پایان می‌پذیرد. در غیر} \\ &\text{این صورت، مؤلفه‌هایی از } \pi^b \text{ را که دارای مقدار} \\ &\text{صفر یا یک باشند حذف نموده و تعداد مؤلفه‌های} \end{aligned} \quad (۵) \quad \begin{aligned} &Pr(X | E_i) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(N_i-1)}, & \text{اگر } X \text{ در خروجی } E_i \text{ قرار گیرد.} \\ 0, & \text{اگر } X \text{ در خروجی } E_i \text{ قرار نگیرد.} \end{cases} \end{aligned}$$

باقیمانده، N جدید را مشخص می‌کند و چون همواره

باید $\sum_{i=1}^N \pi_i = n$ باشد، بنابراین n نیز بهنگام می

گردد. حال با استفاده از N و n جدید π^b و π^a با اختیار کردن حاصل ضرب احتمالاتی که به E_i

جدید را تشکیل داده و روش را تا حصول تصمیم منجر می‌شود، به صورت زیر به‌دست می‌آوریم که در

نهایی برای تعیین شانس انتخاب همه ی واحدها α_i احتمال انتخاب π^a در تفکیک i -ام، برای

از رابطه (۲.۴) به شرح زیر محاسبه نمود : $(i = 1, \dots, k-1)$ است.

$$Q = \{ \text{تمام نمونه های ۴ تایی از بین ۸ عضو جامعه} \} \quad \Pr(E_i) \quad (۶)$$

$$= \begin{cases} \alpha_1 & i = 1 \\ \alpha_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \alpha_j) & i = 2, \dots, k-1 \\ \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \alpha_j) & i = k \end{cases}$$

و تعداد اعضاء Q عبارت است از :

$$\binom{8}{4} = 70$$

به عنوان مثال یکی از این نمونه های ممکن عبارت

است از :

$$\{U_3, U_5, U_7, U_8\}$$

برای تشریح بیشتر توضیحات بالا، اینک با ارائه

مثال زیر، تابع احتمال یک نمونه ی مفروض را

محاسبه نموده و با استفاده از نرم افزار R برنامه ی

اجرای آن را ارائه نماییم :

که شانس انتخاب آن در روش تفکیک منجر به

نمونه گیری تصادفی ساده به صورت زیر محاسبه

می گردد :

چون نمونه فوق متناظر با بردار احتمالات شمول

$X_{3578} (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ است که آن را با X_{3578}

نشان می دهیم. بدیهی است این

۳ مثال کاربردی

فرض کنید $n = 4, N = 8$ و بردار احتمالات

شمول واحدهای جامعه به صورت

$$\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$$

باشد، که در آن شرط $\sum_{i=1}^N \pi_i = n$ برقرار است.

جدول (۱) مقادیر N_i, n_i و محاسبات مربوط

به مؤلفه های بردار π^b را در مراحل مختلف این

مثال براساس الگوریتم فوق نشان می دهد همچنین

در جدول (۲) خروجی های ممکن و مسیر منجر به

آن ها را همراه با مؤلفه های بردارهای π^a و π^b در

مراحل مختلف ملاحظه می نماییم. حال می توان

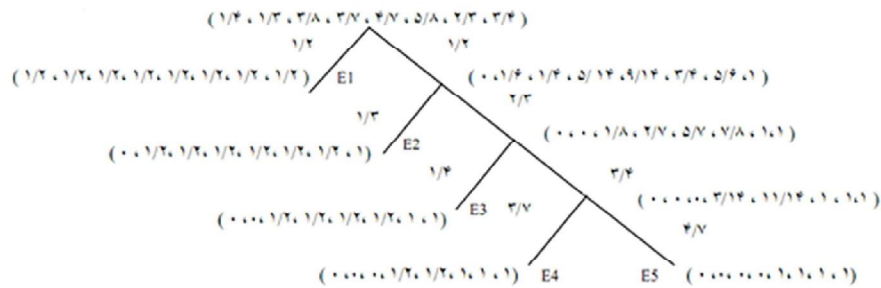
احتمال انتخاب یک نمونه را در مثال (۱) با استفاده

براساس محاسبات مندرج در جدول (۲) می توان

درخت تفکیک را در مثال (۱) به صورت زیر رسم

نمود :

$$\begin{aligned} &P(X_{3578}) \\ &= \sum_{i=1}^4 Pr(X_{3578} | E_i).Pr(E_i) \\ &= [\frac{1}{\binom{8}{4}} \cdot \frac{1}{2}] + [\frac{1}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}] \\ &\quad + [\frac{1}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}] + 0 + 0 + 0 \\ &= \frac{37}{1260} \end{aligned}$$



شکل ۲: درخت تفکیک برای مثال فوق

برنامه انجام محاسبات فوق با استفاده از نرم افزار R که برای داده‌های مثال (۱) اجرا شده است، به شرح زیر است که خروجی آن به تفکیک بردارهای π^a و π^b در مراحل مختلف با محاسبات بالا منطبق است. که جدول بالایی و پایینی بترتیب خروجی نرم افزار در مورد مقادیر مؤلفه‌های بردارهای π^a و π^b طی مراحل مختلف روش تفکیکی منجر به نمونه گیری تصادفی ساده است.

```
f=function(M,m,x) {
  p=matrix(c(x,rep(0,m*M)),m+1,M,byrow = 1)
  pa=matrix(c(rep(m/M,M),rep(0,(m-1)*M)),m,M,byrow = 1)
  for(i in 1:(m-1)) {
    alpha=min(M/m*min(x),M/(M-m)*min(1-x))
    p[(i+1),]=round((p[i,]-alpha*pa[i,])/(1-alpha), digits = 10)
    k=0
    for(j in 1:M)
      if(p[(i+1),j]==0|p[(i+1),j]==1) {k=k+1; pa[(i+1),j]=p[(i+1),j]}
    N=M-k
    x=c(rep(0,N))
    n=0;k=1
    for(j in 1:M)
```

```

        if(p[(i+1),j]!=0&p[(i+1),j]!=1)
            {n=n+p[(i+1),j]; x[k]=p[(i+1),j];k=k+1 }
    for(j in 1:M)
        if(p[(i+1),j]!=0&p[(i+1),j]!=1) pa[(i+1),j]=n/N
    }

    alpha=min(N/n*min(x),N/(N-n)*min(1-x))
    p[(m+1),]=round((p[m,]-alpha*pa[m,])/(1-alpha), digits = 10)
    print(p)
    print(pa)      }

x=c(1/4,1/3,3/8,3/7,4/7,5/8,2/3,3/4)
f(8,4,x)

```

p

	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]	[, 6]	[, 7]	[, 8]
[1,]	0.25	0.3333	0.375	0.4285714	0.5714286	0.625	0.6667	0.75
[2,]	0.00	0.1667	0.250	0.3571429	0.6428571	0.750	0.8333	1.00
[3,]	0.00	0.0000	0.125	0.2857143	0.7142857	0.875	1.0000	1.00
[4,]	0.00	0.0000	0.000	0.2142857	0.7857143	1.000	1.0000	1.00
[5,]	0.00	0.0000	0.000	0.0000000	1.0000000	1.000	1.0000	1.00

pa

	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]	[, 6]	[, 7]	[, 8]
[1,]	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
[2,]	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0
[3,]	0.0	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0
[4,]	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0

۴ نتیجه گیری

طرح تفکیک در نمونه گیری تصادفی ساده، یکی از طرح‌های نمونه گیری با احتمالات متغیر است. با توجه به اینکه هر طرح نمونه گیری، متناظر با یک توزیع گسسته روی مجموعه ای از نمونه‌های ممکن است، هدف کلی یافتن این توزیع می باشد. برای این منظور این طرح را با انجام محاسبات عددی و نرم افزاری، ارائه نموده و با ساختن درخت تفکیک، چگونگی محاسبه ی تابع احتمال نمونه ی مفروض را شرح داده ایم. با استفاده از برنامه ارائه شده می توان این طرح را در جوامع مختلف پس از تعیین احتمالات شمول اولیه دلخواه اجرا کرد.

جدول ۱: مقادیر N_i ، n_i و همچنین مقادیر مؤلفه‌های بردار π^b در مراحل مختلف مثال (۱)

مؤلفه‌های بردار شمول اولیه	π^b مؤلفه‌های بردار در مرحله اول	π^b مؤلفه‌های بردار در مرحله دوم	π^b مؤلفه‌های بردار در مرحله سوم	π^b مؤلفه‌های بردار در مرحله چهارم
$\pi_1^b = \frac{1}{4}$ $\pi_2^b = \frac{1}{3}$ $\pi_3^b = \frac{3}{8}$ $\pi_4^b = \frac{3}{7}$ $\pi_5^b = \frac{4}{7}$ $\pi_6^b = \frac{5}{8}$ $\pi_7^b = \frac{2}{3}$ $\pi_8^b = \frac{3}{4}$	$\pi_1^b = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{4}} = 0$ $\pi_2^b = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$ $\pi_3^b = \frac{\frac{3}{8} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ $\pi_4^b = \frac{\frac{3}{7} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{14}$ $\pi_5^b = \frac{\frac{4}{7} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{9}{14}$ $\pi_6^b = \frac{\frac{5}{8} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ $\pi_7^b = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$ $\pi_8^b = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$	$\pi_1^b = \frac{\frac{1}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{6}} = 0$ $\pi_2^b = \frac{\frac{1}{8} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{6}} = \frac{1}{8}$ $\pi_3^b = \frac{\frac{5}{14} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{6}} = \frac{2}{7}$ $\pi_4^b = \frac{\frac{9}{14} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{6}} = \frac{5}{7}$ $\pi_5^b = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{6}} = \frac{7}{8}$ $\pi_6^b = \frac{\frac{5}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{6}} = 1$	$\pi_1^b = \frac{\frac{1}{8} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{8}} = 0$ $\pi_2^b = \frac{\frac{2}{14} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{8}} = \frac{3}{14}$ $\pi_3^b = \frac{\frac{5}{7} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{8}} = \frac{11}{14}$ $\pi_4^b = \frac{\frac{7}{8} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{8}} = 1$	$\pi_1^b = \frac{\frac{3}{14} - \frac{6}{14} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{6}{14}} = 0$ $\pi_2^b = \frac{\frac{11}{14} - \frac{6}{14} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{6}{14}} = 1$
$N = 8$	$N_1 = 6$	$N_2 = 4$	$N_3 = 2$	
$n = 4$	$n_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{5}{14}$ $+ \frac{9}{14} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = 3$	$n_2 = \frac{1}{8} + \frac{2}{7}$ $+ \frac{5}{7} + \frac{7}{8} = 2$	$n_3 = \frac{3}{14} + \frac{11}{14} = 1$	
	$\alpha_1 = \frac{1}{2}$	$\alpha_2 = \frac{2}{6}$	$\alpha_3 = \frac{2}{4}$	$\alpha_4 = \frac{6}{14}$

جدول ۲: خروجی‌های ممکن مقادیر مؤلفه‌های بردار π^a و π^b در مراحل مختلف

خروجی‌ها	$3/4$	$2/3$	$5/8$	$4/7$	$3/7$	$3/8$	$1/3$	$1/4$	π	
E_1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	π^a	مرحله اول
	1	$5/6$	$3/4$	$9/14$	$5/14$	$1/4$	$1/6$	0	π^b	
E_2	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	π^a	مرحله دوم
	1	1	$7/8$	$5/7$	$2/7$	$1/8$	0	0	π^b	
E_3	1	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	π^a	مرحله سوم
	1	1	1	$11/14$	$3/14$	0	0	0	π^b	
E_4	1	1	1	$1/2$	$1/2$	0	0	0	π^a	مرحله چهارم
E_5	1	1	1	1	0	0	0	0	π^b	

مراجع

- [1] Brewer, K.R.W. and Hanif, M. (1983), Sampling with Unequal Probabilities in: *Lecture Notes in statistics*, vol 15, Springer-verlag, New York.
- [2] Deville, J.-C. and Tille, Y. (1996), Unequal probability sampling without replacement through a splitting method, *SSC Annual Meeting*.
- [3] Deville, J.-C. and Tille, Y. (1998), Unequal probability sampling without replacement through a splitting method, *Biometrika*- 85, 89-101.
- [4] Grafstrom, A. (2010), Entropy of unequal probability sampling designs, *Statistical Methodology*-7, 84-97.
- [5] Hajek, J. sampling from a finite population, *Marcel Dekker*, New York, (1981).
- [6] Hansen M.M. and Hurwitz, W.N. (1943), On the theory of sampling from finite populations, *Annals of Mathematical Statistics*-14, 333-362.
- [7] Horvitz, D. and Thompson, D. A (1952), generalization of sampling without replacement from a finite universe, *Journal of the American Statistical Association*-47, 663-685.
- [8] Matei A. and Tille, Y. (2007), Computational aspects of order pps sampling schemes, *Computational Statistics and Data Analysis* 51, 3703-3717.
- [9] Pea J. and, Qualite, L. and Tille, Y. (2007), Systematic sampling is a minimum support design, *Comput. Statist. Data Anal*-51, 5591-5602.
- [10] Tille, Y. (2006), Sampling Algorithms, in : Springer Series in Statistics, Springer science + Business media, Inc., New York.