مدلبندی بازار فروش یک کالا به صورت زنجیر مارکوف

غلامحسین شاهکار*

چکیده

حتماً شما هم شعار «هدف ما جلب رضایت مشتری است» را از بعضی فروشندگان شنیده‌اید. و شاید بر شما هم معلوم نباشد که آیا آنها واقعاً درستی آن را لااقل به طور شهودی یا تجربی دریافته‌اند؟ مضمون آن را باور دارند یا صرفاً برای خوشایند مشتری می‌گویند؟ در این مقاله با مدلبندی این موضوع به صورت یک زنجیر مارکوف، چگونگی بازار فروش را به صورت تابعی از رضایت مشتری مطالعه کرده، واقعیت آن را ثابت می‌کنیم.

۱ مقدمه و تعریف

میل خریدار نسبت به خرید برچسب خاصی از یک کالا (یا خرید از یک فروشگاه) و ارتباط آن با بازار فروش را به صورت یک زنجیر مارکوف مدلبندی می‌کنیم. X_n را برچسب کالای انتخابی خریدار در nامین باری که آن کالا به فروش می‌رسد تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\{X_n\}$ یک زنجیر مارکوف مرتبهٔ k باشد. در اینجا خاصیت مارکوفی به معنی آن است که خریدار تنها چند و چون کالاهایی را که در k دفعهٔ قبل خریده است به یاد دارد. یعنی برچسب کالایی که هر بار برای خرید درخواست می‌کند تنها وابسته به برداشت او از کیفیت کالاهایی است که او در k دفعهٔ قبل خریداری و آنها را امتحان کرده است.

می‌توان با استفاده از روشهای آماری و جمع‌آوری داده‌ها مرتبهٔ زنجیر مارکوف را تعیین و احتمالهای تغییر وضعیت را برآورد کرد. در این مقاله مرتبهٔ زنجیر مارکوف را یک می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم خریدار تنها چگونگی آخرین کالایی را که خریده است به یاد دارد. پس، p_{ij} احتمال این پیشامد است که خریداری که قبلاً کالای برچسب i را خریده است این بار کالای برچسب j را بخرد.

فرض کنید شرکت پخش کالای مثلاً برچسب x به چگونگی بازار فروش برچسب خود به صورت تابعی از زمینهٔ فکری خریداران وگرایش آنها نسبت به خرید مجدد آن برچسب علاقه‌مند باشد. به عبارت دیگر فرض کنید شرکت مزبور می‌خواهد بفهمد که اگر با ارائهٔ سرویس بیشتر یا کیفیت بهتر، و یا حتّی قیمت کمتر بتواند p_{xx} را به اندازهٔ $p_{xx}+\varepsilon$ افزایش دهد، در این صورت بازار فروش آن برچسب چقدر اضافه می‌شود؟ توجه کنید که به دلیل وجود رابطهٔ $\sum_k p_{xk} = ۱$، افزایش p_{xx} هم‌ارز کاهش p_{xk} برای $x \neq k$ است.

برای مطالعهٔ این موضوع ابتدا لازم است بازار فروش را تعریف کنیم. بازار فروش کالای برچسب x را نسبت فروش آن برچسب به فروش کلیهٔ برچسبهای موجود از آن کالا طی یک مدت زمان نسبتاً طولانی تعریف می‌کنیم. روشن است که از این نظر که تمام افراد خواهان قیمت پایین و کیفیت بالا هستند و بنابراین نسبت به انتخاب برچسب که می‌خرند طرز فکری مشابه دارند، می‌توان بازار فروش یک برچسب را برابر نسبت خرید آن برچسب به کلیهٔ برچسبهایی دانست که خریدار طی مدت زمان نسبتاً طولانی آن کالا را خریداری می‌کند. برای ارائهٔ مدل ریاضی فرض کنید به ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و jی دلخواه

$$I_{nj} = \begin{cases} ۱ & ,X_n = j \quad \text{اگر} \\ ۰ & ,X_n \neq j \quad \text{اگر} \end{cases} \qquad (۱)$$

*) دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

توجه کنید که I_{nx} در صورتی برای کالای برچسب x مقداری برابر یک دارد که در مرتبهٔ nام فروش آن کالا مشتری برچسب x را درخواست کند وگرنه مقدار آن صفر است. پس اندازهٔ فروش کالای برچسب x طی n بار فروش این کالا برابر است با $\sum_{k=1}^{n} I_{kx}$ و می‌توان بازار فروش کالای برچسب x را با احتمال یک برابر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{kx} \qquad (۲)$$

تعریف کرد. به دلیل اینکه $E(I_{nx}) = P\{X_n = x\}$، شکل دیگر تعریف بازار فروش برحسب امید ریاضی چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P\{X_k = x\}. \qquad (۳)$$

۲ توزیعهای حدی و مانا

می‌خواهیم بازار فروش کالا را به صورتی بیان کنیم که از لحاظ محاسباتی، ساده‌تر از (۳) باشد. توزیع اولیه را، $p = (p_1, p_2, \ldots)$ می‌گیریم که در آن $p_j = P\{X_0 = j\}$. اگر زنجیر تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه برای هر j مستقل از وضعیت اولیهٔ i داریم

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0 \qquad (۴)$$

که در آن $\sum_{j=1}^{C} \pi_j = 1$ و π_j احتمال این پیشامد است که خریدار نهایتاً کالای برچسب j را بخرد وقتی که می‌دانیم اولین بار کالای برچسب i را خریده است، و آن را مستقل از وضعیت شروع فرض کرده‌ایم. $\{\pi_j\}$ احتمالهای حدی یا احتمالهای حالت پایای فرایند است. حال احتمالهای غیرشرطی بعد از n مرحلهٔ خرید را در نظر بگیرید که با

$$\begin{aligned} p_j^{(n)} &= P\{X_n = j\} \\ &= \sum_i p_i p_{ij}^{(n)} \qquad (۵) \end{aligned}$$

داده می‌شوند. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_i p_i p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_i p_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_i p_i \pi_j \qquad (۶) \\ &= \pi_j \end{aligned}$$

بنابراین حد $p_j^{(n)}$ برابر همان حد $p_{ij}^{(n)}$ و مستقل از وضعیت شروع است. وقتی این احتمالهای حدی غیرشرطی وجود دارند، می‌توان آنها را به صورت زیر تعیین کرد. توجه کنید که می‌توان نوشت:

$$p_j^{(n)} = \sum_k p_k^{(n-1)} p_{kj} \qquad (۷)$$

و اگر $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots)$ را توزیع وضعیت خرید در مرحلهٔ nام فرض کنیم، به صورت برداری به دست می‌آوریم:

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} P \qquad (۸)$$

با گرفتن حد از طرفین (۸) وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به معادلهٔ مانای زنجیر، یعنی،

$$\pi = \pi P \qquad (۹)$$

می‌رسیم که در آن بردار احتمال حدی را با $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ نشان داده‌ایم. به علاوه از (۴) نتیجه می‌شود که حدود (۲) و (۳) نیز برابر π_j است (مثلاً [۱] را ببینید). پس می‌توان بازار فروش هر کالا را از حل دستگاه معادلات خطی (۹) پیدا کرد. به دست آوردن جوابهای (۹)، حتی وقتی توزیع حدی وجود ندارد امکان‌پذیر است. اما وقتی توزیع حدی وجود دارد جوابی که برای (۹) به دست می‌آید همان توزیع ماناست.

۳ حالت خاص

حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن تمام برچسبها شبیه هم‌اند، یا از نظر خریدار برچسبهای مختلف برتری نسبت به یکدیگر ندارند. به طوری که برای فردی که قبلاً کالای برچسب i را خریده است احتمال اینکه مجدداً همان برچسب را بخرد، $p_{ii} = \frac{1}{2}$، و احتمال اینکه برچسب دیگری غیر از i درخواست کند نیز برابر $\frac{1}{2}$ باشد. چون بنا به فرض $C - 1$ برچسب دیگر به جز i در بازار وجود دارند و به دلیل شباهت آنها احتمال درخواست هر یک با دیگری مساوی است، لذا برای هر i داریم:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{اگر } j = i \\ \frac{1}{2(C-1)} & \text{اگر } j \neq i \end{cases} \qquad (۱۰)$$

در چنین وضعیتی به طور شهودی انتظار داریم که بازار فروش تمام برچسبها یکسان باشد. یعنی به ازای هر i داشته باشیم، $\pi_i = \frac{1}{C}$. می‌توان به سادگی درستی این موضوع را با معلوم کردن اینکه بردار احتمال $\pi = (\frac{1}{C}, \frac{1}{C}, \ldots, \frac{1}{C})$ در معادلهٔ (۹) صدق می‌کند، تحقیق کرد.

حال فرض کنید شرکت پخش کالای برچسب x بخواهد بازار فروش برچسب خود را به وسیلهٔ افزایش p_{xx} زیاد کند. فرض کنید برای هر

$j \neq x$، $p_{xj} = (1 - p_{xx})/(C-1)$، به طوری که افزایش یا کاهش p_{xx} در سطرهای دیگر ماتریس P تاثیری نداشته باشد. خواه برچسبهای مختلف شبیه هم باشند یا نباشند می‌توان به ازای مقادیر مختلف p_{xx}، π_x را تعیین و رابطهٔ تابعی میان اندازهٔ گرایش خریدار در تجدید خرید برچسب x و بازار فروش آن، مطالعه کرد.

در صورتی که برچسبهای مختلف شبیه هم باشند می‌توان مسأله را به صورت تحلیلی حل کرد. زنجیر ماركوف دیگری را با دو وضعیت در نظر بگیرید، که در آن وضعیت صفر معرف خرید کالای برچسب x و وضعیت یک معرف خرید برچسب دیگری غیر از x باشد. می‌توان نشان داد که ماتریس تغییر وضعیت این زنجیر عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & 1 - p_{xx} \\ 1/2(C-1) & (2C-3)/2(C-1) \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

از حل معادلهٔ (۹) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \pi_0 = p_{xx}\pi_0 + \frac{\pi_1}{2(C-1)} \\ \pi_1 = (1 - p_{xx})\pi_0 + \frac{(2C-3)\pi_1}{2(C-1)} \end{cases} \qquad (۱۲)$$

دومین معادله از دستگاه معادلات (۱۲) اطلاع بیشتری جز آنچه در اولین معادله آمده است، نمی‌دهد. برای تعیین جواب یکتای معادلهٔ (۹) از برابری $\pi_0 + \pi_1 = 1$ استفاده میکنیم. بعد از قراردادن π_1 برحسب π_0 در اولین معادله و حل آن نسبت به π_0 به دست می‌آوریم:

$$\pi_0 = \frac{1}{2(C-1)(1-p_{xx})+1} \qquad (۱۳)$$

از (۱۳) معلوم می‌شود که با افزایش p_{xx}، π_0 یعنی بازار فروش کالای برچسب x نیز زیاد می‌شود، به طوری که وقتی p_{xx} به سمت بینهایت میل کند، π_0 نیز به سمت ۱ میل می‌نماید. توجه کنید که با قراردادن $p_{xx} = \frac{1}{2}$ در (۱۳)، π_0 مانند گذشته برابر همان $\frac{1}{C}$ می‌شود.

۴ مدل فورت ویتاکر[1] در انتخاب کالا

فرض کنید d_i احتمال خرید کالای برچسب i یا جاذبهٔ آن، و w_i احتمال گرایش پیداکردن خریدار به خرید کالای برچسب i باشد. پس داریم، $0 \le d_i \le 1$، $0 \le w_i \le 1$ و $\sum_{i=1}^{C} w_i = 1$. برای $i \neq j$، p_{ij} برابر است با احتمال اینکه مصرف کنندهٔ برچسب i از خرید دوبارهٔ آن منصرف شده و بار دیگر کالای برچسب j را بخرد. و p_{ii} برابر است با احتمال اینکه یا رضایت مصرف کنندهٔ برچسب i از مصرف آن حاصل شده و مجدداً همان برچسب را می‌خرد،یا از آن راضی نیست، اما مثلاً به دلیل عدم شناخت برچسبهای دیگر مجدداً همان برچسب را می‌خرد. پس داریم:

$$p_{ij} = \begin{cases} (1-d_i)w_j & ,i \neq j \quad \text{اگر} \\ d_i + (1-d_i)w_i & ,i = j,\ j = 1, 2, \ldots, C \quad \text{اگر} \end{cases}$$

(۱۴)

برای تعیین توزیع مانا می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_i \pi_i p_{ij} \\ &= \pi_j[d_j + (1-d_j)w_j] + \sum_{i \neq j} \pi_i(1-d_i)w_j \\ &= \pi_j d_j + (1-d_j)w_j\pi_j + w_j[\sum_i \pi_i(1-d_i) \\ &\quad - \pi_j(1-d_j)] \\ &= \pi_j d_j + w_j \sum_i \pi_i(1-d_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, C \end{aligned}$$

(۱۵)

بنابراین برای $d_j \neq 1$، داریم:

$$\pi_j = \frac{w_j}{1-d_j} \sum_i \pi_i(1-d_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, C \quad (۱۶)$$

از برابری $\sum_{j=1}^{C} \pi_j = 1$ نتیجه می‌گیریم،

$$\sum_i \pi_i(1-d_i) = 1 / \sum_j \frac{w_j}{1-d_j} \qquad (۱۷)$$

و بنابراین توزیع مانا را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\pi_j = \left(\frac{w_j}{1-d_j}\right) / \sum_j \frac{w_j}{1-d_j}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, C$$

(۱۸)

1) Fourt-Whitaker

درحالت خاص وقتی احتمال خرید هر برچسب ثابت است، داریم $d_i = d$ و از (۱۸) به دست می‌آوریم:

$$\pi_j = w_j , \quad j = ۱, ۲, \ldots , C$$

یعنی، وقتی احتمال خرید هر برچسب ثابت است بازار فروش آنها نیز ثابت و برابر درصد خریدارانی است که نهایتاً به خرید آن برچسب گرایش پیدا کرده‌اند. توجه کنید که وقتی همهٔ مردم برچسب x را می‌خرند داریم:

$$d_i = \begin{cases} ۱ & ,i = x \quad \text{اگر} \\ ۰ & ,i \neq x \quad \text{اگر} \end{cases}$$

و از (۴-۲) به ازای $j = x$ به دست می‌آوریم:

$$\pi_x = \pi_x + w_x \sum_{i \neq x} \pi_i$$
$$= \pi_x + w_x(۱ - \pi_x)$$

ودر نتیجه

$$\pi_x = ۱.$$

مراجع

[۱] نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی- ترجمهٔ ابوالقاسم میامئی، محمدقاسم وحیدی اصل از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

[2] Ronold W., *Stochastic Modeling and the Theory of Quenes,* Wolff University of California, Berkeley, 1989.

[3] Whitaker, D., *The Derivative of a Measure Brand Loyalty Using a Markov Brand Switching Model,* J. op. Res. Soc., 29, 959-970 (1978).

پیشگامان آزمایشهای مقایسه‌ای

استیگلر (Stigler) در مقالهٔ ۱۹۷۳ خود متذکر می‌شود که ابن‌سینا هفت دستور برای آزمایشهای پزشکی روی انسانها را پایه‌گذاری کرده است که یکی از آنها توصیهٔ او برای مکرر کردن (replication) آزمایش و استفاده از کنترلهاست. وی خطر متغیرهای آمیخته را نیز یادآوری می‌کند.

نقل از مقاله ویلیام کوکران با عنوان

Early Development of Techniques in Comparative Experimentation

درکتاب On The History of Statistics and Probability

به ویراستاری D.B. Owen.